

## امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :  
الموضوع الأول:

### التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد، متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط  $B, A$  و  $C$  التي لواحتها على الترتيب  $z_C = 4$  و  $z_B = \sqrt{3} - i$ ،  $z_A = 1 + i$ .

1) أ) أكتب الأعداد  $z_B, z_A$  و  $\frac{z_A}{z_B}$  على شكل المثلثي، ثم استنتج الشكل الأساسي.

ب) أكتب العدد المركب  $\frac{z_A}{z_B}$  على شكله الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من:  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ .

2) أوجد قيمة العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{3}i)$ ، أكتب  $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8$ .

3) ليكن التحويل التقطي  $S$  الذي يرفق بكل النقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث:  $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} z$ .

- حدد طبيعة التحويل التقطي  $S$  وعناصره المميزة.

4) أ) أوجد المجموعة  $(\Gamma_1)$  للنقط  $M(z)$  من المستوي والتي تحقق:  $z = z_c + 2e^{i\theta}$  لما  $\theta$  تمشح  $\mathbb{R}$ .

ب) أوجد المجموعة  $(\Gamma_2)$  للنقط  $M(z)$  من المستوي والتي تحقق:  $\text{Arg}(z - z_c) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  مع  $k \in \mathbb{Z}$ .

5) أوجد صورة  $(\Gamma_1)$  بالتحويل التقطي  $S$ ، استنتج مساحتها.

### التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط  $A(3; 4; 0)$ ،  $B(0; 5; 0)$ ،  $C(0; 0; 5)$ ،  $D(-2; -6; 5)$ ،  $E(-4; 0; -3)$  و الشعاع  $\vec{n}(1; 3; 3)$

1. بين أن النقط  $A, B, C$  تعين مستو  $(ABC)$ ، تأكد أن  $\vec{n}$  شعاع ناظمي له ثم اكتب معادلة ديكرتية له

2. أ / برهن أن المثلث  $AOB$  متساوي الساقين .

ب / عين إحداثيي النقطة  $I$  منتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$ ، ثم بين أن  $OI = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ .

ج / بين أن المستقيم  $(OC)$  عمودي على المستوي  $(AOB)$

د / استنتج حجم رباعي الوجوه  $OABC$

3. احسب المسافة بين النقطة  $O$  والمستوي  $(ABC)$ .

4. أ / جد تمثيلًا وسيطيًا للمستقيم  $(DE)$ .

ب/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة المستقيمة [DE] .

ج / تحقق ان النقطة  $F\left(-1;1;\frac{7}{2}\right)$  تنتمي للمستوي (Q)

د / استنتج المسافة بين النقطة F والمستقيم (DE) .

### التمرين الثالث : (3.5 نقاط)

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx$

(1) أحسب  $u_0$  ثم اثبت مستعملا مبدأ الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n > 0$

(2) أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$  .

(3) برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(4) أ) أحسب بدلالة  $n$  الفرق  $u_{n+1} - u_n$  ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

ب) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي  $n : S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  .

### التمرين الرابع : (7 نقاط)

الجزء 1:  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم

متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  حيث الوحدة 2cm على محور الفواصل و 5cm على محور الترتيب

1. أحسب نهاية الدالة  $f$  عند  $-\infty$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2. أ/بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x : f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1+e^x)$

ب/ أحسب نهاية  $f$  عند  $+\infty$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. نعتبر على المجال  $]-1; +\infty[$  الدالة  $g$  المعرفة ب :  $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$

أ/ أدرس إتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$

ب/ أحسب  $g(0)$  ، ثم استنتج إشارة  $g(t)$  من أجل  $t$  موجب تماما.

4. أ/بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x : f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

ب/ استنتج أن  $f$  متناقصة تماما على مجموعة تعريفها، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ أنشئ  $(C_f)$

الجزء الثاني: نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  ب :  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $t : \frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن :  $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3. استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد ب  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلتهما  $x=0, x=\ln 4, y=0$  .

## الموضوع الثاني:

### التمرين الاول : (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم ، متعامد ، متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  ، نعتبر النقط  $A(-1; -3; 3)$  ،  $B(-3; -2; 1)$  و  $C(1; 5; 6)$

$$(d): \begin{cases} x = -k \\ y = -4k + 1 \\ z = -2k + 4 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\Delta): \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. بين أن المستقيمين (d) و  $(\Delta)$  يتقطعان في نقطة D يطلب تعيين إحداثياتها .
2. تحقق أن :  $B \in (\Delta)$  و  $C \in (d)$  ، ثم بين أن المثلث BCD قائم .
3. أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) المعرف بالمستقيمين (d) و  $(\Delta)$  .
4. تحقق أن المستوي  $(Q): -4x + y - 1 = 0$  معرف بالمستقيم (d) و النقطة A
5. ليكن  $\alpha$  عدد حقيقي و G نقطة من الفضاء .  
أ) عين شرطا على العدد الحقيقي  $\alpha$  بحيث تكون النقطة G مرجح للجمله المثقلة  $\{(B, \alpha); (C, -2\alpha); (D, 5)\}$  .  
ب) أوجد إحداثيات النقطة G من أجل  $\alpha = -1$  .
6. عين (S) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :  $GM^2 = 36$  .

### التمرين الثاني : (5 نقاط)

- I (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ،  $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$  ،  
2) نضع :  $z_A = 2i$  ،  $z_B = -\sqrt{3} + i$  ،  $z_C = -\sqrt{3} - i$  . أكتب الأعداد  $z_A$  ،  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي .  
3) بين ان العدد ،  $z_B^{2016}$  حقيقي
- II (2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$   
نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب  $z_A$  ،  $z_B$  و  $z_C$   
1) أحسب قيسا للزاوية  $(\vec{OA}; \vec{OB})$  ثم إستنتج طبيعة المثلث OAB .  
2) أثبت أن الرباعي OABC معين يطلب حساب مساحته .  
3) أ) حدد زاوية الدوران  $\mathcal{R}$  الذي مركزه النقطة B و يحول النقطة O الى النقطة A  
ب) أكتب الصيغة المركبة للتحاكي  $\mathcal{O}$  الذي مركزه B ونسبته 2  
4) حدد الطبيعة و العناصر المميزة لتحويل  $S = \mathcal{R} \circ \mathcal{O}$  ثم أعط الصيغة المركبة له .  
5) عين طبيعة صورة المعين OABC بالتحويل S . ثم أحسب مساحته .

### التمرين الثالث : (4 نقاط)

$(U_n)$  و  $(V_n)$  متاليتان معرفتان كما يلي :  $U_0 = 1$  و  $V_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5} , \quad U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}$$

1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع :  $W_n = U_n - V_n$  .

أ) أثبت أن المتتالية  $(W_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

- (ب) أكتب  $W_n$  بدلالة  $n$  ، ثم عين نهايتها .  
 (2) غير عن :  $U_{n+1} - U_n$  و  $V_{n+1} - V_n$  بدلالة  $W_n$  .  
 - استنتج اتجاه تغير المتتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  ، ثم بين أنهما متجاورتان .  
 (3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نعتبر المتتالية  $(t_n)$  المعرفة بـ :  $t_n = 3U_n + 10V_n$   
 أ) بين أن المتتالية  $(t_n)$  ثابتة ، ثم احسب نهايتها .  
 ب) عين نهاية المتتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  .

### التمرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء 01:

- نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $F(x) = \alpha x + \frac{\beta}{1+e^x}$  حيث  $\alpha ; \beta$  عدنان حقيقيان ثابتان .  
 أحسب  $F'(x)$  ثم عين العددين الحقيقيين  $\alpha ; \beta$  حيث  $F(1) = \frac{e}{1+e}$  و  $F'(0) = \frac{5}{4}$

الجزء 02: نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = x - \frac{1}{1+e^x}$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الطول 4cm .

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) > 0$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .
3. أ) بين أن المستقيمين المرفين بـ  $(\Delta_1): y = x$  و  $(\Delta_2): y = x - 1$  مستقيمان مقاربان للمنحني  $(C_f)$   
 ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني  $(C_f)$  و المستقيمان  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  .
4. تحقق أن  $f(-x) + f(x) = -1$  ، ماذا تستنتج؟
5. ليكن  $(T)$  المماس للمنحني  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 . اكتب معادلة  $(T)$  .
6. أ) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا حقيقيا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0 < \alpha < 0,5$   
 ب) تحقق أن  $1 + e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

7. أنشئ كلاً من  $(\Delta_1)$  ،  $(\Delta_2)$  ،  $(T)$  و  $(C_f)$  . (تقبل ان المنحني  $(C_f)$  يقبل  $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$  كنقطة إنعطاف)

8. ناقش بيانيا وذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حلول المعادلة  $m = \frac{1}{1+e^x}$

9. نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ، كما يلي :  $u_n = \int_{\alpha}^n [x - f(x)] dx$  .

أ) أعط تفسيراً هندسياً لـ  $u_n$

ب) تحقق أن  $x - f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

ج) احسب  $u_n$  بدلالة  $n$

د) بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -(\alpha + \ln \alpha)$