

وزارة التربية الوطنية	التصحيح النموذجي للوظيفة	مديرية التربية لولاية سطيف
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم مزلق	المنزلية رقم 01	المستوى: 2.ع.ت
سلمت يوم: 2022/10/17	في مادة الرياضيات	تعاود يوم: 2022/10/24

تمرين 01 (04 نقاط) ★★★ (60 دقيقة)

1 عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة مما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{7} \quad (أ) \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} \quad (ب) \quad f(x) = \sqrt{-2x - 6} \quad (ج) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + x^2}}{|x| - 3} \quad (د)$$

الجواب :

$$\begin{aligned} (أ) \quad f(x) = \frac{x^2 - 3}{7} ; \quad D_f = \mathbb{R} \\ (ب) \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} ; \quad D_f = \mathbb{R} \\ (ج) \quad f(x) = \sqrt{-2x - 6} ; \quad D_f =]-\infty; -3] \\ (د) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + x^2}}{|x| - 3} ; \quad D_f = \mathbb{R} - \{-3; 3; [-1; 0]\} \end{aligned}$$

2 اذكر ما إذا كانت الدالتان f و g متساويتين في كل حالة مما يلي :

$$\begin{aligned} (أ) \quad f(x) = \frac{(2x + 1)(x + 1)}{x + 1} ; \quad g(x) = 2x + 1 \\ (ب) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 3)^2} ; \quad g(x) = 1 + \frac{2}{x - 3} \\ (ج) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}} ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 2}} \\ (د) \quad f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}} ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \end{aligned}$$

الجواب :

$$(أ) \quad f(x) = \frac{(2x + 1)(x + 1)}{x + 1} = 2x + 1 = g(x) ; \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\} ; \quad D_g = \mathbb{R}$$

بما أن : $D_f \neq D_g$ فإن الدالتين f و g غير متساويتين.

$$(ب) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3)(x - 1)}{(x - 3)^2} = \frac{x - 1}{x - 3} = \frac{x - 3 + 2}{x - 3} = \frac{x - 3}{x - 3} + \frac{2}{x - 3} = 1 + \frac{2}{x - 3} = g(x)$$

بما أن : $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{3\}$ فإن الدالتين f و g متساويتان.

$$(ج) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}} = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 2}} = g(x) ; \quad D_f =]-\infty; -2[\cup [1; +\infty[; \quad D_g = [1; +\infty[$$

بما أن : $D_f \neq D_g$ فإن الدالتين f و g غير متساويتين.

$$(د) \quad f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}} ; \quad D_f = [-1; 0[\cup [1; +\infty[; \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} ; \quad D_g =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

بما أن : $D_f \neq D_g$ فإن الدالتين f و g غير متساويتين.

3 f و g دالتان معرفتان كما يلي : $f(x) = \sqrt{4 - x} ; \quad g(x) = x^2 + 3x + 2$

عين مجموعة تعريف ثم حدد عبارة كل من الدوال التالية : $f ; f \times g ; -4f ; 3g ; f + g ; f + 2 ; g ; f$

$$\text{الجواب : } f(x) = \sqrt{4 - x} ; \quad D_f =]-\infty; 4] ; \quad g(x) = x^2 + 3x + 2 ; \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$(f + 2)(x) = f(x) + 2 = \sqrt{4 - x} + 2 ; \quad D_{f+2} = D_f ; \quad (3g)(x) = 3g(x) = 3x^2 + 9x + 6 ; \quad D_{3g} = D_g$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{4 - x} + x^2 + 3x + 2 ; \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g = D_f$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 + 3x + 2)\sqrt{4 - x} ; \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g = D_f$$

$$(-4f)(x) = -4f(x) = -4\sqrt{4 - x} ; \quad D_{-4f} = D_f ; \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{4 - x}}{x^2 + 3x + 2}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f \cap D_g) \wedge (g(x) \neq 0)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 4) \wedge x \notin \{-2; -1\}\} =]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]-1; 4]$$

1 عين مجموعة تعريف ثم عبارة كل من : $f \circ f$; $g \circ f$; $f \circ g$; $g \circ g$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-1} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x-3} \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} \quad ; \quad g(x) = -3x \quad (\text{ا})$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{د})$$

$$f(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x+3} \quad (\text{ب})$$

الجواب :

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_g) \wedge (g(x) \in D_f)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{R}) \wedge (-3x \in \mathbb{R})\} = \mathbb{R} \quad (\text{ا})$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2g(x)+1}{(g(x))^2+1} = \frac{2(-3x)+1}{(-3x)^2+1} = \frac{1-6x}{9x^2+1}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f) \wedge (f(x) \in D_g)\} = \left\{x \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{R}) \wedge \left(\frac{2x+1}{x^2+1} \in \mathbb{R}\right)\right\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -3f(x) = -3 \left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right) = \frac{-6x-3}{x^2+1}$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f) \wedge (f(x) \in D_f)\} = \left\{x \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{R}) \wedge \left(\frac{2x+1}{x^2+1} \in \mathbb{R}\right)\right\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2f(x)+1}{(f(x))^2+1} = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)+1}{\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^2+1} = \frac{x^4+4x^3+4x^2+4x+3}{x^4+6x^2+4x+2}$$

$$D_{g \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_g) \wedge (g(x) \in D_g)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{R}) \wedge (-3x \in \mathbb{R})\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = -3g(x) = -3(-3x) = 9x$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_g) \wedge (g(x) \in D_f)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq -3) \wedge (\sqrt{x+3} \in \mathbb{R})\} = [-3; +\infty[\quad (\text{ب})$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - 3 = (\sqrt{x+3})^2 - 3 = x$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f) \wedge (f(x) \in D_g)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 3 \geq -3)\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)+3} = \sqrt{x^2-3+3} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f) \wedge (f(x) \in D_f)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 3 \in \mathbb{R})\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (f(x))^2 - 3 = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$$

$$D_{g \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_g) \wedge (g(x) \in D_g)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq -3) \wedge (\sqrt{x+3} \geq -3)\} = [-3; +\infty[$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x+3}+3}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_g) \wedge (g(x) \in D_f)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 3) \wedge (\sqrt{x-3} \neq 1)\} \quad (\text{ج})$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 3) \wedge (x \neq 4)\} = [3; 4[\cup]4; +\infty[$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{3g(x)-2}{g(x)-1} = \frac{3\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x-3}-1}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f) \wedge (f(x) \in D_g)\} = \left\{x \in \mathbb{R} : (x \neq 1) \wedge \left(\frac{3x-2}{x-1} \geq 3\right)\right\} =]1; +\infty[$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)-3} = \sqrt{\frac{3x-2}{x-1}-3} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f) \wedge (f(x) \in D_f)\} = \left\{x \in \mathbb{R} : (x \neq 1) \wedge \left(\frac{3x-2}{x-1} \neq 1\right)\right\}$$

$$D_{f \circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} : (x \neq 1) \wedge \left(x \neq \frac{1}{2}\right)\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{3f(x)-2}{f(x)-1} = \frac{3\left(\frac{3x-2}{x-1}\right)-2}{\frac{3x-2}{x-1}-1} = \frac{7x-4}{2x-1}$$

$$D_{g \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_g) \wedge (g(x) \in D_g)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 3) \wedge (\sqrt{x-3} \geq 3)\} = [3; +\infty[$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{g(x)-3} = \sqrt{\sqrt{x-3}-3}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_g) \wedge (g(x) \in D_f)\} = \left\{x \in \mathbb{R} : (x \neq 0) \wedge \left(\frac{1}{x} \geq 0\right)\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0; +\infty[\quad (د)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f) \wedge (f(x) \in D_g)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 0) \wedge (\sqrt{x} \neq 0)\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0; +\infty[$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_f) \wedge (f(x) \in D_f)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 0) \wedge (\sqrt{x} \geq 0)\} = [0; +\infty[$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$D_{g \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (x \in D_g) \wedge (g(x) \in D_g)\} = \left\{x \in \mathbb{R} : (x \neq 0) \wedge \left(\frac{1}{x} \neq 0\right)\right\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

2 فكك الدالة f المعرفة على المجال I إلى دالتين ثم استنتج اتجاه تغيرها في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = -2\sqrt{x} - 6 \quad ; \quad I = [0; +\infty[\quad (\text{هـ})$$

$$f(x) = \sqrt{-2x - 6} \quad ; \quad I =]-\infty; -3] \quad (\text{ا})$$

$$f(x) = -x^2 - 3 \quad ; \quad I =]-\infty; 0] \quad (\text{و})$$

$$f(x) = (x+3)^2 \quad ; \quad I = [-3; +\infty[\quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \frac{2}{x} - 4 \quad ; \quad I =]-\infty; 0] \quad (\text{ز})$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-4} \quad ; \quad I =]2; +\infty[\quad (\text{ج})$$

$$f(x) = \frac{5}{x^2+2} - x^2 - 5 \quad ; \quad I =]-\infty; 0[\quad (\text{ح})$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad I =]-\infty; 0[\quad (\text{د})$$

الجواب :

$$f(x) = \sqrt{-2x - 6} \quad ; \quad I =]-\infty; -3] \quad ; \quad f = v \circ u \quad ; \quad u(x) = -2x - 6 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x} \quad (\text{ا})$$

بما أن u متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ و v متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ فإن f متناقصة تماماً على I

$$f(x) = (x+3)^2 \quad ; \quad I = [-3; +\infty[\quad ; \quad f = v \circ u \quad ; \quad u(x) = x+3 \quad ; \quad v(x) = x^2 \quad (\text{ب})$$

بما أن u متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ و v متزايدة تماماً على I فإن f متزايدة تماماً على I

$$f(x) = \frac{1}{2x-4} \quad ; \quad I =]2; +\infty[\quad ; \quad f = v \circ u \quad ; \quad u(x) = 2x-4 \quad ; \quad v(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{ج})$$

بما أن u متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ و v متناقصة تماماً على I فإن f متناقصة تماماً على I

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad I =]-\infty; 0[\quad ; \quad f = v \circ u \quad ; \quad u(x) = x^2 \quad ; \quad v(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{د})$$

بما أن u و v متناقصتان تماماً على I فإن f متزايدة تماماً على I

$$f(x) = -2\sqrt{x} - 6 \quad ; \quad I = [0; +\infty[\quad ; \quad f = v \circ u \quad ; \quad u(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad v(x) = -2x - 6 \quad (\text{هـ})$$

بما أن u متزايدة تماماً على I و v متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ فإن f متناقصة تماماً على I

$$f(x) = -x^2 - 3 \quad ; \quad I =]-\infty; 0] \quad ; \quad f = v \circ u \quad ; \quad u(x) = x^2 \quad ; \quad v(x) = -x - 3 \quad (\text{و})$$

بما أن u متناقصة تماماً على I و v متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ فإن f متزايدة تماماً على I

$$f(x) = \frac{2}{x} - 4 \quad ; \quad I =]-\infty; 0] \quad ; \quad f = v \circ u \quad ; \quad u(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad v(x) = 2x - 4 \quad (\text{ز})$$

بما أن u متناقصة تماماً على I و v متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ فإن f متناقصة تماماً على I

$$f(x) = \frac{5}{x^2+2} - x^2 - 5 = \frac{5}{x^2+2} - (x^2+2) - 3 \quad ; \quad I =]-\infty; 0[\quad ; \quad f = v \circ u \quad (\text{ح})$$

$$u(x) = x^2 + 2 \quad ; \quad v(x) = \frac{5}{x} - x - 3 \quad \text{حيث :}$$

بما أن u متناقصة تماماً على I و v (مجموع دالتين متناقصتين على I) متناقصة تماماً على I فإن f متزايدة تماماً على I

3 أثبت بثلاث طرق مختلفة في كل حالة من الحالات التالية أن :

- النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f :

$$f(x) = (x-1)^3 + 3 \quad ; \quad \Omega(1;3) \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \frac{2x+5}{2x+1} \quad ; \quad \Omega\left(-\frac{1}{2};1\right) \quad (ا)$$

الجواب :

$$f(x) = \frac{2x+5}{2x+1} \quad ; \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad ; \quad \Omega\left(-\frac{1}{2};1\right) = (x_0; y_0) \quad \text{الطريقة الأولى :} \quad (ا)$$

$$\text{باستعمال دساتير تغيير المعلم نحد :} \quad \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \quad \text{يكافئ :} \quad \begin{cases} x = X - \frac{1}{2} \\ y = Y + 1 \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

$$Y = f(X) = \frac{2X+4}{2X} - 1 = \frac{2}{X} \quad \text{تكافئ :} \quad Y + 1 = \frac{2\left(X - \frac{1}{2}\right) + 5}{2\left(X - \frac{1}{2}\right) + 1} \quad \text{تكافئ :} \quad y = f(x) = \frac{2x+5}{2x+1}$$

$$f(-X) = \frac{2}{-X} = -\frac{2}{X} = -f(X) \quad : X \in \mathbb{R}^* \quad \text{بما أن :} \quad D_f = \mathbb{R}^* \quad \text{متناظر بالنسبة للصفر و من أجل} \quad X \in \mathbb{R}^*$$

فإن الدالة f فردية. إذن النقطة Ω مركز تناظر ل (C_f)

$$f(x) = \frac{2x+5}{2x+1} \quad ; \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad ; \quad \Omega\left(-\frac{1}{2};1\right) = (\alpha; \beta) \quad \text{الطريقة الثانية :}$$

$$\text{نثبت أنه من أجل} \quad x \in D_f \quad : \quad (\alpha - x) \in D_f \quad \text{و} \quad (\alpha + x) \in D_f \quad \text{و} \quad f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$$

$$\text{أي :} \quad -\frac{1}{2} - x \neq -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2} + x \neq -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad f\left(-\frac{1}{2} - x\right) + f\left(-\frac{1}{2} + x\right) = 2(1)$$

$$\text{إذن نثبت أنه من أجل} \quad x \neq 0 \quad : \quad f\left(-\frac{1}{2} - x\right) + f\left(-\frac{1}{2} + x\right) = 2$$

$$\text{لدينا :} \quad f\left(-\frac{1}{2} - x\right) + f\left(-\frac{1}{2} + x\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{2} - x\right) + 5}{2\left(-\frac{1}{2} - x\right) + 1} + \frac{2\left(-\frac{1}{2} + x\right) + 5}{2\left(-\frac{1}{2} + x\right) + 1} = \frac{-2x+4}{-2x} + \frac{2x+4}{2x}$$

$$\text{و منه :} \quad f\left(-\frac{1}{2} - x\right) + f\left(-\frac{1}{2} + x\right) = \frac{x-2}{x} + \frac{x+2}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

إذن النقطة Ω مركز تناظر ل (C_f)

$$f(x) = \frac{2x+5}{2x+1} \quad ; \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad ; \quad \Omega\left(-\frac{1}{2};1\right) = (\alpha; \beta) \quad \text{الطريقة الثالثة :}$$

$$\text{نثبت أنه من أجل} \quad x \in D_f \quad : \quad (2\alpha - x) \in D_f \quad \text{و} \quad f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

$$\text{أي :} \quad 2\left(-\frac{1}{2}\right) - x \neq -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad f\left(2\left(-\frac{1}{2}\right) - x\right) + f(x) = 2(1)$$

$$\text{إذن نثبت أنه من أجل} \quad x \neq -\frac{1}{2} \quad : \quad f(-1 - x) + f(x) = 2$$

$$\text{لدينا :} \quad f(-1 - x) + f(x) = \frac{2(-1 - x) + 5}{2(-1 - x) + 1} + \frac{2x+5}{2x+1} = \frac{-2x+3}{-2x-1} + \frac{2x+5}{2x+1} = \frac{2x-3}{2x+1} + \frac{2x+5}{2x+1}$$

$$\text{و منه :} \quad f(-1 - x) + f(x) = \frac{4x+2}{2x+1} = \frac{2(2x+1)}{2x+1} = 2$$

إذن النقطة Ω مركز تناظر ل (C_f)

$$f(x) = (x-1)^3 + 3 \quad ; \quad \Omega(1;3) = (x_0; y_0) \quad \text{الطريقة الأولى :} \quad (\text{ب})$$

$$\text{باستعمال دساتير تغيير المعلم نحد :} \quad \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \quad \text{يكافئ :} \quad \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 3 \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

$$Y = f(X) = X^3 \quad \text{تكافئ :} \quad Y + 3 = (X + 1 - 1)^3 + 3 \quad \text{تكافئ :} \quad y = f(x) = (x-1)^3 + 3$$

$$\text{بما أن :} \quad D_f = \mathbb{R} \quad \text{متناظر بالنسبة للصفر و من أجل} \quad X \in \mathbb{R} \quad : \quad f(-X) = (-X)^3 = -X^3 = -f(X)$$

فإن الدالة f فردية. إذن النقطة Ω مركز تناظر ل (C_f)

$$f(x) = (x-1)^3 + 3 \quad ; \quad \Omega(1;3) = (\alpha; \beta) \quad \text{الطريقة الثانية :}$$

$$\text{نثبت أنه من أجل} \quad x \in D_f \quad : \quad (\alpha - x) \in D_f \quad \text{و} \quad (\alpha + x) \in D_f \quad \text{و} \quad f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$$

$$\text{أي :} \quad (1 - x) \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad (1 + x) \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(1 - x) + f(1 + x) = 2(3)$$

إذن ثبت أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f(1-x) + f(1+x) = 6$
 لدينا : $f(1-x) + f(1+x) = (1-x-1)^3 + 3 + (1+x-1)^3 + 3 = -x^3 + x^3 + 6 = 6$
 إذن النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f)

الطريقة الثالثة : $f(x) = (x-1)^3 + 3$; $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 1\right) = (\alpha; \beta)$

ثبت أنه من أجل $x \in D_f$: $(2\alpha - x) \in D_f$ و $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$
 أي : $(2-x) \in \mathbb{R}$ و $f(2-x) + f(x) = 2(1)$

إذن ثبت أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f(2-x) + f(x) = 6$
 لدينا : $f(2-x) + f(x) = (2-x-1)^3 + 3 + (x-1)^3 + 3 = (1-x)^3 + (1+x)^3 + 6 = -(x-1)^3 + (x-1)^3 + 6 = 6$
 إذن النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f)

- المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f :

$$(1) \quad x = -1 : (\Delta) \quad ; \quad f(x) = \sqrt{|x+1|-1} \quad ; \quad (2) \quad x = 2 : (\Delta) \quad ; \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2}$$

الجواب :

(1) الطريقة الأولى : $f(x) = \sqrt{|x+1|-1}$; $D_f =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$; $(\Delta) : x = -1 = x_0$

باستعمال دساتير تغيير المعلم نحد : $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y \end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y \end{cases}$ و منه :

$$Y = f(X) = \sqrt{|X|-1} \quad ; \quad Y = \sqrt{|X-1+1|-1} \quad ; \quad Y = f(x) = \sqrt{|x+1|-1} \quad ; \quad Y = f(X) = \sqrt{|X|-1}$$

بما أن : $D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ متناظر بالنسبة للصفر.

و من أجل $x \in D_f$: $f(-X) = \sqrt{|-X|-1} = \sqrt{|X|-1} = f(X)$

فإن الدالة f زوجية. إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

الطريقة الثانية : $f(x) = \sqrt{|x+1|-1}$; $D_f =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$; $(\Delta) : x = -1 = \alpha$

ثبت أنه من أجل $x \in D_f$: $(\alpha - x) \in D_f$ و $(\alpha + x) \in D_f$ و $f(\alpha - x) - f(\alpha + x) = 0$

أي : $(-1-x \geq 0) \vee (-1-x \leq -2)$ و $(-1+x \geq 0) \vee (-1+x \leq -2)$ و $f(-1-x) - f(-1+x) = 0$

إذن ثبت أنه من أجل $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$: $f(-1-x) - f(-1+x) = 0$

لدينا : $f(-1-x) - f(-1+x) = \sqrt{|-1-x+1|-1} - \sqrt{|-1+x+1|-1} = \sqrt{|x|-1} - \sqrt{|x|-1} = 0$

إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

الطريقة الثالثة : $f(x) = \sqrt{|x+1|-1}$; $D_f =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$; $(\Delta) : x = -1 = \alpha$

ثبت أنه من أجل $x \in D_f$: $(2\alpha - x) \in D_f$ و $f(2\alpha - x) - f(x) = 0$

أي : $(-2-x \geq 0) \vee (-2-x \leq -2)$ و $f(-2-x) - f(x) = 0$

إذن ثبت أنه من أجل $x \in]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$: $f(-2-x) - f(x) = 0$

لدينا : $f(-2-x) - f(x) = \sqrt{|-2-x+1|-1} - \sqrt{|x+1|-1} = \sqrt{|x+1|-1} - \sqrt{|x+1|-1} = 0$

إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

(ب) الطريقة الأولى : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2}$; $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$; $(\Delta) : x = 2 = x_0$

باستعمال دساتير تغيير المعلم نحد : $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y \end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y \end{cases}$ و منه :

$$Y = f(X) = \frac{(X+2)^2 - 4(X+2) + 2}{(X+2-2)^2} = \frac{X^2 - 2}{X^2} = 1 - \frac{2}{X^2} \quad ; \quad Y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2}$$

بما أن : $D_f = \mathbb{R}^*$ متناظر بالنسبة للصفر.

و من أجل $X \in D_f$: $f(-X) = 1 - \frac{2}{(-X)^2} = 1 - \frac{2}{X^2} = f(X)$

فإن الدالة f زوجية. إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

الطريقة الثانية : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x - 2)^2}$; $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$; $(\Delta) : x = 2 = \alpha$

نثبت أنه من أجل $x \in D_f$: $(\alpha - x) \in D_f$ و $(\alpha + x) \in D_f$ و $f(\alpha - x) - f(\alpha + x) = 0$

أي : $f(2 - x) - f(2 + x) = 0$ و $2 + x \neq 2$ و $2 - x \neq 2$

إذن نثبت أنه من أجل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(2 - x) - f(2 + x) = 0$

لدينا : $f(2 - x) - f(2 + x) = \frac{(2 - x)^2 - 4(2 - x) + 2}{(2 - x - 2)^2} - \frac{(2 + x)^2 - 4(2 + x) + 2}{(2 + x - 2)^2} = \frac{x^2 - 2 - (x^2 - 2)}{x^2} = 0$

إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

الطريقة الثالثة : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x - 2)^2}$; $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$; $(\Delta) : x = 2 = \alpha$

نثبت أنه من أجل $x \in D_f$: $(2\alpha - x) \in D_f$ و $f(2\alpha - x) - f(x) = 0$

أي : $f(4 - x) - f(x) = 0$ و $(4 - x) \neq 2$

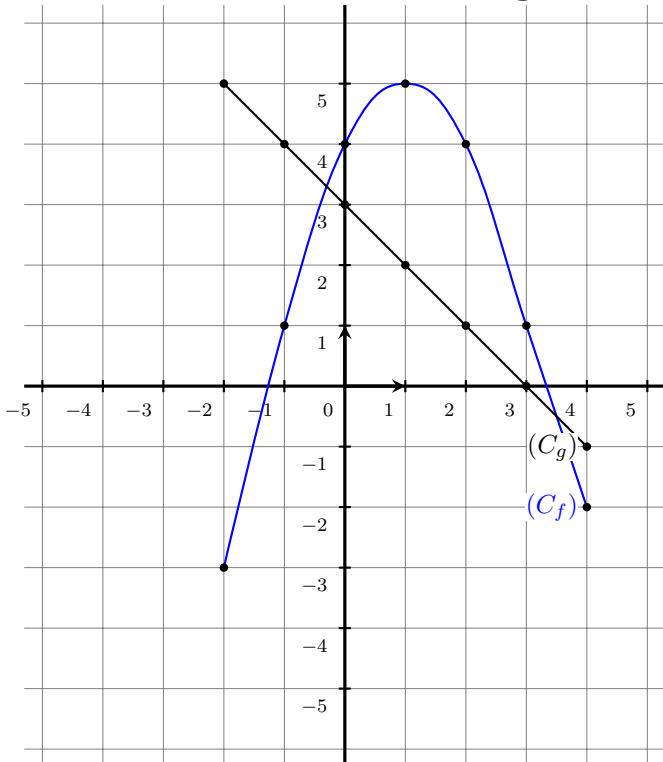
إذن نثبت أنه من أجل $x \neq 2$: $f(4 - x) - f(x) = 0$

لدينا : $f(4 - x) - f(x) = \frac{(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 2}{(4 - x - 2)^2} - \frac{x^2 - 4x + 2}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 2 - (x^2 - 4x + 2)}{(x - 2)^2} = 0$

إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

تمرين 03 (03 نقاط) ★★ (20 دقيقة)

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على المجال $[-2; 4]$ كما هو موضح في الشكل المقابل. بقراءة بيانية :



1 عين $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$; $f(3)$; $g(0)$; $g(1)$; $g(3)$

الجواب :

$$f(0) = 4 ; f(1) = 5 ; f(-1) = f(3) = 1$$

$$g(0) = 3 ; g(1) = 2 ; g(3) = 0$$

2 احسب الأعداد :

$$(f \circ g)(0) ; (-2f + g)(0) ; (f \times g)(0) ; (f + g)(3)$$

$$(-5g + 2f)(1) ; \left(\frac{f}{g}\right)(1) ; (g \circ f)(3) ; (g \circ g)(1)$$

الجواب :

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 1 + 0 = 1$$

$$(f \times g)(0) = f(0) \times g(0) = 4 \times 3 = 12$$

$$(-2f + g)(0) = -2f(0) + g(0) = -2(4) + 3 = -5$$

$$(-5g + 2f)(1) = -5g(1) + 2f(1) = 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{5}{2}$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(1) = 2 ; (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(3) = 1 ; (g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(2) = 1$$

$$(g \circ g \circ f)(-1) ; (g \circ f \circ g)(3) ; (f \circ g \circ f)(0)$$

الجواب :

$$(f \circ g \circ f)(0) = (f \circ g)(f(0)) = (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-1) = 1$$

$$(g \circ f \circ g)(3) = (g \circ f)(g(3)) = (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(4) = -1$$

$$(g \circ g \circ f)(-1) = (g \circ g)(f(-1)) = (g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(2) = 1$$

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-3\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$
 (C_f) تمثيلها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(أ) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$: $f(x) = a + \frac{b}{x+3}$ حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

الجواب : $f(x) = \frac{x-1}{x+3} = \frac{x+3-4}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} + \frac{-4}{x+3} = 1 + \frac{-4}{x+3} = a + \frac{b}{x+3}$

بالمطابقة نجد : $a = 1$ و $b = -4$ و منه : $f(x) = 1 - \frac{4}{x+3}$

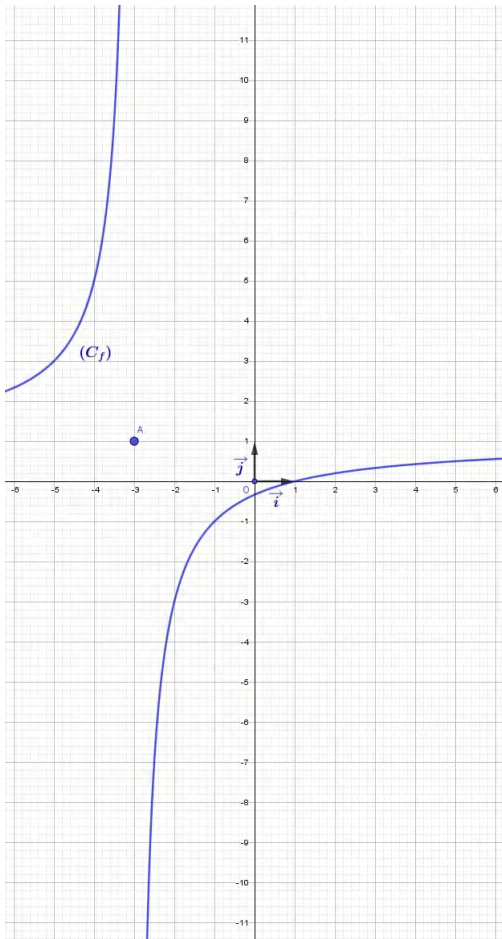
(ب) حدد اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty; -3[$ و $]-3; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
 الجواب:

على المجال $]-\infty; -3[$: ليكن x_1 و x_2 من المجال $]-\infty; -3[$ حيث : $x_1 < x_2 < -3$ يكافئ : $x_1 + 3 < x_2 + 3 < 0$
 يكافئ : $\frac{1}{x_1 + 3} > \frac{1}{x_2 + 3}$ يكافئ : $-\frac{4}{x_1 + 3} < -\frac{4}{x_2 + 3}$ يكافئ : $1 - \frac{4}{x_1 + 3} < 1 - \frac{4}{x_2 + 3}$ يكافئ : $f(x_1) < f(x_2)$
 و منه : f متزايدة تماماً.

على المجال $]-3; +\infty[$: ليكن x_1 و x_2 من المجال $]-3; +\infty[$ حيث : $-3 < x_1 < x_2$ يكافئ : $0 < x_1 + 3 < x_2 + 3$
 يكافئ : $\frac{1}{x_1 + 3} > \frac{1}{x_2 + 3}$ يكافئ : $-\frac{4}{x_1 + 3} < -\frac{4}{x_2 + 3}$ يكافئ : $1 - \frac{4}{x_1 + 3} < 1 - \frac{4}{x_2 + 3}$ يكافئ : $f(x_1) < f(x_2)$
 و منه : f متزايدة تماماً.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

(ج) $A(-3; 1)$ نقطة من المستوي. اكتب معادلة (C_f) في المعلم $(A; \vec{i}, \vec{j})$ ثم أنشئه.
 الجواب:



باستعمال دساتير تغيير المعلم نجد :

$$\begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y + 1 \end{cases} \text{ يكافئ : } \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

و منه : $y = f(x) = 1 - \frac{4}{(x+3)}$

تكافئ : $Y + 1 = 1 + \frac{-4}{X - 3 + 3}$

تكافئ : $Y = f(X) = -\frac{4}{X}$

(د) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$: $f(-6-x) + f(x) = 2$ و ماذا تستنتج ؟

الجواب:

$$f(-6-x) + f(x) = 2 \quad \text{من الشكل} \quad f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \quad \text{حيث} \quad (\alpha; \beta) = (-3; 1)$$

$$f(-6-x) + f(x) = 1 - \frac{4}{-6-x+3} + 1 - \frac{4}{x+3} = 2 - \frac{4}{-x-3} - \frac{4}{x+3} = 2 + \frac{4}{x+3} - \frac{4}{x+3} = 2$$

الاستنتاج: النقطة $A(-3; 1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

(هـ) حل بطريقتين مختلفتين في $\mathbb{R} - \{-3\}$ المتراجحة : $f(x) > 0$

الجواب:

الطريقة الأولى (بيانياً) : $f(x) > 0$ يكافئ $x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$

الطريقة الثانية (حسابياً) :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	0	$+$

$$\frac{x-1}{x+3} > 0 \quad \text{يكافئ} \quad f(x) > 0$$

و منه : $x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$

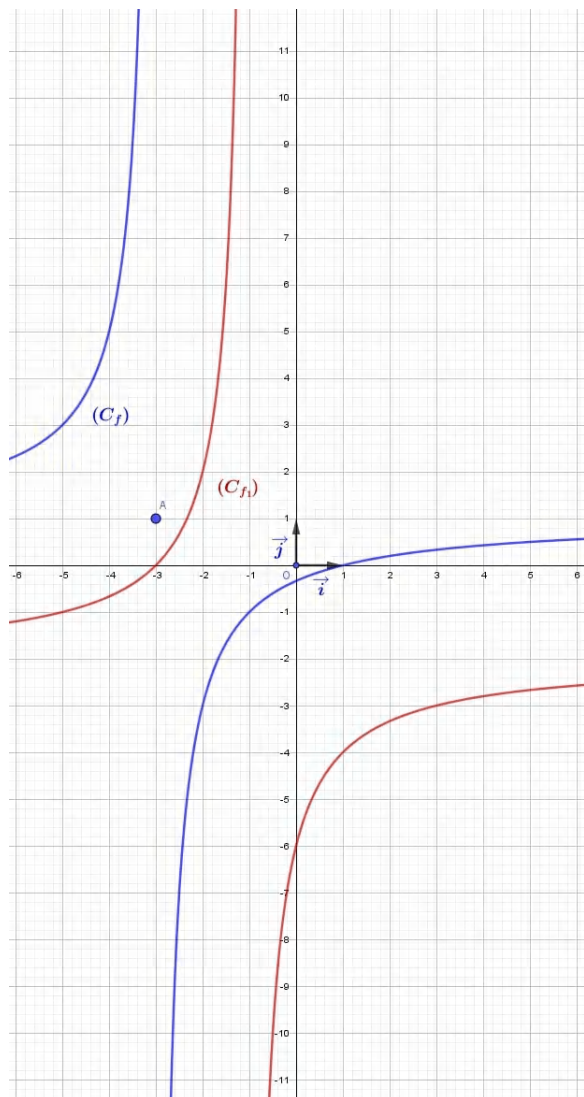
2 نعتبر الدوال $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ المعرفة كما يلي :

$$f_1(x) = f(x-2) - 3 \quad ; \quad f_2(x) = -f(x) \quad ; \quad f_3(x) = f(-x) \quad ; \quad f_4(x) = -f(-x)$$

$$f_5(x) = f(|x|) \quad ; \quad f_6(x) = f(-|x|) \quad ; \quad f_7(x) = |f(x)|$$

(أ) اشرح كيفية إنشاء كل من $(C_{f_1}) ; (C_{f_2}) ; (C_{f_3}) ; (C_{f_4}) ; (C_{f_5}) ; (C_{f_6}) ; (C_{f_7})$ انطلاقاً من (C_f) ثم أنشئ بشكل منفصل كلا من المنحنيات السابقة.

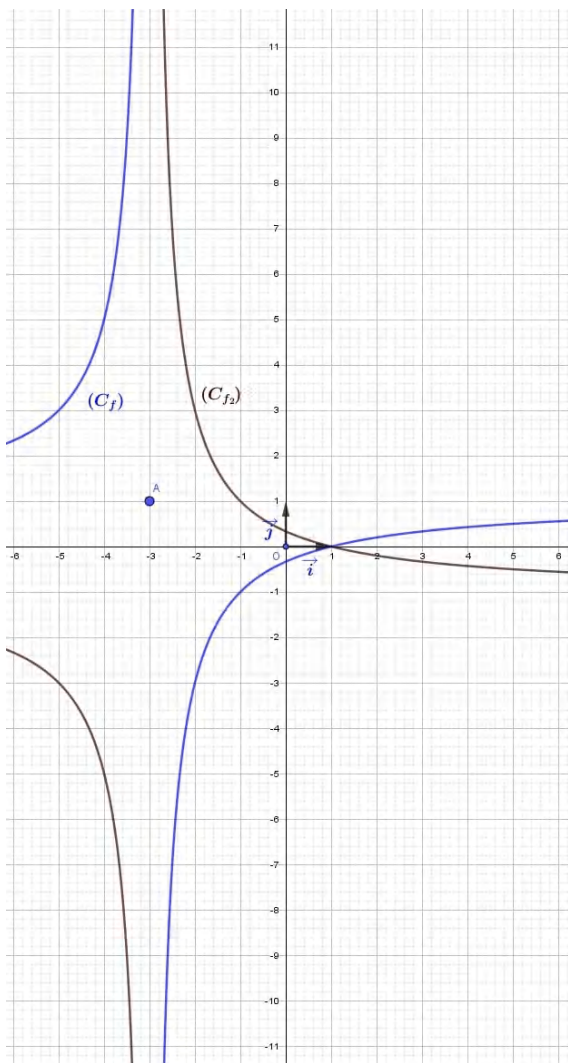
الجواب :



لدينا : $f_1(x) = f(x-2) - 3$

إذن : (C_{f_1}) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي

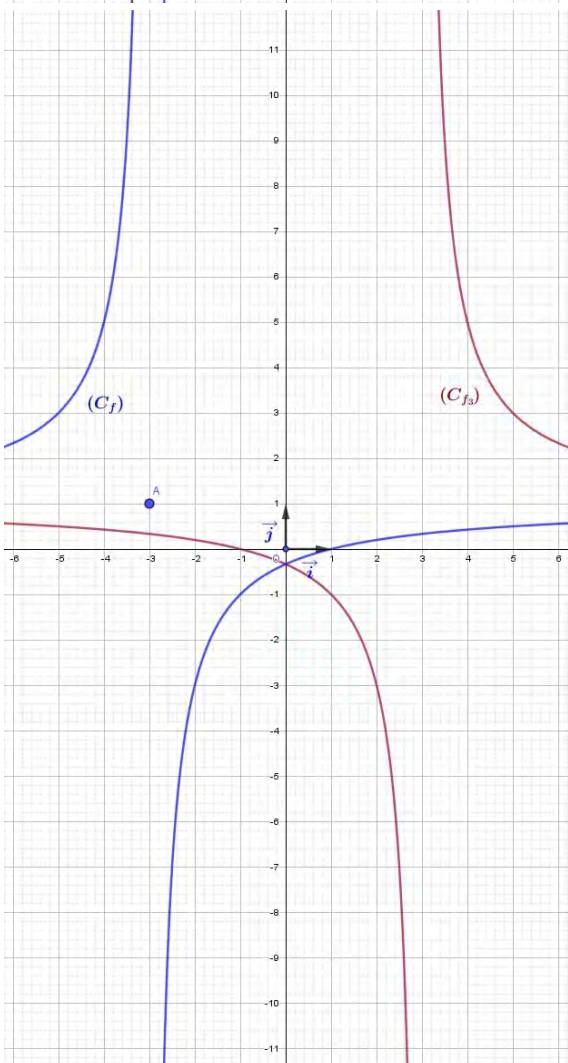
$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{شعاعه}$$



لدينا : $f_2(x) = -f(x)$

إذن : (C_{f_2}) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى

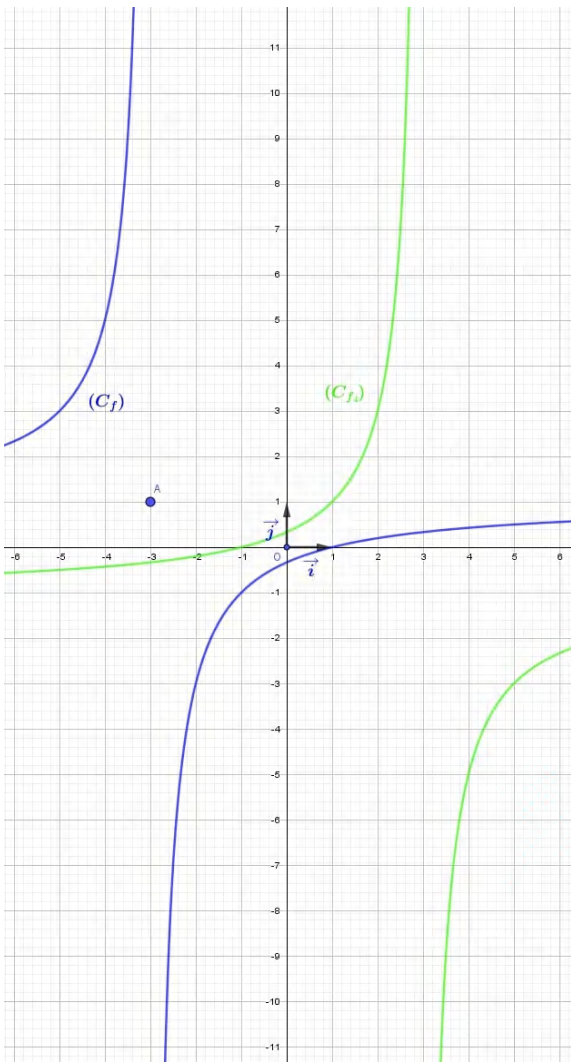
حامل محور الفواصل.



لدينا : $f_3(x) = f(-x)$

إذن : (C_{f_3}) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى

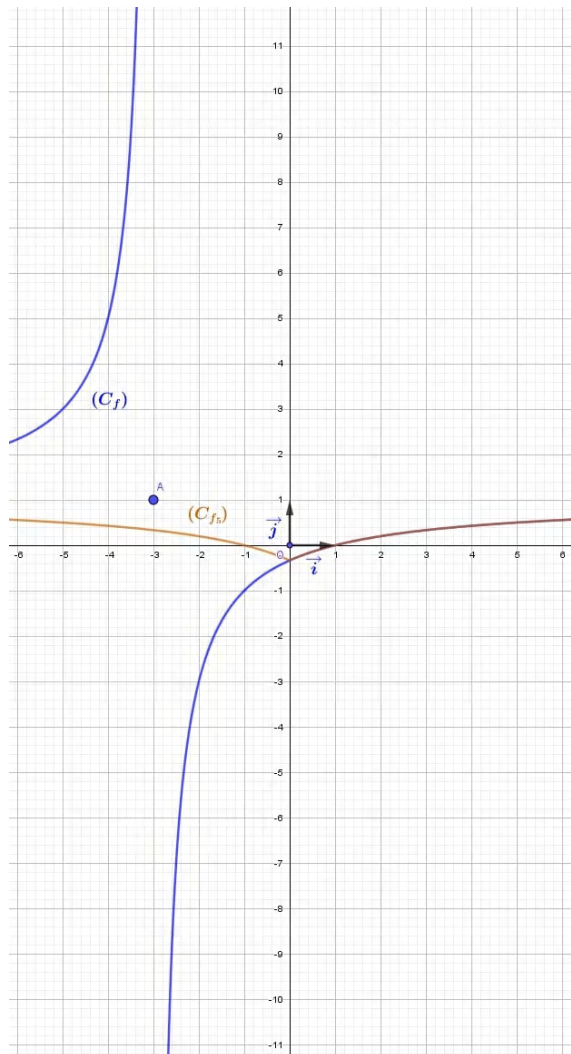
حامل محور الترتيب.



لدينا : $f_4(x) = -f(-x)$

إذن : (C_{f_4}) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى

مبدأ المعلم $O(0;0)$



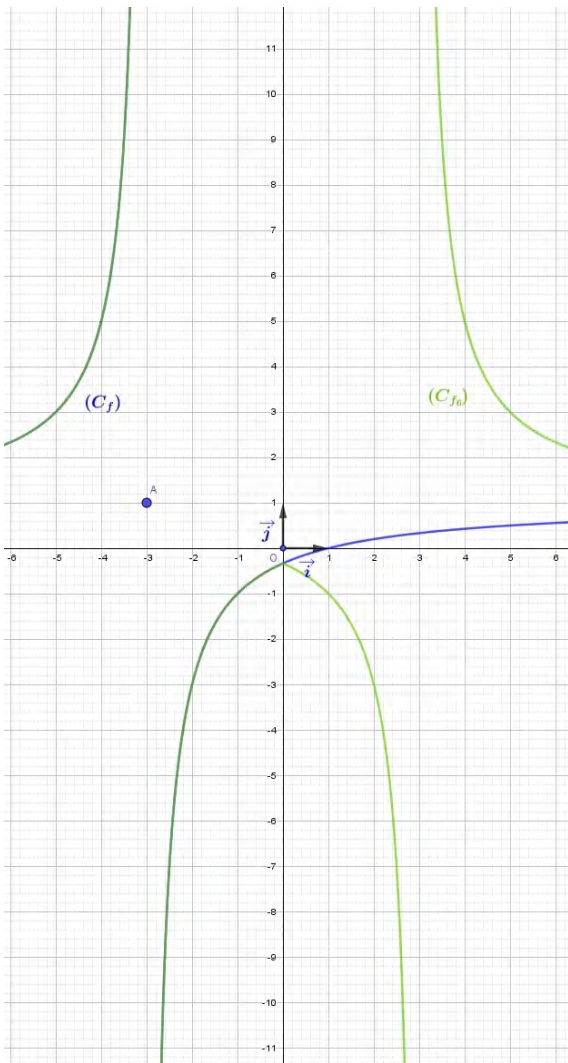
لدينا : $f_5(x) = f(|x|)$

إذن : $f_5(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}$

من أجل $x \geq 0$: (C_{f_5}) ينطبق على (C_f)

من أجل $x \leq 0$: (C_{f_5}) هو نظير الجزء المنطبق

على (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الترتيب.



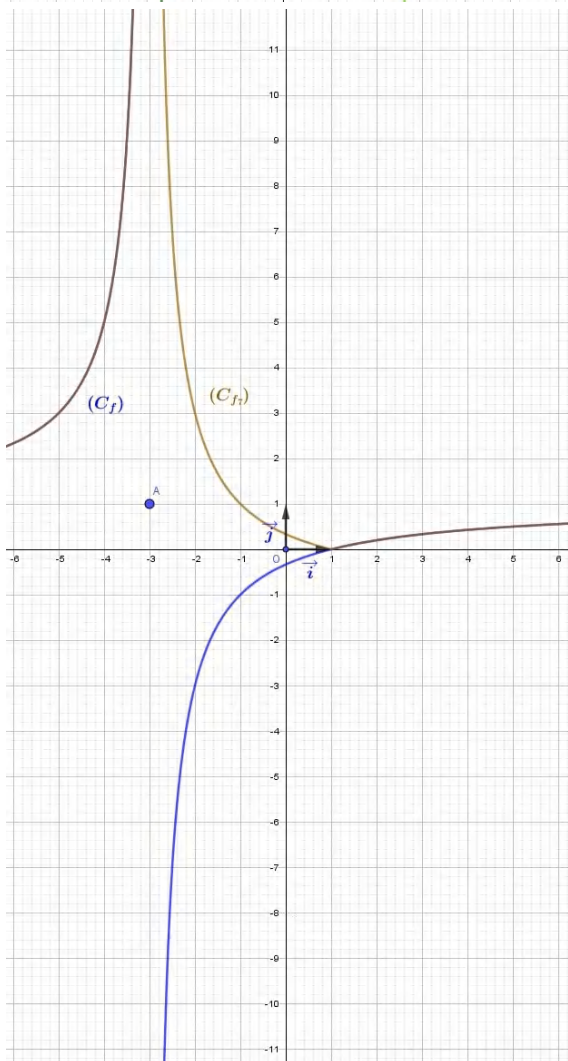
لدينا : $f_6(x) = f(-|x|)$

إذن :
$$f_6(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \leq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

من أجل $x \leq 0$: (C_{f_6}) ينطبق على (C_f)

من أجل $x \geq 0$: (C_{f_6}) هو نظير الجزء المنطبق

على (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الترتيب.



لدينا : $f_7(x) = |f(x)|$

إذن :
$$f_7(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad (x < -3) \vee (x \geq 1) \\ -f(x) & ; \quad -3 < x \leq 1 \end{cases}$$

من أجل $(x \leq -3) \vee (x \geq 1)$:

(C_{f_7}) ينطبق على (C_f)

من أجل $-3 < x \leq 1$:

(C_{f_7}) هو نظير الجزء المنطبق على (C_f) بالنسبة

إلى حامل محور الفواصل.