

سلسلة البناء والتكوين: 2020/2019

كراسة الدوال اللوغرتمية

تطبيقات متنوعة ونماذج شاملة

موجهة لطلاب البكالوريا، رياضيات، ت ر

إعداد الأستاذ: جرادى سلطان

كراسة الدوال اللوغرتمية الصفحة (1) الأستاذ: جرادى سلطان (الثالثة + ر + ت ر)	سلاسل البناء والتكوين : ج سح - العام الدراسي : 2019/2020
1. ادرس نهاية الدالة f عند 0 ، فسر النتيجة هندسيا . 2. شكل جدول تغيرات الدالة f . 3. عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 1. التمرين الخامس: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 2(\ln x)^2 - \ln x - 3$ هو (C) التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2cm$) 1) أ) حل المعادلة $f(x) = 0$ ب) ماذا تمثل هذه الطول هندسياً؟ 2) احسب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟ 3) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها . 4) أنشئ للمنحني (C) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. التمرين السادس: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ كما يلي : 1. عين إشارة $f(x)$ على $]1; +\infty[$. 2. ادرس نهايتي الدالة f عند 1 و $+\infty$. 3. استنتج نهايتي الدالة g حيث $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$ عند 1 و $+\infty$. التمرين السابع: لتكن الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 1 + 2[\ln x - \ln(x-1)]$ نسمي (C) إلى التمثيل البياني لدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . الوحدة $1cm$ 1 بين أنه من أجل كل $x \in]1; +\infty[$: $f(x) = x + 1 + 2 \ln \frac{x}{x-1}$ 2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف . 3. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها . 4. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$. استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً Δ يطلب تعيين معادلة له . ا درس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم Δ . 5. ارسم بعناية المنحني (C) .	التمرين الأول: أوجد النهايات التالية: أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln x$ ؛ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln x$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2 \ln x$ ؛ د) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 5 - \ln x$ أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \ln x}$ ؛ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)}$ جـ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x) \ln x$ ؛ د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) \ln(-x)$ أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$ ؛ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x)$ جـ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 4 + \ln x$ ؛ د) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 4 + \ln x$ أ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3(\ln x)^2 - \ln x)$ ؛ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - (\ln x)^2)$ جـ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2 \ln x}{x}$ ؛ د) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + \ln x - 1$ التمرين الثاني: f دالة معرفة على $]e; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ 1) بين أنه من أجل كل $x > e$: $f(x) = \frac{\frac{1}{\ln x} + 1}{\frac{1}{1 - \ln x} - 1}$ 2) عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 3) ادرس تغيرات الدالة f التمرين الثالث: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x^2 - 1 + 2 \ln x$ 1) احسب نهايتي f عند طرفي مجال تعريفها 2) ادرس اتجاه تغير الدالة f باستعمال قوانين الجمع لدوال مرجعية ثم باستعمال إشارة المشتقة 3) عين معادلة المماس للمنحني الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1. التمرين الرابع: لتكن الدالة f المعرفة على $]0; 2[$ بـ : $f(x) = 2x^2 - 3 - \ln x$ (C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\ \vec{i}\ = 5cm$ و $\ \vec{j}\ = 2cm$

التمرين الثامن:

نعلم أن المنحني C_f الممثل لدالة f معرفة على $]-2; +\infty[$ يشمل النقط $O(0;0)$ و $A(-1;0)$ ، وأن المماس لـ C_f عند O معامل توجيهه $\ln 2$ و المماس لـ C_f عند A معادلته $y = x + 1$.

1. باستعمال هذه المعطيات، عين $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f(-1)$ و $f'(-1)$.

ب- عين معادلة المماس لـ C_f عند O .

2. علما أنه يوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x > -2$ ، $f(x) = (ax^2 + bx + c) \ln(x+2)$.

أ- عبر عن $f(0)$ بدلالة a ، b و c .

ب- عبر عن $f'(x)$ بدلالة a ، b و c .

ج- استنتج $f'(0)$ و $f'(-1)$ بدلالة a ، b و c .

د- استنتج a ، b و c .

التمرين التاسع:

الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$.

حلا وحيدا α . تحقق أن $1 < \alpha < 2$.

4. عين حصرا للعدد α سعته $0,01$.

5. ليكن (Δ) مماس المنحني (C) عند النقطة التي

فاصلتها 1.

أ- عين معادلة للمماس (Δ) و أكتبها على الشكل: $y = ax + b$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ

$$g(x) = f(x) - (ax + b)$$

ج- استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المماس (Δ) .

6. ارسم المماس (Δ) و المنحني (C) .

التمرين العاشر:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty; 1[$ كما يلي:

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها (لا

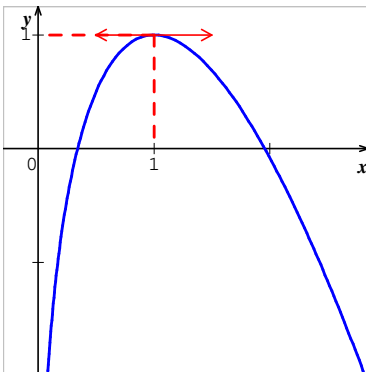
يطلب حساب النهايات).

ب- استنتج إشارة $g(x)$ و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي

: x

كراسة الدوال اللوغرتمية الصفحة (3)	سلاسل البناء والتكوين: ج-سح-
الأستاذ: جرادى سلطان (الثالثة عت + ر + ت ر)	العام الدراسي: 2019/2020
ب- شكل جدول تغيرات f ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $\frac{7}{4} < \alpha < 2$ 3. ا- تحقق أن المماس Δ للمنحنى C عند النقطة O معادله له: $y = x$ ب- ادرس وضعية C بالنسبة لـ Δ. ج- ارسم Δ و C. <u>التمرين الخامس عشر:</u> <u>أولا:</u> نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln x$ 1 ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0, +\infty[$. 2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α وأن: $0,86 < \alpha < 0,87$. 3 استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$. <u>ثانيا:</u> نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ ب: $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$ المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$. 1 احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$. 2 ا- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$. ب ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ). 3 اثبت ان إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$. 4 استنتج جدول تغيرات الدالة f. 5 ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).	<u>التمرين الثالث عشر:</u> نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بالشكل: $f(x) = \ln(e^{-x} + x^2)$ بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 1 أوجد: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 2 أ) علما أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ ، بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$. ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty, 0]$ فإن: $f(x) = -x + \ln(1 + x^2 e^x)$ 3 أوجد: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ واستنتج معادلة للمقارب المائل (Δ) للمنحنى (C). 4 ادرس وضعية المنحنى (C) مع المستقيم (Δ). 5 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty, 0]$ فإن عبارة f' مشتقة الدالة f تعطى $f'(x) = \frac{2x e^x - 1}{x^2 e^x + 1}$ بالبعبارة: 6 بين أن الدالة f متناقصة تماما وضع جدول تغيراتها 7 أرسم (C) (يمكنك ملاحظة معامل توجيه المماس عند المبدأ) 8 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^{2m+x} - x^2 e^x = 1$ <u>التمرين الرابع عشر:</u> 1 لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = -1 + x + 2 \ln x$ أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g. ب- احسب $g(1)$ ثم عين إشارة على $]0; +\infty[$. ج- استنتج أن: إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ وإذا كان $x > 1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ 2. نعتبر الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = x - x^2 \ln x$ إذا كان $x > 0$ و $f(0) = 0$ نرسم C على المنحنى الممثل للدالة f متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الأطوال $2cm$. أ- احسب $f'(x)$ و تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $f'(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$

كراسة الدوال اللوغرتمية الصفحة (4) الأستاذ: جرادى سلطان (الثالثة + ر + ت ر)	سلاسل البناء والتكوين: ج-سح- العام الدراسي: 2019/2020
1) من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : 2) الدالة : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$ متزايدة على المجال $]1, +\infty[$. 3) إذا كان العدد الحقيقي α الموجب تماما هو حل للمعادلة: $x + \ln x = 0$ فإن: $e^{-\alpha} = \alpha$. 4) الدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ متزايدة تماما على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما 5) نهاية الدالة : $x \mapsto \frac{\ln x - xe}{x^2}$ عند $+\infty$ هي: $-\infty$. 6) الدالة : $x \mapsto \ln(x+3)^2$ متزايدة على المجال $]-\infty; -3[$. 7) الدالة: $x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ نهايتها عند $+\infty$ هي 1 التمرين التاسع عشر: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x^3}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{i}, \vec{j}; O)$ ، (وحدة الطول 3cm) أ) احسب نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$ 2) أ-بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته: $y = 3 - x$ ب-ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) 3) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $g(x) = -x^4 + 1 - 3 \ln x$ أ- حدد اتجاه تغير الدالة g ب-شكل جدول تغيرات الدالة g ج-احسب ($g(1)$) واستنتج إشارة $g(x)$ 4) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^4}$ ب) 1 بين أن $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,5; 0,6[$ حلا وحيدا α 2 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]3, 1[$ حلا وحيدا β 3) أنشئ بدقة (C_f) و (D)	التمرين السادس عشر: f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$ (C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{i}, \vec{j}; O)$ حيث وحدة الطول 1 cm. 1) أدرس تغيرات الدالة f (يطلب حساب النهايات والمستقيمات المقاربة) ب) أثبت أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما. ج) احسب $f(-x) + f(x)$. ماذا تستنتج؟ 2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا حيث .: $\alpha \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ 3) أثبت أن (C) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0,1)$ ويمس (C) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما. ب) أوجد معادلة للمماس (T). ج) أرسم (T) ثم (C). د) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$ 4) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{ x }$ (γ) تمثيلها البياني في المعلم المستوي السابق. أ) بين أن h دالة زوجية. ب) دون دراسة تغيرات h شكل جدول تغيراتها مع التعليل. أرسم (γ). التمرين السابع عشر: الدالة f معرفة على $]0; e[\cup]e; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ 1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها مستنتجا معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنىها البياني 2) أدرس اتجاه تغير الدالة f. ثم ضع جدول تغيرات f 3) أرسم المنحنى (C) التمرين الثامن عشر: أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل عما يلي:

كراسة الدوال اللوغرتمية الصفحة (4) الأستاذ: جرادى سلطان (الثالثة ت + ر + ت ر)	سلاسل البناء والتكوين: ج سح - العام الدراسي: 2019/2020
4. استنتج إشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$. الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$ و ليكن C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس. 1. أ. احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. فسر النتيجة هندسياً. ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 2. أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$. ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f. 3. ليكن Δ المماس للمنحني C_f في النقطة $A(1; 1)$. أ. عين معادلة ديكارتية للمستقيم Δ. ب. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$ ج. ادرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضعية النسبية للمنحني C_f والمستقيم Δ. 4. أنشئ Δ و C_f. (نقل أن C_f يقبل نقطة انعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و 1,5). التمرين الثاني والعشرون: لكل سؤال عين الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة المقترحة. لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + 2 \frac{\ln x}{x}$ 1. إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$. 2. على $]0; +\infty[$ إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(x-1)$. 3. على $]0; +\infty[$ الدالة g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3. 4. f متناقصة تماماً على المجال $]0; +\infty[$. 5. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً واحداً في المجال $[1; 2]$. 6. منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً عند $+\infty$.	التمرين العشرون: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = ax + (bx + c) \ln x$ حيث a, b, c أعداد حقيقية و (C) هو المنحني الممثل للدالة f 1. باستعمال المنحني (C) وعلماً أن $f(2) = 2 - 3 \ln 2$ بين أن $a = c = 1$ و $b = -2$. 2. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x + (1 - 2x) \ln x$ أ- عين نهاية g عند 0. ب- عين نهاية g عند $+\infty$. 2. أ- عين الدالة المشتقة للدالة g. ب- ادر على $]0; +\infty[$ إشارة $-2 \ln x$ و إشارة $\frac{1-x}{x}$، ثم استنتج إشارة $g'(x)$ و تغيرات g. ج- شكل جدول تغيرات g.  3. ليكن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(1 - 2x) \ln x = 0$ وأعط تفسيراً بيانياً لهذه الحلول. ب- استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم Δ. التمرين الواحد والعشرون: الجزء الأول: نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x + (x - 2) \ln x \quad \text{و} \quad g(x) = x - 1 - \ln x$ 1. احسب $g'(x)$ من أجل x من المجال $]0; +\infty[$ ثم ادرس تغيرات g. 2. أ. استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]0; +\infty[$. ب. بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$, $h(x) = 1 + g(x) + (x - 1) \ln x$ 3. بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$, $(x - 1) \ln x \geq 0$