

الإستمرارية و الاشتقاقية

الإستمرارية: (la Continuité)

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا و فقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

خواص:

- تكون الدالة f مستمرة على المجال $]a, b[$ إذا و فقط إذا كانت الدالة f مستمرة عند كل قيمة من هذا المجال .
- الدوال كثيرات الحدود هي دوال مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال المرجعية هي دوال مستمرة على المجال المفتوح لمجموعة تعريفها
- مجموع و جداء دالتين مستمرتين هي دالة مستمرة.
- حاصل قسمة كثيري حدود هي دالة مستمرة على مجموعة تعريفها

الاشتقاقية: (la Dérivabilité)

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

خواص:

- تكون الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$ إذا و فقط إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من هذا المجال .
- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال المرجعية قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح لمجموعة تعريفها
- مجموع و جداء دالتين قابلتين للاشتقاق هي دالة قابلة للاشتقاق.
- حاصل قسمة كثيري حدود هي قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق فهي مستمرة .

إذا كانت الدالة f غير مستمرة فهي غير قابلة للاشتقاق

التفسير الهندسي للعدد المشتق :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

المنحنى يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 معامل توجيهه ℓ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

المنحنى يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي محور الفواصل

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$$

المنحنى يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي محور الترتيب

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

الحالة الرابعة :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell' \text{ مع } \ell \neq \ell'$$

المنحنى يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ميلهما ℓ و ℓ'

التقريب التالفي:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإنه من أجل كل عدد حقيقي h قريب من الصفر نكتب :

$$f(x_0 + h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$$

و من أجل كل عدد حقيقي x قريب من x_0 نكتب :

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

المماس : (la Droite tangente)

معادلة المماس هي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

حيث x_0 هي الفاصلة

ملاحظة:

في حالة عدم وجود الفاصلة ، نبحث عنها بجل إحدى المعادلات التالية:

$$f'(x) = \text{الترتبية} \quad f(x) = \text{معامل التوجيه}$$

اتجاه تغير دالة :

f دالة قابلة للاشتقاق على D ، و f' دالتها المشتقة .

- إذا كانت : $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما .
- إذا كانت : $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما .
- إذا كانت : $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة .

حصر دالة : (Encadrement d'une fonction)

إذا كانت الدالة f متزايدة فإن :

$$a \leq x \leq b$$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

إذا كانت الدالة f متناقصة فإن :

$$a \leq x \leq b$$

$$f(b) \leq f(x) \leq f(a)$$

نظرية القيم الوسطى: (Théorème des valeurs intermédiaires)

تكون المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a, b]$ إذا

و فقط إذا كان : f مستمرة على المجال $[a, b]$

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

ملاحظة:

- إذا كانت أيضا f رتيبة على المجال $[a, b]$ فإن الحل α وحيد

- تكون المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a, b]$

إذا و فقط إذا كان :

$$f(a) < k < f(b)$$

مع k عدد حقيقي

الدالة	الدالة المشتقة	ملاحظة
a	0	$a \in \mathbb{R}$
x	1	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$
$u + v$	$u' + v'$	
$u \times v$	$u'.v + v'.u$	
$\lambda.u$	$\lambda.u'$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{n.u'}{u^{n+1}}$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$	$v(x) \neq 0$
u^n	$n.u'.u^{n-1}$	
e^x	e^x	
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\ln u(x)$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$u(x) > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\sin u$	$u'.\cos u$	
$\cos u$	$-u'.\sin u$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\cos x \neq 0$
$u \circ v$	$v'(u' \circ v)$	