



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمارين مع الحل في المتتاليات العددية

2

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 05

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} \end{cases}$$

و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1 بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

2

1 اكتب عبارة v_n بدلالة n .

2 اكتب عبارة u_n بدلالة n .

3 احسب نهاية المتتالية (u_n)

3

1 عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

2 تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

3 استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$

① تبين أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{\left(\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1\right)}{\left(\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{2u_n + 2 - u_n - 3}{u_n + 3}\right)}{\left(\frac{2u_n + 2 + 2u_n + 6}{u_n + 3}\right)} \\ &= \frac{u_n - 1}{4u_n + 8} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) \\ &= \frac{1}{4} v_n \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$$

②

① كتابة عبارة v_n بدلالة n :

لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $-\frac{1}{2}$ فهي تكتب على الشكل:

$$v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

② كتابة عبارة u_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow v_n(u_n + 2) - (u_n - 1) = 0 \\ &\Rightarrow v_n u_n + 2v_n - u_n + 1 = 0 \\ &\Rightarrow u_n(v_n - 1) + 2v_n + 1 = 0 \\ &\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n \\ &\Rightarrow u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n} \right]$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = 1}$$

3

① التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{S_n = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 \right)}$$

② التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow v_n = \frac{u_n - 1 + 2 - 2}{u_n + 2}$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 2} + \frac{-3}{u_n + 2}$$

$$\Rightarrow v_n = 1 - \frac{3}{u_n + 2}$$

$$\Rightarrow v_n - 1 = -\frac{3}{u_n + 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}(1 - v_n) = \frac{1}{u_n + 2}}$$

③ استنتاج بدلالة n المجموع S'_n :

$$\begin{aligned} S'_n &= \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} \\ &= \frac{1}{3}(1 - v_0) + \frac{1}{3}(1 - v_1) + \dots + \frac{1}{3}(1 - v_n) \\ &= \frac{1}{3}(1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_n) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 \times (n + 1) - \underbrace{(v_0 + v_1 + \dots + v_n)}_{S_n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left((n + 1) - \frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S'_n = \frac{1}{3} \left(n + 1 + \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) \right)}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶