

الرياضيات في الثانوية

10 نمازين نموذجية في محور

المرجح في المسنوي



للسنة الثانية ثانوي

كتابة الإسناد :

حناش نبيل

Avril 2022

I- ABC مثلث من المستوي . I و J نقطتان حيث : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $6\overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{CJ} = \vec{0}$.

(1) أنشئ النقطتين I و J ، ثم بين أن I مرجح للنقطتين A و B بمعاملين يطلب تعيينهما .

(2) G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;3), (C;-1)\}$.

✓ بين أن G نقطة تلاقي المستقيمين (CI) و (AJ) .

✓ أنشئ النقطة G .

✓ بين أن الشعاع $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M ؛

ثم بين أن : $\vec{v} = 4\overrightarrow{CI}$.

✓ عين ثم أنشئ المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|6\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$

✓ عين ثم أنشئ المجموعة (Δ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}\|$$

II- لتكن G_k مرجح الجملة المثقلة $\{(A;k), (B;-k), (C;1)\}$ حيث k عدد حقيقي .

(1) هل النقطة G_k موجودة من أجل كل عدد حقيقي k ؟ علل .

(2) بين أن : $\overrightarrow{CG_k} = -k\overrightarrow{AB}$.

(3) عين ثم أنشئ مجموعة النقط G_k لما k يمسح $\mathbb{R}$.

(4) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(1;2)$ ، $B(0;-2)$ و $C(-1;3)$.

✓ عين بدلالة k إحداثيي النقطة G_k .

✓ عين قيمة k حتى تنتمي النقطة G_k إلى المستقيم (D) الذي $y = 3x$ معادلة له .

حل مقترح :

الجزء الأول :

1- لإنشاء النقطة I نستعمل المدور و بالإستعانة بمبرهنة طالس لتقسيم القطعة المستقيمة $[AB]$ إلى 4 أجزاء متقايسة .

و من العلاقة الشعاعية $6\overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{CJ} = \vec{0}$ فإن النقطة J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B;6), (C;-2)\}$ و باستعمال علاقة شال نجد

؛ إذن لإنشاء النقطة J نعين منتصف القطعة المستقيمة $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ منه $4\overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ أي $6\overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BJ} = \vec{0}$ و باستعمال المدور نأخذ 3 أجزاء متقايسة إنطلاقا من النقطة C .

• نبين أن I مرجح للنقطتين A و B بمعاملين يطلب تعيينهما :

لدينا $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ معناه $4\overrightarrow{AI} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ و بإدخال النقطة I بعلاقة شال نجد : $4\overrightarrow{AI} - 3\overrightarrow{AI} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ أي

$\overrightarrow{AI} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ و منه $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{BI} = \vec{0}$ ؛ إذن النقطة I هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و 3 على الترتيب

(2) G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;3), (C;-1)\}$.

✓ نبين أن G هي نقطة تلاقي المستقيمين (CI) و (AJ) :

من السؤال (1) نعلم أن النقطة I هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;3)\}$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي

مرجح الجملة المثقلة $\{(I;4), (C;-1)\}$ و بالتالي النقطة I ، C و G في استقامية ، و منه ينتج :

(1)..... $G \in (CI)$. و من جهة أخرى ؛ النقطة J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B;6), (C;-2)\}$ ، و نعلم أن ضرب

المعاملات في العدد الحففي غير المعدوم k لا يغير المرجح ، و بالتالي من أجل $k = \frac{1}{2}$ فإن النقطة J هي مرجح الجملة

المثقلة $\{(B;3), (C;-1)\}$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (J;2)\}$ و بالتالي

النقطة A ، J و G في استقامية ، و منه ينتج : (2)..... $G \in (AJ)$

من (1) و (2) لدينا $G \in (CI) \cap (AJ)$ ؛ و بالتالي G هي نقطة تلاقي المستقيمين (CI) و (AJ) .

✓ يمكن إنشاء النقطة G إنطلاقا من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ أو برسم المستقيمين (CI) و (AJ) و تعيين نقطة

تقاطعهما و هي النقطة G .

✓ إثبات أن الشعاع $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M و أن :

نعلم أن النقطة I هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;3)\}$ ، و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MI}$ ، و منه ينتج $\vec{v} = 4\overrightarrow{MI} - 4\overrightarrow{MC}$ أي $\vec{v} = 4(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MC})$ و منه $\vec{v} = 4(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MI})$ و منه

$\vec{v} = 4\overrightarrow{CI}$ و هو المطلوب . ($\vec{v}$ مستقل عن النقطة M)

طريقة -2- : باستعمال علاقة شال ندخل النقطة A مثلا فنجد :

معناه $\vec{v} = \vec{MA} + 3\vec{MA} + 3\vec{AB} - 4\vec{MA} - 4\vec{AC}$ معناه $\vec{v} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}$ معناه $\vec{v} = 3\vec{AB} + 4\vec{CA}$ و بإدخال النقطة I بعلاقة
 شال نجد $\vec{v} = 3\vec{AI} + 3\vec{IB} + 4\vec{CI} + 4\vec{IA}$ أي $\vec{v} = \vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{CI}$ لأن $3\vec{AI} + 4\vec{IA} = -3\vec{IA} + 4\vec{IA} = \vec{IA}$ ؛ لكن نعلم أن
 I هي مرجح الجملة $\{(A;1), (B;3)\}$ و بالتالي $\boxed{\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}}$ ؛ إذن $\vec{v} = 4\vec{CI}$ و هو المطلوب .

✓ تعيين ثم إنشاء المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|6\vec{MB} - 2\vec{MC}\|$$

بما أن النقطة I هي مرجح الجملة $\{(A;1), (B;3)\}$ فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي ينتج :

$$\boxed{\vec{MA} + 3\vec{MB} = 4\vec{MI}}$$
 ، و كذلك النقطة J هي مرجح الجملة $\{(B;6), (C;-2)\}$ و بالتالي من أجل كل

$$\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|6\vec{MB} - 2\vec{MC}\| \text{ ؛ إذن } \boxed{6\vec{MB} - 2\vec{MC} = 4\vec{MJ}}$$
 نقطة كيفية M من المستوي فإن

$$\text{تكافئ } \boxed{4\vec{MI} = 4\vec{MJ}} \text{ معناه } \|\vec{MI}\| = \|\vec{MJ}\| \text{ أي } \boxed{MI = MJ} .$$

إذن مجموعة النقط (Γ) هي **المستقيم المحوري** للقطعة $[IJ]$.

✓ تعيين ثم إنشاء المجموعة (Δ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\vec{MA} + 3\vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 3\vec{MB} - 4\vec{MC}\|$$

بما أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;3), (C;-1)\}$ فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من

$$\text{المستوي فإن } \boxed{\vec{MA} + 3\vec{MB} - \vec{MC} = 3\vec{MG}} \text{ ، و لاحظ أن } \boxed{\vec{MA} + 3\vec{MB} - 4\vec{MC} = \vec{v} = 4\vec{CI}}$$

$$\text{إذن } \|\vec{MA} + 3\vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 3\vec{MB} - 4\vec{MC}\| \text{ تكافئ } \|\vec{3MG}\| = \|\vec{4CI}\| \text{ معناه}$$

$$\boxed{MG = \frac{4}{3} CI} \text{ (المقدار } \frac{4}{3} CI \text{ ثابت) ؛ إذن مجموعة النقط } (\Delta) \text{ هي الدائرة التي مركزها النقط } G \text{ و نصف قطرها}$$

$$. r = \frac{4}{3} CI$$

الجزء الثاني :

(1) من أجل كل عدد حقيقي k لدينا : $k + (-k) + 1 = 1$ و $\boxed{1 \neq 0}$ ؛ إذن النقطة G_k موجودة من أجل كل $k \in \mathbb{R}$.

(2) إثبات أن : $\vec{CG_k} = -k\vec{AB}$.

G_k مرجح الجملة المثقلة $\{(A;k), (B;-k), (C;1)\}$ ؛ إذن نكتب $k\vec{G_kA} - k\vec{G_kB} + \vec{G_kC} = \vec{0}$ ، و باستعمال علاقة شال ندخل

النقطة B فنجد $k\vec{G_kB} + k\vec{BA} - k\vec{G_kB} + \vec{G_kC} = \vec{0}$ معناه $k\vec{BA} + \vec{G_kC} = \vec{0}$ أي $k\vec{BA} - \vec{CG_k} = \vec{0}$ و منه نجد $\vec{CG_k} = k\vec{BA}$ أي $\vec{CG_k} = -k\vec{AB}$ و هو المطلوب .

(3) تعيين ثم إنشاء مجموعة النقط G_k لما k يسمح $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $\vec{CG_k} = -k\vec{AB}$ ؛ إذن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{CG_k}$ مرتبطان خطياً ، و منه مجموعة النقط G_k لما k يسمح $\mathbb{R}$ هي المستقيم (E) الذي يشمل النقط C و $\vec{AB}$ شعاع نوجه له .

(4) أ- تعيين بدلالة k إحداثيي النقطة G_k :

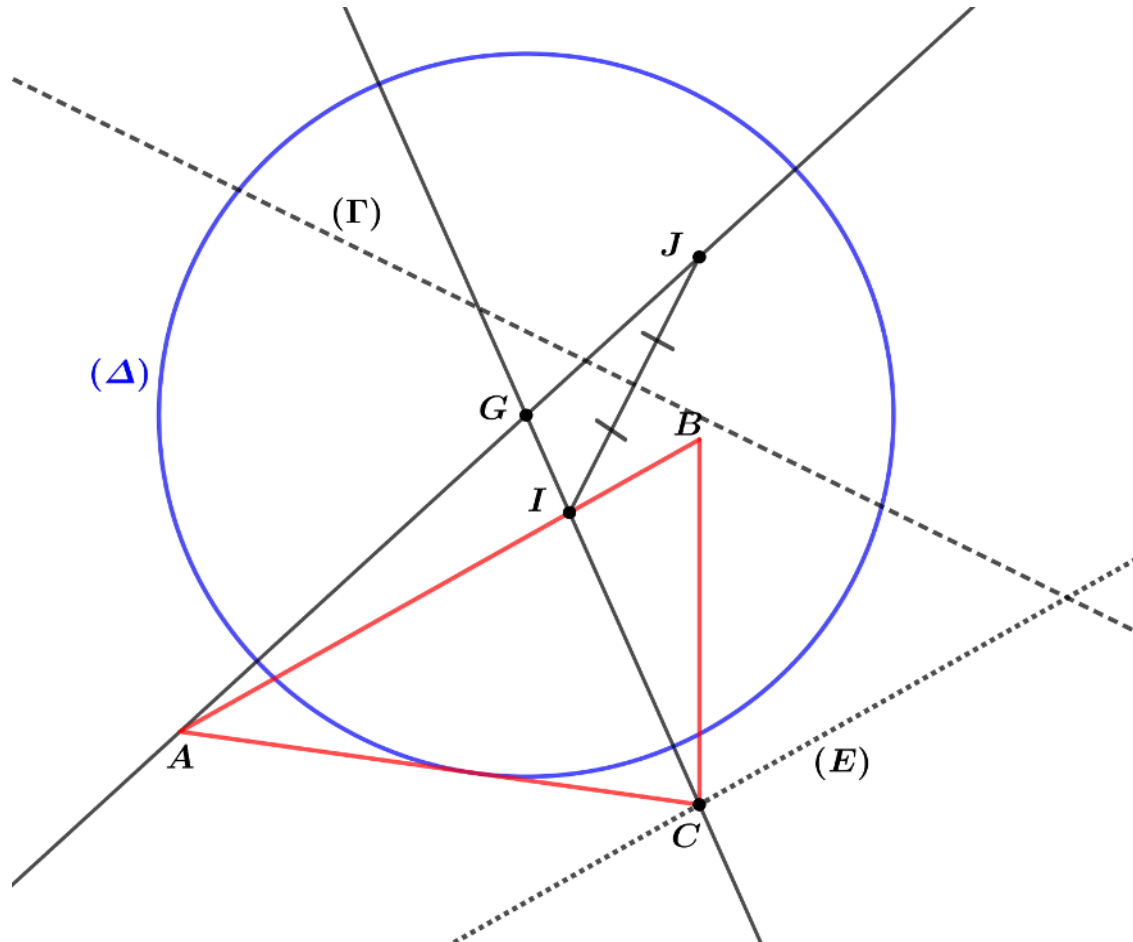
$$\begin{cases} x_{G_k} = k - 1 \\ y_{G_k} = 4k + 3 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_{G_k} = \frac{k(1) - k(0) + 1(-1)}{k + (-k) + 1} \\ y_{G_k} = \frac{k(2) - k(-2) + 1(3)}{k + (-k) + 1} \end{cases} \text{ من أجل كل } k \in \mathbb{R}$$

ب- تعيين قيمة العدد k حتى تنتمي النقطة G_k إلى المستقيم (D) الذي $y = 3x$ معادلة له :

$$G_k \in (D) \text{ إذا و فقط إذا كان } y_{G_k} = 3x_{G_k} \text{ ، معناه } 4k + 3 = 3(k - 1) :$$

$$4k + 3 = 3(k - 1) \text{ تكافئ } 4k + 3 = 3k - 3 \text{ و منه نجد } k = -6 .$$

نتيجة : $G_k \in (D)$ إذا و فقط إذا كان $k = -6$ و هي النقطة G_{-6} التي إحداثيها $(-7; -21)$.



I - ABC مثلث من المستوي .

K منتصف القطعة $[AB]$ ، I و J نقطتان من المستوي بحيث : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$

(1) أنشئ النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4), (B;4), (C;1)\}$.

(2) بين أن النقطة I مرجح الجملة $\{(B;4), (C;1)\}$ ثم أنشئ النقطة I .

(3) بين أن النقطة J مرجح الجملة $\{(A;4), (C;1)\}$ ثم أنشئ النقطة J .

(4) برهن أن المستقيمت (AI) ، (BJ) و (CK) تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيينها .

(5) عين ثم أنشئ (E_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$5\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 2\|4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

(6) بين أن الشعاع $\vec{v} = 4\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M ؛

ثم بين أن : $\vec{v} = 5\overrightarrow{BJ}$.

(7) عين ثم أنشئ (E_2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \leq \frac{9}{5}\|4\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

II - المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقط $A(-1,0)$ ، $B(2,-1)$ و $C(1,3)$ ؛ و لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة

$\{(A;\alpha), (B;\alpha+1), (C;\alpha^2)\}$ حيث α عدد حقيقي .

(1) عين قيم α التي من أجلها تكون G موجودة .

(2) عين إحداثيي النقطة G بدلالة α .

(3) هل توجد قيمة لـ α حتى تكون إحداثيا النقطة G هما $(7,1)$ ؟

حل مقترح :

(1) إنشاء النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4), (B;4), (C;1)\}$:

النقطة G موجودة و وحيدة لأن : $4+4+1=9$ و $9 \neq 0$.

لإنشاء النقطة G نعلم على العلاقة الشعاعية : $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$ (إستعمل المدور و بالإعتماد على مبرهنة طالس قم بتقسيم كل من القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ إلى 9 أجزاء متقايسة)

(2) إثبات أن النقطة I مرجح الجملة $\{(B;4),(C;1)\}$ ثم إنشاء النقطة I :

لدينا $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ معناه $5\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ ، و بإدخال النقطة I بعلاقة شال نجد $5\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ أي $4\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ و منه

$4\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ أي $4\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ و منه النقطة I هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B;4),(C;1)\}$.

و لإنشاء النقطة I نقسم باستعمال المدور و بالإستعانة بمبرهنة طالس القطعة $[BC]$ إلى 5 أجزاء متقايسة .

(3) إثبات أن النقطة J مرجح الجملة $\{(A;4),(C;1)\}$ ثم إنشاء النقطة J :

لدينا $\overrightarrow{CJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$ معناه $5\overrightarrow{CJ} - 4\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ ، و بإدخال النقطة J بعلاقة شال نجد $5\overrightarrow{CJ} - 4\overrightarrow{CJ} - 4\overrightarrow{JA} = \vec{0}$ أي $5\overrightarrow{CJ} - 4\overrightarrow{JA} = \vec{0}$ و منه

معناه $4\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ و بالتالي النقطة J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(C;1)\}$.

و لإنشاء النقطة J نقسم باستعمال المدور و بالإستعانة بمبرهنة طالس القطعة $[AC]$ إلى 5 أجزاء متقايسة .

(4) إثبات أن المستقيمت (AI) ، (BJ) و (CK) تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيينها :

لدينا النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(B;4),(C;1)\}$ ، لكن النقطة I مرجح الجملة $\{(B;4),(C;1)\}$ ؛

إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A;4),(I;5)\}$ ، و بالتالي النقط A ، I و G

في استقامية ، و منه ينتج : $G \in (AI) \dots\dots(1)$

من جهة أخرى ، النقطة J هي مرجح الجملة $\{(A;4),(C;1)\}$ ، إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي

مرجح للجملة المثقلة $\{(B;4),(J;5)\}$ ، و بالتالي النقط B ، J و G في استقامية ، و منه ينتج :

$G \in (BJ) \dots\dots(2)$ ، يبقى أن نبين أن $G \in (CK)$:

نعلم أن النقطة K هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ، إذن النقطة K هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(B;4)\}$

(المعاملات متساوية) ؛ إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي مرجح الجملة $\{(C;1),(K;8)\}$ ، و بالتالي النقط C ، G

و K في استقامية ، و منه ينتج : $G \in (CK) \dots\dots(3)$

من (1) ، (2) و (3) نستنتج أن المستقيمت (AI) ، (BJ) و (CK) تتقاطع في نقطة واحدة هي G .

(5) تعيين ثم إنشاء (E_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$5\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2\|4\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

بما أن K هي منتصف القطعة $[AB]$ فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي ، $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MK}$

و بما أن I هي مرجح الجملة $\{(B;4), (C;1)\}$ ، فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي $\vec{4MB} + \vec{MC} = 5\vec{MI}$ ؛ إذن

$$5\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2\|4\vec{MB} + \vec{MC}\| \text{ تكافئ } 5\|2\vec{MK}\| = 2\|5\vec{MI}\| \text{ معناه } \|\vec{MK}\| = \|\vec{MI}\| \text{ أي } \vec{MK} = \vec{MI} .$$

إذن مجموعة النقط (E_1) هي **المستقيم المحوري** للقطعة $[KI]$.

(6) إثبات أن الشعاع $\vec{v} = 4\vec{MA} - 5\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل عن النقطة M ؛

$$\text{ثم إثبات أن : } \vec{v} = 5\vec{BJ} .$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 4\vec{MA} - 5\vec{MA} - 5\vec{AB} + \vec{MA} + \vec{AC} \\ &= -5\vec{AB} + \vec{AC} \end{aligned}$$

طريف -1 : باستعمال علاقة شال ندخل النقطة A فنجد :

إذن الشعاع $\vec{v}$ هو شعاع ثابت و مستقل عن النقطة M .

طريف -2 : نعلم أن النقطة J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4), (C;1)\}$ ؛ إذن من أجل كل نقطة كيفية M من

$$\text{المستوي فإن } 4\vec{MA} + \vec{MC} = 5\vec{MJ} , \text{ و منه } \vec{v} = 5\vec{MJ} - 5\vec{MB} \text{ أي } \vec{v} = 5(\vec{BM} + \vec{MJ}) \text{ و منه}$$

$$\vec{v} = 5\vec{BJ} ; \text{ إذن الشعاع } \vec{v} \text{ هو شعاع ثابت و مستقل عن النقطة } M \text{ حيث } \vec{v} = 5\vec{BJ} .$$

(7) تعيين ثم إنشاء (E_2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|4\vec{MA} + 4\vec{MB} + \vec{MC}\| \leq \frac{9}{5}\|4\vec{MA} - 5\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

بما أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4), (B;4), (C;1)\}$ ، فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي ينتج :

$$4\vec{MA} + 4\vec{MB} + \vec{MC} = 9\vec{MG} , \text{ و من جهة أخرى لاحظ أن } 4\vec{MA} - 5\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{v} = 5\vec{BJ}$$

$$\text{إذن } \|4\vec{MA} + 4\vec{MB} + \vec{MC}\| \leq \frac{9}{5}\|4\vec{MA} - 5\vec{MB} + \vec{MC}\| \text{ تكافئ } \|9\vec{MG}\| \leq \frac{9}{5}\|5\vec{BJ}\| \text{ أي } \|\vec{MG}\| \leq \|\vec{BJ}\| \text{ (طويلة الشعاع } \vec{BJ} \text{)}$$

هي مقدار ثابت) أي $\vec{MG} \leq \vec{BJ}$ ؛ إذن مجموعة النقط (E_2) هي **الفرص المغلق** الذي مركزه النقطة G و نصف قطره $r = BJ$.

-II

(1) تعيين قيم α التي من أجلها تكون G موجودة :

يكون المرجح G موجودا و وحيدا إذا و فقط إذا كان $\alpha^2 + 2\alpha + 1 \neq 0$ ، معناه $\alpha + \alpha + 1 + \alpha^2 \neq 0$:

و هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي α : $\Delta = 0$ و بالتالي المعادلة $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ تقبل حلا مضاعفا في

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هو $\alpha = -\frac{2}{2(1)}$ أي $\alpha = -1$.

نتيجة : تكون النقطة G موجودة و وحيدة من أجل $\alpha \neq -1$ ؛ أي من أجل $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(2) تعيين إحداثيي النقطة G بدلالة α :

من أجل كل عدد حقيقي α يختلف عن -1 فإن :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\ y_G = \frac{3\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \end{array} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{-\alpha + 2\alpha + 2 + \alpha^2}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\ y_G = \frac{-\alpha - 1 + 3\alpha^2}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \end{array} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\alpha x_A + (\alpha + 1)x_B + \alpha^2 x_C}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + (\alpha + 1)y_B + \alpha^2 y_C}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \end{array} \right.$$

(3) إذا وجدت قيمة لـ α حيث إحداثيا النقطة G هما $(7,1)$ أي $(x_G; y_G) = (7;1)$ ، فإنه من السؤال السابق ينتج :

$$\left\{ \begin{array}{l} 6\alpha^2 + 13\alpha + 5 = 0 \\ 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \end{array} \right. \text{ معناه } \left\{ \begin{array}{l} 7\alpha^2 + 14\alpha + 7 = \alpha^2 + \alpha + 2 \\ 3\alpha^2 - \alpha - 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 \end{array} \right. \text{ معناه } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = 7 \\ \frac{3\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = 1 \end{array} \right.$$

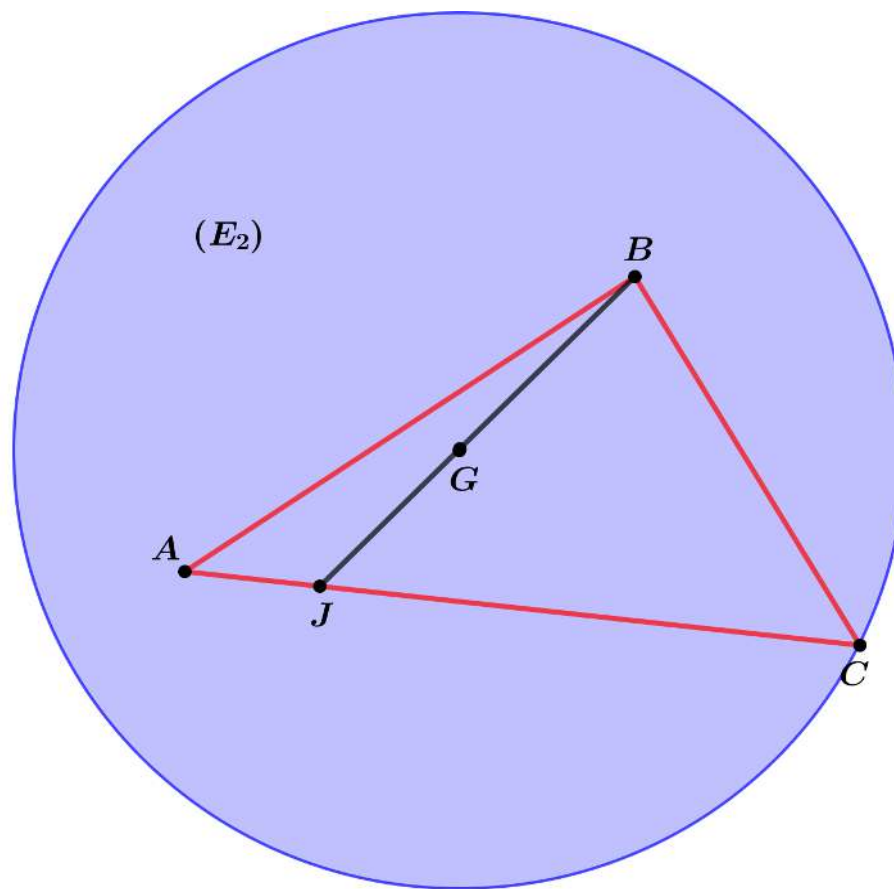
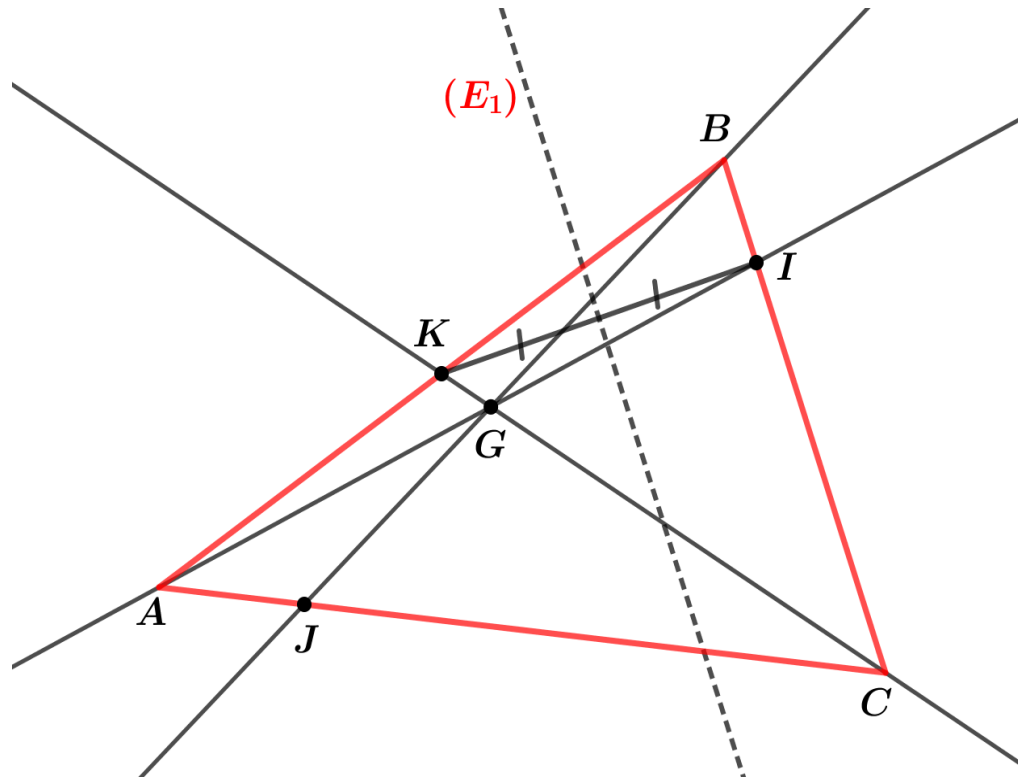
نحل المعادلة الأولى فنجد : $\alpha = -\frac{1}{2}$ أو $\alpha = -\frac{5}{3}$ (المميز $\Delta = 49$)

و نحل المعادلة الثانية فنجد : $\alpha = 2$ أو $\alpha = -\frac{1}{2}$ (المميز $\Delta = 25$)

إذن قيمته α (حيث $\alpha \neq -1$) التي تحقق المعادلتين في آن واحد هي : $\alpha = -\frac{1}{2}$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لـ α هي $-\frac{1}{2}$ حتى يكون إحداثيا النقطة G هما $(7;1)$.

الإنشاء الهندسي :



- ABC مثلث كفي . G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-2);(C,1)\}$.
 I منتصف القطعة $[AC]$ ، J منتصف القطعة $[BC]$.

1- أنشئ النقطة K مرجح الجملة $\{(A,3);(C,1)\}$ ، ثم أنشئ النقطة G .

2- أثبت أن النقط B ، K و G في استقامية .



3- بين أن G مرجح الجملة $\{(I,3);(J,-2)\}$.

4- استنتج أن المستقيمين (BK) و (IJ) يتقاطعان في النقطة G .

5- ما طبيعة الرباعي $ABIG$ ؟

• M نقطة كفية من المستوي .

6- أثبت أن الشعاع $\vec{v} = \vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل عن النقطة M ؛

ثم بين أن : $\vec{v} = 2\vec{BI}$.

7- عين ثم أنشئ (E_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

8- عين ثم أنشئ (E_2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|-2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\|$$

حل مقترح :

1- إنشاء النقطة K مرجح الجملة $\{(A,3);(C,1)\}$ ، ثم إنشاء النقطة G :

ننشئ النقطة K بالعلاقة : $\vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ ؛ وباستعمال خاصية التجميع فإن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B,-2);(K,4)\}$

و منه يمكن إنشاء النقطة G بالعلاقة : $\vec{BG} = 2\vec{BK}$

و يمكن إنشاء النقطة G بالعلاقة الشعاعية : $\vec{AG} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

2- إثبات أن النقط B ، K و G في استقامية :

من السؤال السابق نعلم من خاصية التجميع أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B,-2);(K,4)\}$ و منه $G \in (BK)$ ؛ إذن

النقط B ، K و G في استقامية .

3- نبين أن G مرجح الجملة $\{(I,3);(J,-2)\}$:

لدينا $3\vec{GA} - 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ و بإدخال النقطة I و النقطة J بعلاقة شال نجد :

$$\boxed{3\vec{IA} - 2\vec{JB} + \vec{GI} + \vec{IC} = \vec{0}} \quad \text{، إذن يكفي أن نبين أن : } (3\vec{GI} - 2\vec{GJ}) + 3\vec{IA} - 2\vec{JB} + \vec{GI} + \vec{IC} = \vec{0}$$

$$\text{بما أن } \vec{IA} + \vec{IC} = \vec{0} \text{ فإن } 3\vec{IA} - 2\vec{JB} + \vec{GI} + \vec{IC} = 2\vec{IA} - 2\vec{JB} + \vec{GI} \text{ و منه } 3\vec{IA} - 2\vec{JB} + \vec{GI} + \vec{IC} = \vec{CA} + \vec{BC} + \vec{GI}$$

$$\text{و منه } 3\vec{IA} - 2\vec{JB} + \vec{GI} + \vec{IC} = \vec{BA} + \vec{GI} \text{ و بعلاقة شال ينتج } 3\vec{IA} - 2\vec{JB} + \vec{GI} + \vec{IC} = \vec{BA} + \frac{1}{2}(\vec{GA} + \vec{GC})$$

$$\boxed{\vec{AG} = \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}} \text{ و منه نجد : } 3\vec{IA} - 2\vec{JB} + \vec{GI} + \vec{IC} = \vec{BA} + \vec{GA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{BA} + \vec{GA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{0} \text{ ؛ إذن : } \boxed{3\vec{IA} - 2\vec{JB} + \vec{GI} + \vec{IC} = \vec{0}} \text{ و منه ينتج :}$$

$$\boxed{3\vec{GI} - 2\vec{GJ} = \vec{0}} \text{ معناه أن النقطة } G \text{ هي مرجح الجملة المثقلة } \{(I,3);(J,-2)\}.$$

$$4- \text{استنتاج أن المستقيمين } (BK) \text{ و } (IJ) \text{ يتقاطعان في النقطة } G : \text{ النقطة } G \text{ هي مرجح الجملة المثقلة } \{(B,-2);(K,4)\} \text{ و}$$

$$\text{منه ينتج } \boxed{G \in (BK)} \text{ ؛ و كذلك النقطة } G \text{ هي مرجح الجملة المثقلة } \{(I,3);(J,-2)\} \text{ و منه ينتج } \boxed{G \in (IJ)} \text{ ؛ إذن نستنتج أن :}$$

$$(BK) \cap (IJ) = \{G\}.$$

$$5- \text{طبيعة الرباعي } ABIG : \text{ هو متوازي أضلاع لأن قطريه متناصفان ... التعليل : لدينا } \vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AC} \text{ حيث } \vec{AC} = 2\vec{AI} \text{ و}$$

$$\text{منه } \vec{AK} = \frac{1}{4}(2\vec{AI}) \text{ أي } \boxed{\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AI}} \text{ و منه فالنقطة } K \text{ هي منتصف القطعة } [AI] \text{ ... (1) ؛ و من العلاقة الشعاعية}$$

$$\boxed{\vec{BG} = 2\vec{BK}} \text{ نستنتج أن النقطة } K \text{ هي منتصف القطعة } [BG] \text{ ... (2) ؛ إذن من (1) و (2) فإن القطرين } [AI] \text{ و } [BG] \text{ متناصفان و منه نستنتج أن الرباعي } ABIG \text{ متوازي أضلاع .}$$

$$6- \text{إثبات أن الشعاع } \vec{v} = \vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} \text{ مستقل عن النقطة } M :$$

$$\text{باستعمال علاقة شال ندخل النقطة } B \text{ مثلا فنجد : } \vec{v} = \vec{MB} + \vec{BA} - 2\vec{MB} + \vec{MB} + \vec{BC} \text{ أي } \boxed{\vec{v} = \vec{BA} + \vec{BC}} \text{ و هو مستقل عن}$$

$$\text{النقطة } M.$$

$$\text{نبين أن } \vec{v} = 2\vec{BI} : \text{ باستعمال علاقة شال ندخل النقطة } I \text{ في المساواة السابقة فنجد } \vec{v} = \vec{BI} + \vec{IA} + \vec{BI} + \vec{IC}$$

$$\text{أي } \vec{v} = 2\vec{BI} + \vec{IA} + \vec{IC} \text{ ؛ لكن } \boxed{\vec{IA} + \vec{IC} = \vec{0}} \text{ لأن النقطة } I \text{ هي منتصف القطعة } [AC] \text{ و منه نجد :}$$

$$\boxed{\vec{v} = 2\vec{BI}} \text{ و هو المطلوب .}$$

$$7- \text{تعيين ثم إنشاء } (E_1) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوى التي تحقق :}$$

$$\text{بما أن } G \text{ هي مرجح الجملة } \{(A,3);(B,-2);(C,1)\} \text{ فإنه من أجل كل}$$

$$\text{نقطة } M \text{ كيفية من المستوى فإن } 3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MG} \text{ و لاحظ أن } \vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{v} = 2\vec{BI} \text{ ؛ إذن}$$

$$\|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| \text{ تكافئ } \|2\vec{MG}\| = \|2\vec{BI}\| \text{ معناه } \boxed{MG = BI} \text{ (مقدار ثابت) .}$$

إذن مجموعة النقط (E_1) هي الدائرة التي مركزها النقطة G و $r = BI$ نصف قطر لها .

8- تعيين ثم إنشاء (E_2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

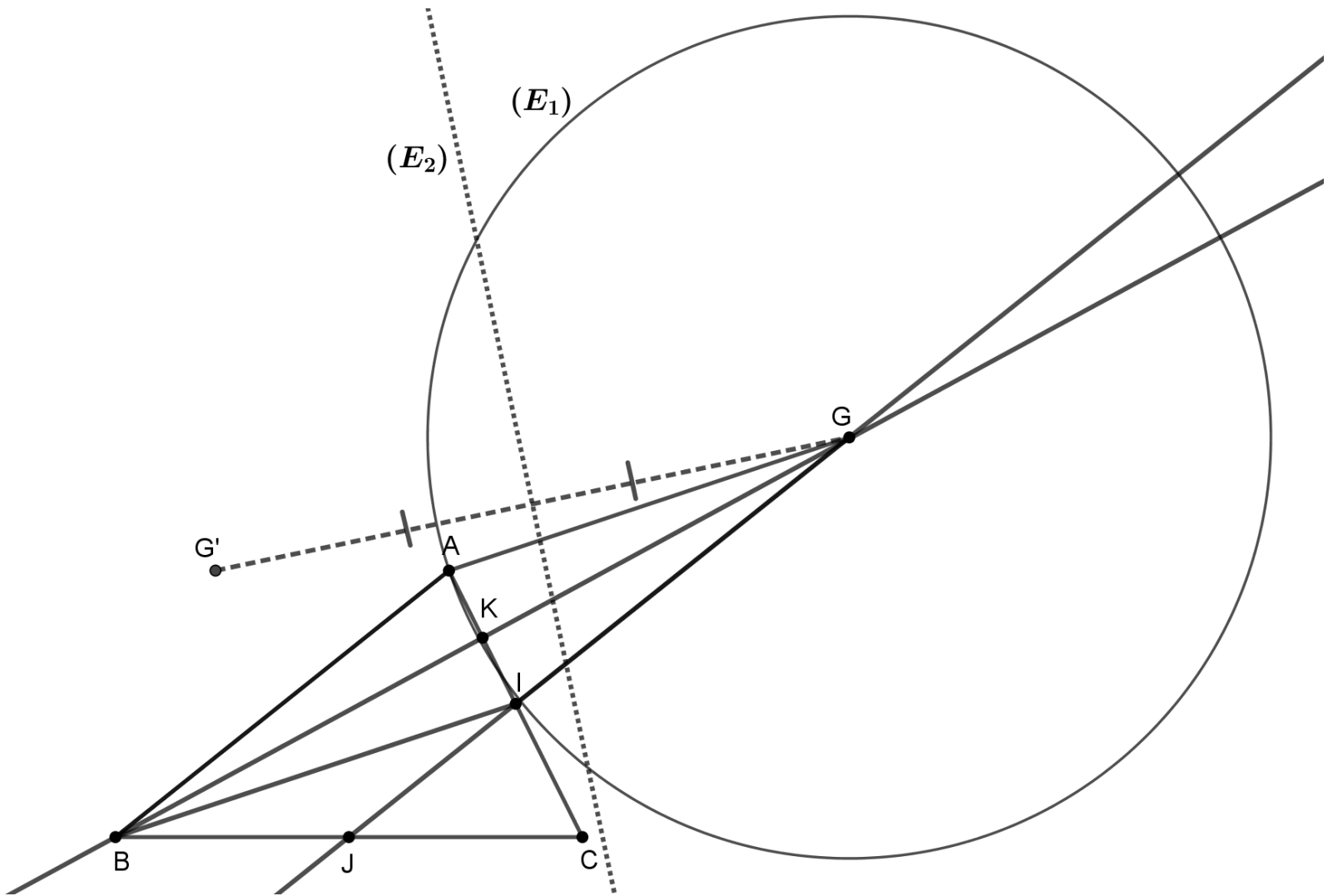
$$\|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|-2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\|$$

لتكن النقطة G' مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -2); (B, -1); (C, 1)\}$ و منه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$$\|2\vec{MG}\| = \|-2\vec{MG}'\| \text{ تكافئ } \|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|-2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| \text{ إذن } -2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = -2\vec{MG}'$$

معناه $\boxed{MG = MG'}$.

إذن مجموعة النقط (E_2) هي المستقيم المحوري للقطعة $[GG']$.



ليكن $ABCD$ مربعا مركزه O و G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}$.

(1) أنشئ I مرجح الجملة $\{(A,1);(C,3)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B,2);(D,6)\}$.

(2) بين أن G هي مرجح للنقطتين I و J بمعاملين يطلب تعيينهما ثم أنشئ G .

(3) لتكن (Δ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 6\overrightarrow{MD}\| = 12(k+1)^2$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

أ- عبر عن الشعاع $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 6\overrightarrow{MD}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$.

ب- عين قيم k حتى تكون (Δ) دائرة نصف قطرها 1 يطلب تعيين مركزها.

(4) لتكن M نقطة من المستوي. عين ثم أنشئ المجموعة (E) للنقط M التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 6\overrightarrow{MD}\| = 6\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$$

(5) المستوي منسوب إلى المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

✓ جد إحداثيي النقطة G في هذا المعلم.

✓ جد إحداثيي G' مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,6);(C,1);(D,2)\}$.

✓ استنتج أن النقط O ، G و G' في استقامية.

حل مقترح :

(1) I مرجح الجملة $\{(A,1);(C,3)\}$ و منه $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ و J مرجح الجملة $\{(B,2);(D,6)\}$ و منه $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$.

(2) إثبات أن G هي مرجح للنقطتين I و J بمعاملين يطلب تعيينهما ثم إنشاء G :

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}$ ، و بما أن I هي مرجح الجملة $\{(A,1);(C,3)\}$ و منه حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(I,4);(B,2);(D,6)\}$ ، و بما أن J هي مرجح الجملة $\{(B,2);(D,6)\}$ فإنه حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(I,4);(J,8)\}$.

نعلم أن ضرب المعاملات في نفس العدد الحففي الغير المعدوم k لا يغير المرجح، إذن من أجل $k = \frac{1}{4}$ فإن G هي

مرجح الجملة $\{(I,1);(J,2)\}$.

و لإنشاء النقطة G نكتب العلاقة الشعاعية : $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

(3) أ- التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 6\overrightarrow{MD}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$:

G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}$ ؛ إذن من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 6\overrightarrow{MD} = 12\overrightarrow{MG}$$

ب- تعيين قيم k حتى تكون (Δ) دائرة نصف قطرها 1 يطلب تعيين مركزها :

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 6\overrightarrow{MD}\| = 12(k+1)^2 \text{ معناه } \|12\overrightarrow{MG}\| = 12(k+1)^2 \text{ أي } \boxed{MG = (k+1)^2}$$

$$(\Delta) \text{ دائرة نصف قطرها 1 معناه } \boxed{(k+1)^2 = 1} \text{ و منه } k+1 = -1 \text{ أو } k+1 = 1 \text{ معناه } \boxed{k = -2} \text{ أو } \boxed{k = 0}.$$

إذن من أجل $k \in \{-2, 0\}$ فإن (Δ) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

(4) تعيين ثم إنشاء المجموعة (E) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 6\overrightarrow{MD}\| = 6\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$$

النقطة I هي مرجح الجملة $\{(A,1);(C,1)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

$$\text{إذن } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 6\overrightarrow{MD}\| = 6\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| \text{ معناه } \|12\overrightarrow{MG}\| = 6\|2\overrightarrow{MI}\| \text{ و منه } \boxed{MG = MI} \text{ ؛ و بالتالي مجموعة}$$

النقط (E) هي **المستقيم المكون** للقطعة $[GI]$.

(5) المستوي منسوب إلى المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

✓ إيجاد إحداثيي النقطة G في هذا المعلم :

لإيجاد إحداثيي G في المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ نكتب الشعاع $\overrightarrow{AG}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ أي نعين عددين α و β حيث

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD}}$$

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}$ و منه نكتب العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{CG} + 6\overrightarrow{DG} = \vec{0}$

$$\text{و بإدخال } A \text{ بعلاقة شال نجد } \overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG} + 6\overrightarrow{DA} + 6\overrightarrow{AG} = \vec{0}$$

$$12\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{DA} = \vec{0} \text{ و منه } 12\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

$$12\overrightarrow{AG} + 5\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CB} + 6\overrightarrow{DA} = \vec{0} \text{ ، و بما أن الرباعي } ABCD \text{ مربع فإن } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \text{ و منه ينتج :}$$

$$12\overrightarrow{AG} + 5\overrightarrow{BA} + 9\overrightarrow{DA} = \vec{0} \text{ معناه } 12\overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AD} \text{ و منه } \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}} \text{ ؛ إذن } \alpha = \frac{5}{12} \text{ و } \beta = \frac{3}{4}$$

$$\text{و منه } \boxed{G\left(\frac{5}{12}; \frac{3}{4}\right)} \text{ في المعلم } (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) .$$

✓ إيجاد إحداثيي G' مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,6);(C,1);(D,2)\}$:

نكتب العلاقة الشعاعية : $3\overrightarrow{AG'} + 6\overrightarrow{BG'} + \overrightarrow{CG'} + 2\overrightarrow{DG'} = \vec{0}$ و بإدخال النقطة A بعلاقة شال نجد :

$$12\overrightarrow{AG'} + 6\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{DA} = \vec{0} \text{ أي } 3\overrightarrow{AG'} + 6\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG'} + 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AG'} = \vec{0}$$

$$12\overrightarrow{AG'} + 7\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{DA} = \vec{0} \text{ أي } 12\overrightarrow{AG'} + 6\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \text{ و منه ينتج : } 12\overrightarrow{AG'} + 7\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{DA} = \vec{0} \text{ و منه } 12\overrightarrow{AG'} = 7\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} \text{ معناه } \overrightarrow{AG'} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \text{ و}$$

$$\text{منه } \boxed{G' \left(\frac{7}{12}; \frac{1}{4} \right)} \text{ في المعلم } (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}).$$

✓ استنتاج أن النقط O ، G و G' في استقامية :

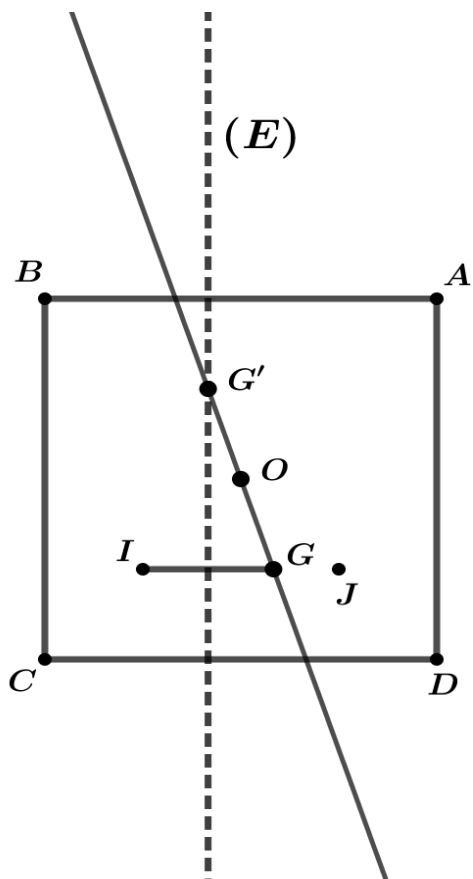
في المربع $ABCD$ لدينا $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ و بما أن O مركز المربع $ABCD$ فإن $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ و منه

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ ، إذن } O \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \text{ في المعلم } (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}).$$

$$\text{نعين مركبتي الشعاعين } \overrightarrow{OG'} \text{ و } \overrightarrow{OG} \text{ في المعلم } (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) : \overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x_G - x_O \\ y_G - y_O \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG'} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{OG'} \begin{pmatrix} x_{G'} - x_O \\ y_{G'} - y_O \end{pmatrix} \text{ ؛ و بما أن : } -\frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} = 0 \text{ فإن الشعاعين } \overrightarrow{OG'} \text{ و } \overrightarrow{OG} \text{ مرتبطان}$$

خطيا و بالتالي النقط O ، G و G' في استقامية .



A ، B و C ثلاث نقط من المستوى ليست في استقامية .

I- نعتبر I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2k^2 - 5); (B, 3k)\}$ و J مرجح الجملة المثقلة $\{(A, k^2); (C, -3k^2 + 4)\}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

- (1) عين قيمة k حتى تكون النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ و النقطة J منتصف القطعة $[AC]$.
- (2) أنشئ شكلا مناسباً .

II- لتكن D مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 3); (B, -2)\}$.

(1) بين أن A هي مرجح النقطتين B و D مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

(2) بين أن : $2\vec{JB} + 3\vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}$.

(3) عين ثم أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق :

$$\|2\vec{MB} + 3\vec{MC} + \vec{MD}\| = 3\|\vec{MA} + \vec{MB}\|$$

III- لتكن النقطة G المعرفة بالعلاقة : $3\vec{GA} - 2\vec{GB} + 5\vec{GC} = \vec{0}$

(1) بين أن : $G \in [CD]$.



(2) أثبت أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(J, 5); (I, -2)\}$ ، ثم أنشئ G .

(3) استنتج أن النقط I ، J و G في استقامية .

حل مقترح :

(1) تكون النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ إذا و فقط إذا كانت المعاملات متساوية معناه :

$2k^2 - 5 = 3k$ أي $2k^2 - 3k - 5 = 0$ و هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي k .

$\Delta = 49$ و نجد : $k = \frac{5}{2}$ أو $k = -1$.

و تكون النقطة J منتصف القطعة $[AC]$ إذا و فقط إذا كانت المعاملات متساوية معناه :

$k^2 = -3k^2 + 4$ أي $4k^2 = 4$ معناه $k^2 = 1$ و منه $k = -1$ أو $k = 1$.

إذن قيمة k التي تحقق المعادلتين في آن واحد هي $k = -1$ و من أجلها تكون النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ و النقطة J منتصف القطعة $[AC]$.

II-

(1) تبيان أن A هي مرجح النقطتين B و D مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما :

D مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 3); (B, -2)\}$ معناه $3\vec{AD} - 2\vec{BD} = \vec{0}$ و بإدخال النقطة A بعلاقة شال نجد

$3\vec{AD} - 2\vec{BA} - 2\vec{AD} = \vec{0}$ أي $\vec{AD} - 2\vec{BA} = \vec{0}$ معناه $2\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{0}$ و بالتالي A هي مرجح النقطتين B و D المرفقتين بالمعاملين 2 و 1 على الترتيب .

(2) إثبات أن : $2\vec{JB} + 3\vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}$.

بإدخال النقطة A بعلاقة شال نجد $2\vec{JB} + 3\vec{JC} + \vec{JD} = 2\vec{JA} + 2\vec{AB} + 3\vec{JA} + 3\vec{AC} + \vec{JA} + \vec{AD}$ أي

$$2\vec{JB} + 3\vec{JC} + \vec{JD} = 6\vec{JA} + 2\vec{AB} + 3\vec{AC} + \vec{AD} \quad \text{و بما أن } 2\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{0} \text{ لأن } A \text{ مرجح الجملة } \{(B,2);(D,1)\}$$

فإنه ينتج $2\vec{JB} + 3\vec{JC} + \vec{JD} = 6\vec{JA} + 3\vec{AC}$ ، و بما أن J منتصف القطعة $[AC]$ فإن $\vec{AC} = 2\vec{AJ}$ و منه $3\vec{AC} = 6\vec{AJ}$ ،

إذن ينتج $2\vec{JB} + 3\vec{JC} + \vec{JD} = 6\vec{JA} + 6\vec{AJ}$ أي $2\vec{JB} + 3\vec{JC} + \vec{JD} = 6(\vec{JA} + \vec{AJ}) = \vec{0}$ لأن $\vec{JA}$ و $\vec{AJ}$ شعاعان متعاكسان

(3) تعيين ثم إنشاء (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|2\vec{MB} + 3\vec{MC} + \vec{MD}\| = 3\|\vec{MA} + \vec{MB}\|$$

بما أن $2\vec{JB} + 3\vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}$ و $2+3+1=6$ و $6 \neq 0$ فإن J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B,2);(C,3);(D,1)\}$ ؛ إذن

من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن : $2\vec{MB} + 3\vec{MC} + \vec{MD} = 6\vec{MJ}$.

و من جهة أخرى ، النقطة I هي مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1)\}$ (لأن I منتصف القطعة $[AB]$) و بالتالي من أجل كل نقطة

كيفية M من المستوي فإن : $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ ؛ إذن $\|2\vec{MB} + 3\vec{MC} + \vec{MD}\| = 3\|\vec{MA} + \vec{MB}\|$ تكافئ

$\|6\vec{MJ}\| = 3\|2\vec{MI}\|$ معناه $\boxed{MJ = MI}$ ، إذن مجموعة النقط (Γ) هي **المستقيم المكون** للقطعة $[IJ]$.

-III

(1) تبيان أن : $G \in [CD]$.

حتى نثبت أن $G \in [CD]$ يكفي أن نثبت أن G هي مرجح للجملة المثقلة $\{(C,\alpha);(D,\beta)\}$ حيث α و β عدنان حقيقيان من نفس الإشارة .

لدينا $3\vec{GA} - 2\vec{GB} + 5\vec{GC} = \vec{0}$ معناه G مرجح للجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-2);(C,5)\}$ ، لكن نعلم أن النقطة D هي مرجح

للجملة $\{(A,3);(B,-2)\}$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح للجملة المثقلة $\{(C,5);(D,1)\}$.

5 و 1 من نفس الإشارة ؛ إذن $G \in [CD]$.

(2) إثبات أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(J,5);(I,-2)\}$ ، ثم إنشاء G :

لدينا $3\vec{GA} - 2\vec{GB} + 5\vec{GC} = \vec{0}$ و بعلاقة شال نجد $3\vec{GA} - 2\vec{GI} - 2\vec{IB} + 5\vec{GJ} + 5\vec{JC} = \vec{0}$ أي

$5\vec{GJ} - 2\vec{GI} + (3\vec{GA} - 2\vec{IB} + 5\vec{JC}) = \vec{0}$ ؛ إذن حتى تكون G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(J,5);(I,-2)\}$ يكفي أن نثبت أن

$$\boxed{3\vec{GA} - 2\vec{IB} + 5\vec{JC} = \vec{0}}$$

بما أن النقطة I هي منتصف القطعة $[AB]$ و J هي منتصف القطعة $[AC]$ فإن $\boxed{-2\vec{IB} = 2\vec{BI} = \vec{BA}}$ و $\boxed{JC = \frac{1}{2}\vec{AC}}$ و

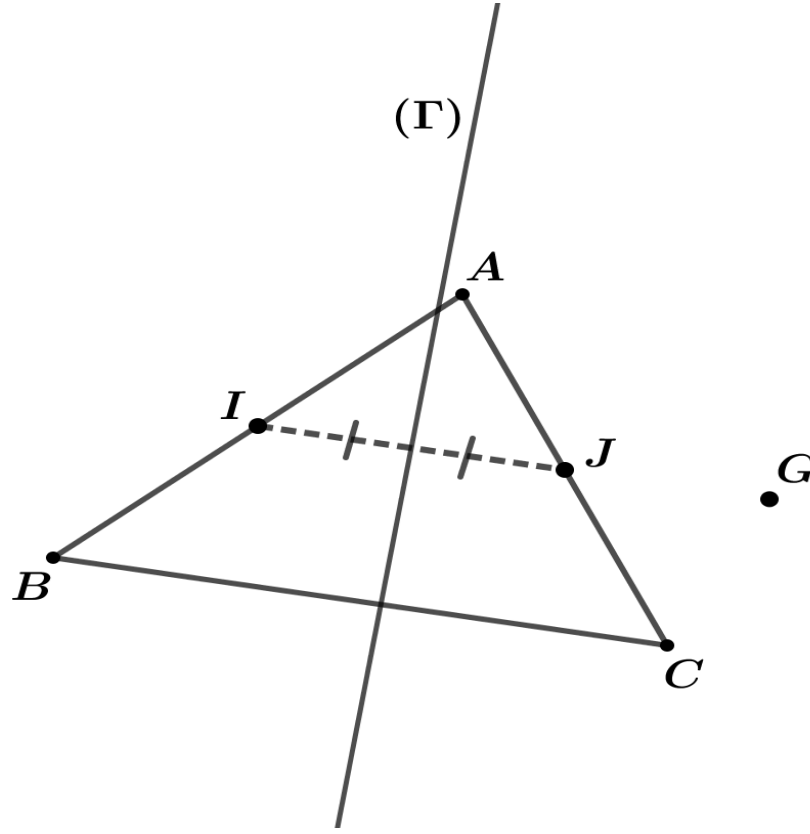
بالتالي $3\vec{GA} - 2\vec{IB} + 5\vec{JC} = 3\vec{GA} + \vec{BA} + \frac{5}{2}\vec{AC}$ ، لكن G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-2);(C,5)\}$ و منه

نكتب $\vec{GA} = -\frac{2}{6}\vec{BA} + \frac{5}{6}\vec{CA}$ معناه $3\vec{GA} = -\vec{BA} + \frac{5}{2}\vec{CA}$ و منه $3\vec{GA} - 2\vec{IB} + 5\vec{JC} = -\vec{BA} + \frac{5}{2}\vec{CA} + \vec{BA} + \frac{5}{2}\vec{AC}$

معناه $3\vec{GA} - 2\vec{IB} + 5\vec{JC} = \vec{0}$. إذن $5\vec{GJ} - 2\vec{GI} = \vec{0}$ و النقطة G هي مرجح الجملة المتقلة $\{(J,5);(I,-2)\}$.

(3) النقطة G مرجح النقطتين I و J المرفقتين بالمعاملين -2 و 5 على الترتيب ، إذن النقط I ، J و G في استقامية .

الإنشاء الهندسي : لإنشاء النقطة G نكتب : $\vec{IG} = \frac{5}{3}\vec{IJ}$.



كتابة الأستاذ : حناش نبيل

ABC مثلث كفي . F ، G و H ثلاث نقط من المستوي حيث : G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ و F تحقق : $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و H منتصف القطعة $[AB]$.
(1) أ- أنشئ النقطة G .

ب- بين أن F مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها ، ثم أنشئ F باستعمال خاصية التجميع .
(2) بين أن G مرجح الجملة المثقلة $\{(H,2);(C,-1)\}$.

(3) عين ثم أنشئ المجموعة (E_1) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$$

(4) عين ثم أنشئ المجموعة (E_2) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$$

(5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k طبيعة المجموعة (Δ) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 4(k-1)$$

(6) نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقط $A(0;3)$ ، $B(-1;0)$ ، $C(3;1)$.

✓ جد العددين β و γ حتى تكون النقطة $W(0;1)$ مرجحا للجملة $\{(A,2);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.

حل مقترح :

(1) إنشاء G : G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ و بالتالي $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ و منه

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB}}$$

(2) إثبات أن F مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها :

لدينا $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ معناه $4\overrightarrow{AF} - 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ و بإدخال النقطة F بعلاقة شال نجد :

$4\overrightarrow{AF} - 5\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{FB} + 2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{AF} - 5\overrightarrow{FB} + 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$ أي $\boxed{\overrightarrow{AF} + 5\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{CF} = \vec{0}}$ و منه F هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,5);(C,-2)\}$.

✓ إنشاء F باستعمال خاصية التجميع :

$1+5=6$ و $6 \neq 0$ ؛ إذن مرجح الجملة $\{(A,1);(B,5)\}$ موجود و ليكن I ، و لإنشاء I نكتب : $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}}$

حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح النقطتين C و I المرفقتين بالمعاملين -2 و 6 و لإنشاء G نكتب :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{6}{4} \overrightarrow{CI} \text{ معناه } \boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{3}{2} \overrightarrow{CI}}$$

(2) إثبات أن G مرجح الجملة المثقلة $\{(H, 2); (C, -1)\}$:

G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 1); (C, -1)\}$ و H هي منتصف القطعة $[AB]$ و بالتالي H مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 1)\}$ ؛
إذن حسب خاصية التجميع فإن G مرجح الجملة المثقلة $\{(H, 2); (C, -1)\}$.

(3) تعيين ثم إنشاء المجموعة (E_1) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$$

G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 1); (C, -1)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن

$$\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}} \text{ أي } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (1+1-1)\overrightarrow{MG}$$

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ هو شعاع مستقل عن النقطة M و بإدخال B بعلاقة شال نجد $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MB}$ أي

$$\boxed{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}} \text{ ؛ إذن } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| \text{ تكافئ } \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{BA}\| \text{ معناه } \boxed{MG = AB}$$

إذن مجموعة النقط (E_1) هي **الدائرة** التي مركزها G و نصف قطرها $r = AB$.

(4) تعيين ثم إنشاء المجموعة (E_2) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$$

H هي مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 1)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (1+1)\overrightarrow{MH}$ أي

$$\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MH}} \text{ ؛ إذن } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \text{ تكافئ } \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MH}\| \text{ معناه } \boxed{MG = MH}$$

إذن مجموعة النقط (E_2) هي **المستقيم المحوري** للقطعة $[GH]$.

(5) المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي k طبيعة مجموعة النقط (Δ) :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 4(k-1)$$

• إذا كان $k < 1$ فإن $4(k-1) < 0$ و بالتالي $(\Delta) = \emptyset$ لأن الموجب لا يساوي السالب .

• إذا كان $k = 1$ فإن $4(k-1) = 0$ و منه $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 0$ معناه $\|\overrightarrow{MG}\| = 0$ أي $MG = 0$ و بالتالي M

تنطبق على G إذن : $(\Delta) = \{G\}$.

• إذا كان $k > 1$ فإن $4(k-1) > 0$ و منه $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 4(k-1)$ معناه $\|\overrightarrow{MG}\| = 4(k-1)$ أي

$MG = 4(k-1)$ ؛ إذن : (Δ) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = 4(k-1)$.

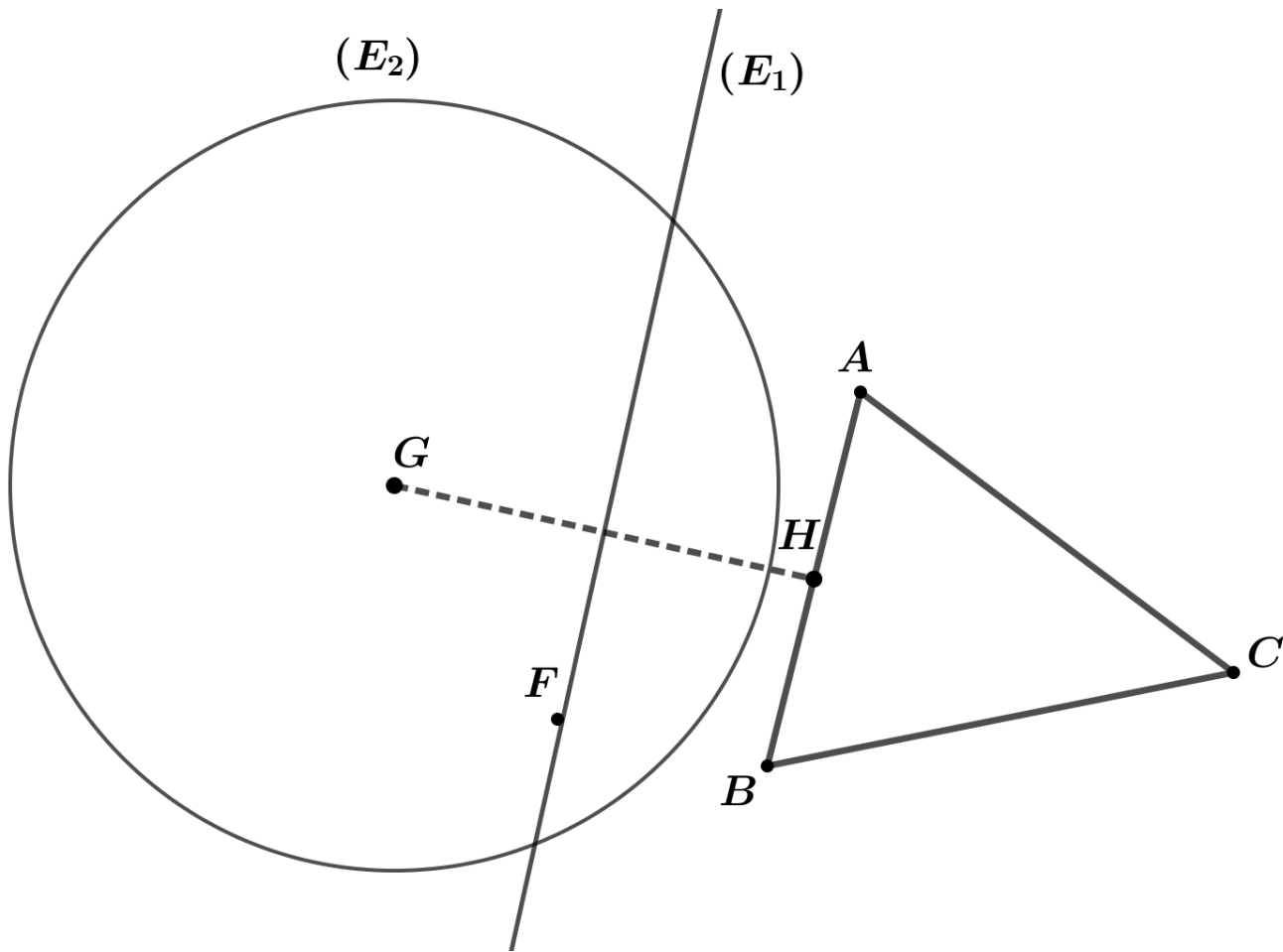
(6) إيجاد العددين β و γ حتى تكون النقطة $W(0;1)$ مرجحا للجملة $\{(A,2);(B,\beta);(C,\gamma)\}$:

$$\begin{cases} \frac{-\beta+3\gamma}{2+\beta+\gamma}=0 \\ \frac{6+\gamma}{2+\beta+\gamma}=1 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} x_w = \frac{-\beta+3\gamma}{2+\beta+\gamma} \\ y_w = \frac{6+\gamma}{2+\beta+\gamma} \end{cases} : \text{معناه } \{(A,2);(B,\beta);(C,\gamma)\} \text{ مرجح للجملة } W(x_w; y_w)$$

$$\text{معناه } \begin{cases} -\beta+3\gamma=0 \\ 6+\gamma=2+\beta+\gamma \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} -\beta+3\gamma=0 \\ \beta=4 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} \beta=4 \\ \gamma=4/3 \end{cases}$$

إذن النقطة $W(0;1)$ مرجح للجملة $\{(A,2);(B,4);(C,4/3)\}$.

الإنشاء الهندسي :



ABC مثلث متقاس الأضلاع طول ضلعه 6 . (الوحدة هي السنتيمتر)

H و G نقطتان من المستوي حيث $2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ و G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$.

(1) أنشئ النقطة G .

(2) أثبت أن H هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما ثم أنشئ H .

(3) بين أن النقطة G منتصف القطعة $[CH]$.

(4) عين ثم أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| < 4\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$$

(5) نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقط $A(0;1)$ ، $B(0;5)$ ، $C(2;1)$.

و لتكن النقطة G_m مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-m^2+4);(B,m^2-2m);(C,2m)\}$ مع $m \in \mathbb{R}$.

أ- عين قيم m التي من أجلها تكون G_m موجودة .

ب- عين إحداثيي النقطة G_m بدلالة m .

ج- عين المحل الهندسي للنقط G_m لما m يسمح $\mathbb{R}$.

حل مقترح :

(1) إنشاء النقطة G : G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ معناه $3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{CG} = \vec{0}$ وباستعمال علاقة

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

شال نجد $3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AG} = \vec{0}$ أي $4\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ و منه $\boxed{\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$.

(2) إثبات أن H هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما ثم إنشاء H :

$$\boxed{3\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BH} = \vec{0}}$$

لدينا $2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ وباستعمال علاقة شال نجد $2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} = \vec{0}$ أي $3\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} = \vec{0}$ و منه $\boxed{3\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BH} = \vec{0}}$

إذن H هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و -1 على الترتيب .

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$$

لإنشاء H نكتب :

(3) تبيان أن G منتصف القطعة $[CH]$:

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ و H مرجح الجملة $\{(A,3);(B,-1)\}$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(H,2);(C,2)\}$ (لأن $3+(-1)=2$) ؛ المعاملات متساوية ؛ إذن G تمثل منتصف القطعة $[CH]$.

(4) تعيين ثم إنشاء (Γ) مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق :

$$\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|<4\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|$$

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوى فإن :

$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(3-1+2)\overrightarrow{MG} \text{ أي } \boxed{3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}}$$

الشعاع $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$ مستقل عن النقطة M و باستعمال علاقة شال نكتب $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}$ أي

$$\boxed{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}} \text{ ؛ إذن } \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|<4\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\| \text{ تكافئ } \|4\overrightarrow{MG}\|<4\|\overrightarrow{BA}\| \text{ معناه } \boxed{MG<6} .$$

إذن مجموعة النقط (Γ) هي **الفرص المفتوح** (ماعدا الحافة) الذي مركزه G و نصف قطره $r=6$.

(5)

أ- تعيين قيم m التي من أجلها تكون G_m موجودة :

تكون G_m موجودة إذا و فقط إذا كان $-m^2+4+m^2-2m+2m \neq 0$ معناه $\boxed{4 \neq 0}$ و هي محققة من أجل كل عدد حقيقي m .

إذن G_m موجودة من أجل كل $m \in \mathbb{R}$.

ب- تعيين إحداثيي النقطة G_m بدلالة m :

$$\text{و منه } \boxed{G_m(m;m^2-2m+1)} \text{ و } \begin{cases} x_{G_m} = \frac{(-m^2+4) \times 0 + (m^2-2m) \times 0 + 2m \times 2}{4} \\ y_{G_m} = \frac{(-m^2+4) \times 1 + (m^2-2m) \times 5 + 2m \times 1}{4} \end{cases}$$

ج- تعيين المحل الهندسي للنقط G_m لما m يمسح $\mathbb{R}$:

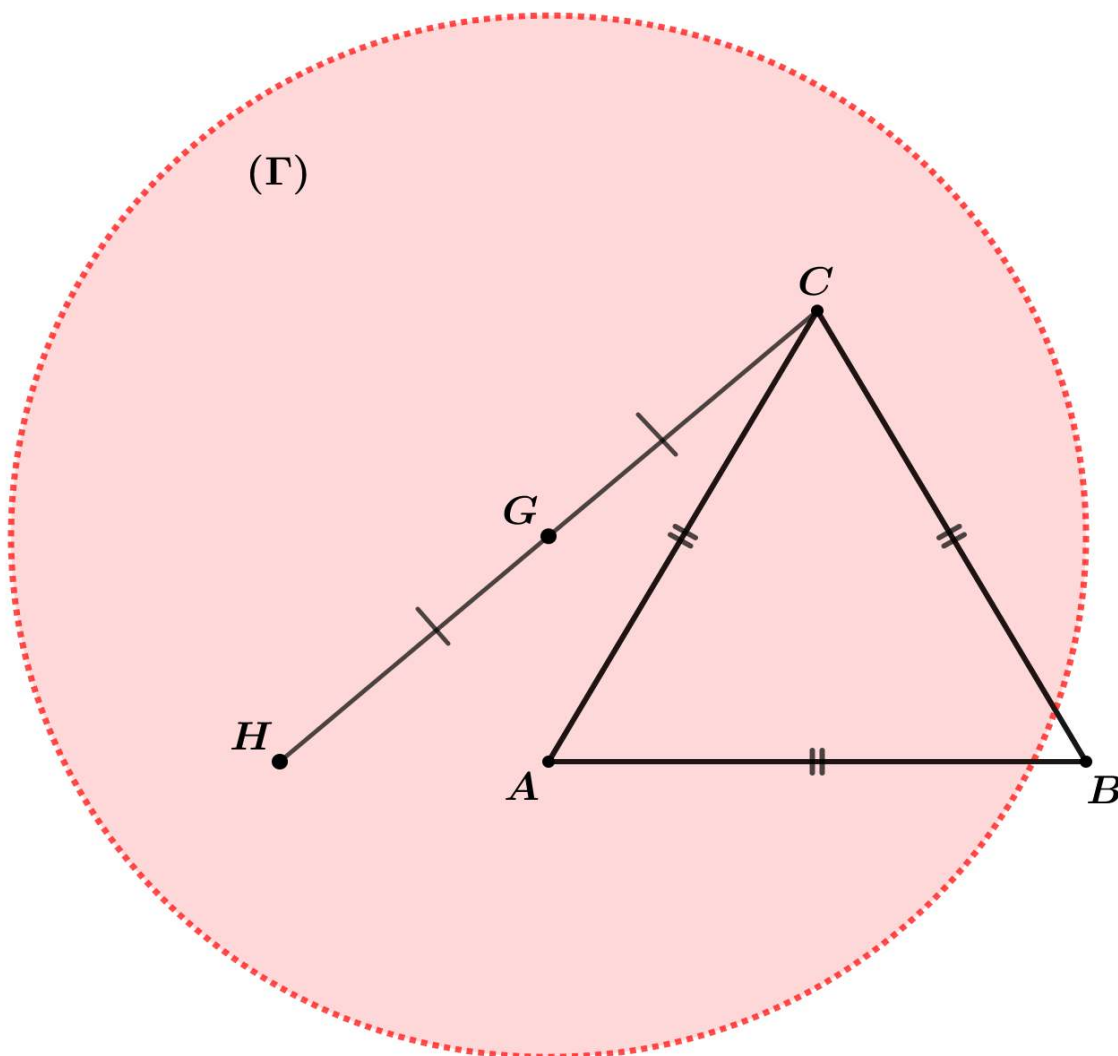
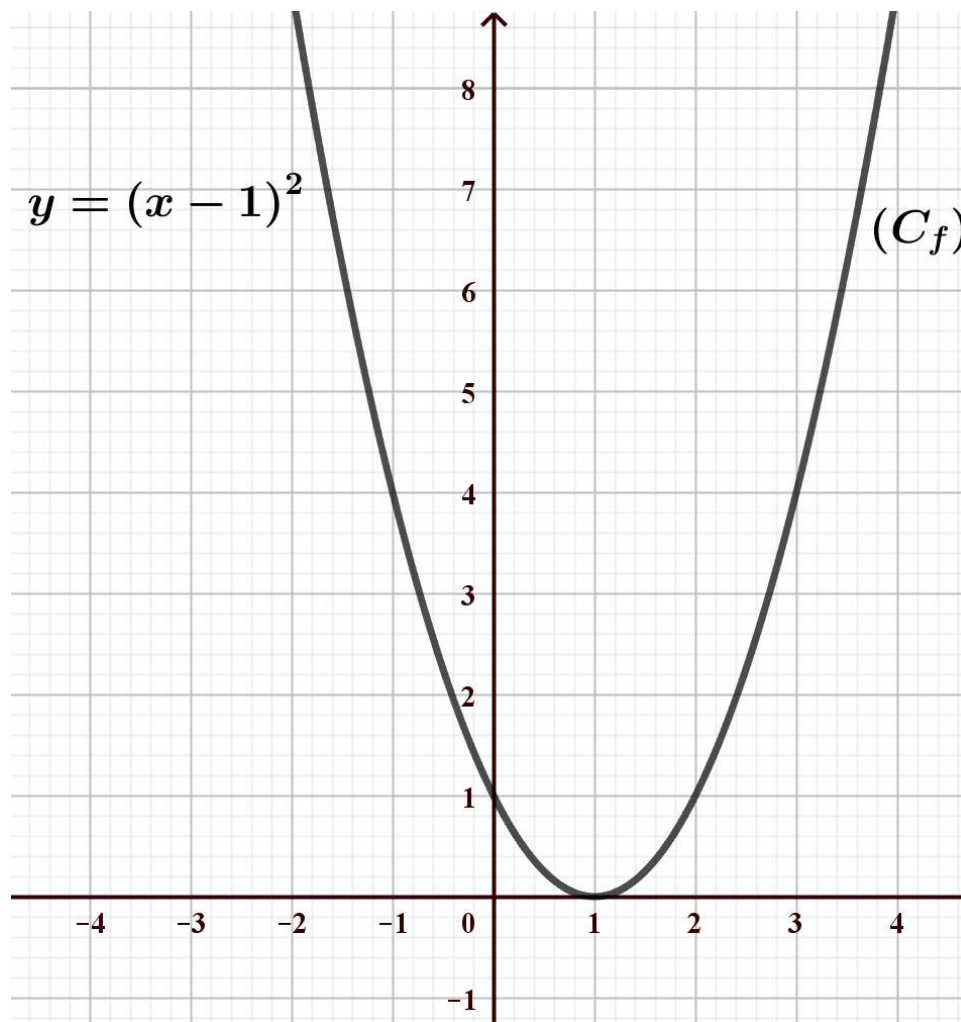
من السؤال السابق ؛ $G_m(m;m^2-2m+1)$ أي $G_m(m;(m-1)^2)$ حيث $m \in \mathbb{R}$.

لو نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\boxed{f(x)=(x-1)^2}$ فإن نمثلها البياني (C_f) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث

و بالتالي من أجل كل $m \in \mathbb{R}$ فإن $G_m \in (C_f)$ ؛ إذن مجموعة النقط G_m لما m يمسح $\mathbb{R}$ هو القطع المكافئ

الممثل للدالة f .

ملاحظة: (C_f) هو صورة (P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامة و ليكن k عدد حقيقي من المجال $[-1;1]$.

ليكن G_k مرجح الجملة المثقلة $\{(A, k^2 + 1); (B, k); (C, -k)\}$.

(1) مثل النقط A ، B و C ، I منتصف القطعة $[BC]$ ، و أنشئ G_1 و G_{-1} .

(2) برر وجود G_k من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-1;1]$ و بين أن : $\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$.

(3) لتكن N نقطة من (BC) .

✓ هل يمكن أن تنطبق N على G_k ؟ علل .

(4) أدرس إتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto -\frac{x}{x^2 + 1}$ على المجال $[-1;1]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

(5) استنتج مجموعة النقط G_k (أو المحل الهندسي للنقطة G_k) عندما يسمح k المجال $[-1;1]$.

حل مقترح :

(1) G_1 هي مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$ ، و بما أن $2 + 1 - 1 = 2$ و $2 \neq 0$ فإن G_1 موجودة و وحيدة و يمكن

إنشاؤها بالعلاقة الشعاعية : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$ أي $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$ و منه

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$. G_{-1} هي مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$ ، و بما أن $2 - 1 + 1 = 2$ و $2 \neq 0$ فإن G_{-1} موجودة و

وحيدة و يمكن إنشاؤها بالعلاقة الشعاعية : $\overrightarrow{AG_{-1}} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG_{-1}} = -\frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$ أي $\overrightarrow{AG_{-1}} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$.

(2) بما أن $k^2 + 1 + k - k = k^2 + 1$ ، و من أجل كل عدد حقيقي $k \in [-1;1]$ فإن $k^2 + 1 > 0$ و بالتالي $k^2 + 1 \neq 0$ ، إذن النقطة G_k موجودة و وحيدة من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[-1;1]$.

و لدينا : $\overrightarrow{AG_k} = \frac{k}{k^2 + 1} \overrightarrow{AB} - \frac{k}{k^2 + 1} \overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ أي $\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ و منه

$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$ و هو المطلوب .

(3) $N \in (BC)$ ، لو تنطبق النقطة N على G_k فإنه ينتج : $G_k \in (BC)$ ، حيث نعلم أن G_k هي مرجح الجملة

$\{(A, k^2 + 1); (B, k); (C, -k)\}$ و بالتالي $G_k \in (BC)$ إذا و فقط إذا كان معامل A معدوما ، أي $k^2 + 1 = 0$ تناقض لأنه من

أجل كل عدد حقيقي $k \in [-1;1]$ فإن $k^2 + 1 \neq 0$ ؛ إذن لا يمكن أن تنطبق N على G_k .

(4) دراسة إتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1;1]$:

f قابلة للإشتقاق على المجال $[-1;1]$ و من أجل كل عدد حقيقي $x \in [-1;1]$:

$$f'(x) = -\frac{1(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

و بما أنه من أجل كل $x \in [-1;1]$ نعلم أن $(x^2 + 1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$

من إشارة البسط $x^2 - 1$. نضع $f'(x) = 0$ معناه $x^2 - 1 = 0$ يكافئ $x^2 = -1$ أو $x^2 = 1$.

x	-1	1
$f'(x)$	0	0
		-

من أجل كل عدد حقيقي $x \in [-1;1]$ لدينا $f'(x) \leq 0$ و منه f متناقصه تماما على المجال $[-1;1]$.

جدول التغيرات :

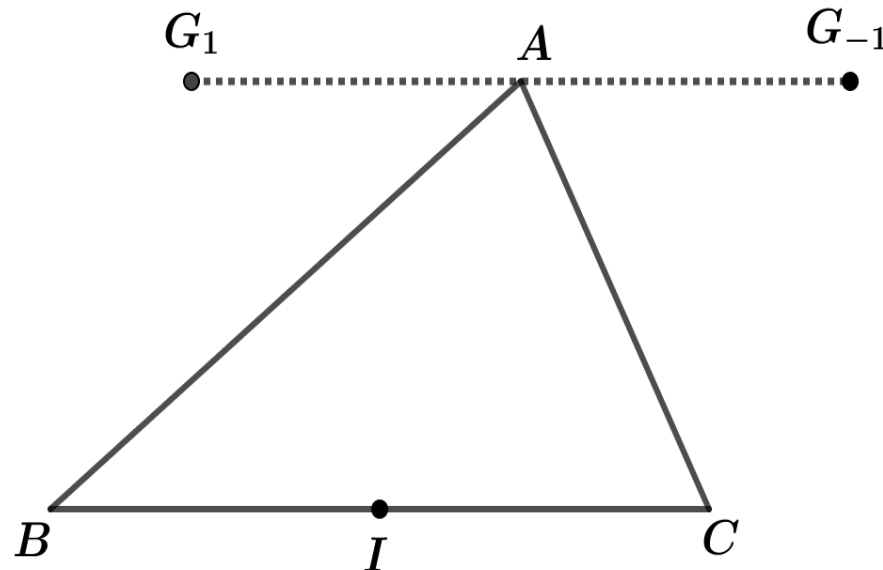
x	-1	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(5) استنتاج المحل الهندسي للنقطة G_k عندما يسمح k المجال $[-1;1]$:

من جدول التغيرات ، عندما يسمح k المجال $[-1;1]$ فإن $-\frac{1}{2} \leq -\frac{k}{k^2+1} \leq \frac{1}{2}$ و بما أن $\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2+1} \overrightarrow{BC}$ فإن $\overrightarrow{BC}$ هو شعاع نوجهه للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A .

من أجل $k = -1$: $-\frac{k}{k^2+1} = \frac{1}{2}$ و $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ و من أجل $k = 1$: $-\frac{k}{k^2+1} = -\frac{1}{2}$ و $\overrightarrow{AG_1} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$.

المحل الهندسي للنقطة G_k عندما يسمح k المجال $[-1;1]$ هي القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$ من المستقيم (Δ) .



ABC مثلث متساوي الساقين في A و ليكن الإرتفاع $[AH]$ المتعلق بالضلع $[BC]$ حيث : $AH = 4$ (الوحدة هي السنتيمتر) .

(1) عين ثم أنشئ النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 1 ، 1 على الترتيب .

(2) M نقطة من المستوي . عين طويلة الشعاع $\vec{U}$ حيث : $\vec{U} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$

• نفرض فيما يلي أن : $\|\vec{U}\| = 8$ (الوحدة هي السنتيمتر) .

(3) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{U}\|$$

(4) لتكن G_n مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

✓ أثبت أن النقطة G_n موجودة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، و أن النقطة G_n تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[AH]$.

(5) بين أن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{U}\|$ هي دائرة (ζ_n) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

(6) تحقق من أن النقطة A تنتمي إلى (ζ_n) ثم استنتج المسافة AG_n بدلالة n .

حل مقترح :

(1) G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ و منه $2\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ؛ و لإنشاء النقطة G نكتب :

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}}$$

(2) الشعاع $\vec{U} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ مستقل عن النقطة M و باستعمال علاقة شال نكتب :

$$\vec{U} = 2\vec{MA} - \vec{MA} - \vec{AB} - \vec{MA} - \vec{AC} \quad \vec{U} = \vec{BA} + \vec{CA} \quad \text{و بالتالي} \quad \boxed{\|\vec{U}\| = \|\vec{BA} + \vec{CA}\|}$$

$$\boxed{\|\vec{BA} + \vec{CA}\| \leq \|\vec{BA}\| + \|\vec{CA}\|} \quad \text{تنبيه :}$$

المثلث ABC متساوي الساقين في A و $[AH]$ هو الإرتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ ؛ إذن $\boxed{\vec{BA} + \vec{CA} = 2\vec{HA}}$ و بالتالي

$$\|\vec{U}\| = \|\vec{BA} + \vec{CA}\| = 2\|\vec{HA}\| \quad \text{حيث} \quad \|\vec{HA}\| = 4 \quad \text{و منه ينتج :} \quad \boxed{\|\vec{U}\| = 8}$$

(3) تعيين ثم إنشاء (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{U}\|$$

G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$$2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = (2+1+1)\vec{MG} \quad \text{أي} \quad \boxed{2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MG}}$$

$$\text{إذن} \quad \|\vec{U}\| = \|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|4\vec{MG}\| = 8 \quad \text{تكافئ} \quad \boxed{MG = 2} \quad \text{معناه}$$

إذن مجموعة النفط (E) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = 2$.

(4) لتكن G_n مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

✓ إثبات أن النقطة G_n موجودة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، و أن النقطة G_n تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[AH]$:

لدينا $2 + n + n = 2 + 2n$ و $2 + 2n \neq 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ إذن النقطة G_n موجودة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

لدينا $2\vec{G_nA} + n\vec{G_nB} + n\vec{G_nC} = \vec{0}$ و باستعمال علاقة شال نجد $2\vec{G_nA} + n\vec{G_nH} + n\vec{HB} + n\vec{G_nH} + n\vec{HC} = \vec{0}$ أي

$2\vec{G_nA} + 2n\vec{G_nH} + n(\vec{HB} + \vec{HC}) = \vec{0}$ ، و بما أن H هي منتصف القطعة $[BC]$ (لأن $[AH]$ هو الإرتفاع المتعلق بالضلع

$[BC]$ في المثلث المتساوي الساقين في A) فإن $\vec{HB}$ و $\vec{HC}$ شعاعان متعاكسان و بالتالي $\vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}$.

إذن ينتج $\vec{G_nA} + n\vec{G_nH} = \vec{0}$ و بالتالي G_n هي مرجح النقطتين A و H المرفقتين بالمعاملين 1 و n على الترتيب .

1 و n من نفس الإشارة (كلاهما عدد موجب تماما) و منه نستنتج أن $G_n \in [AH]$.

(5) تبيان أن مجموعة النفط M من المستوي التي تحقق : $\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{U}\|$ هي دائرة (ζ_n) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها :

G_n مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$$\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{U}\| \text{ تكافئ } \|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = (2 + 2n)\|\vec{MG_n}\|$$

$$\text{معناه } 2\|(n+1)\vec{MG_n}\| = 8n \text{ و منه } \vec{MG_n} = \frac{4n}{n+1} \text{ حيث } n \in \mathbb{N}^*$$

إذن مجموعة النفط التي تحقق $\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{U}\|$ هي الدائرة التي مركزها G_n و نصف قطرها $r = \frac{4n}{n+1}$.

(6) من أجل $M = A$ في المساواة $\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{U}\|$ نجد :

$$\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = \|2\vec{AA} + n\vec{AB} + n\vec{AC}\| = n\|\vec{AB} + \vec{AC}\| = n\|2\vec{AH}\| = 8n = n\|\vec{U}\|$$

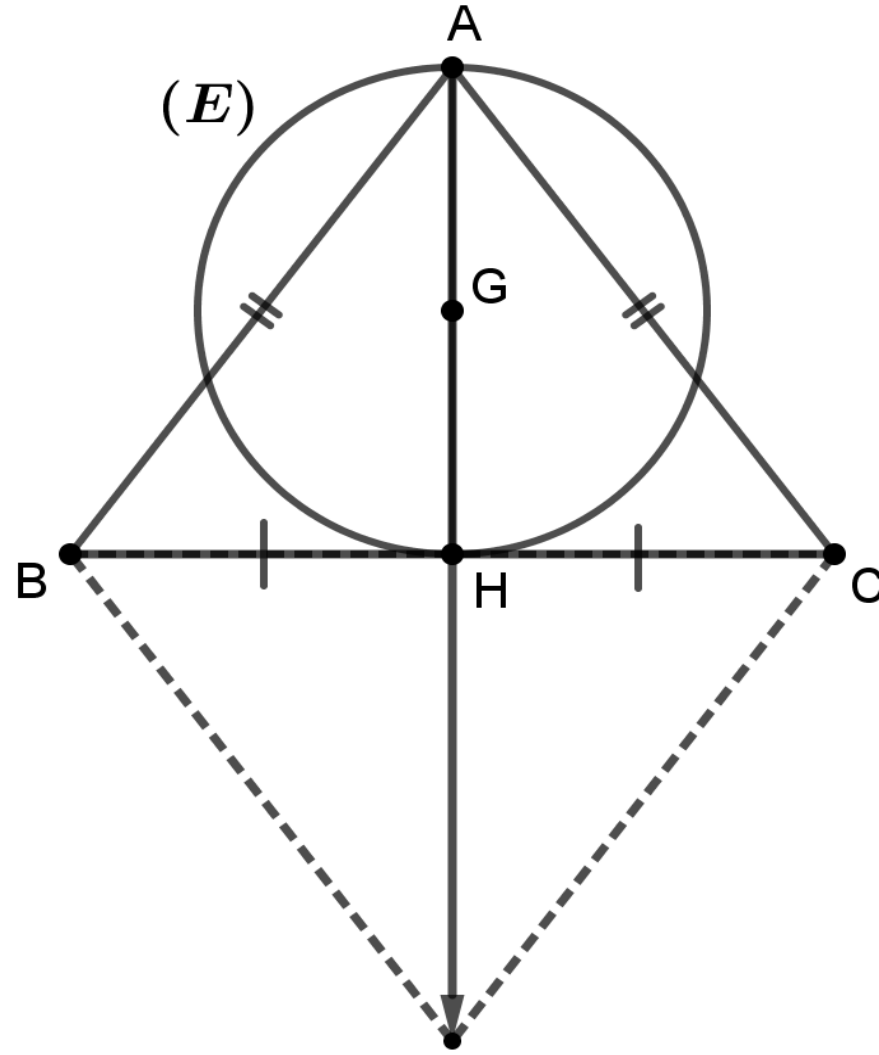
$$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AH} \text{ و نعلم أن } \vec{AH} = 4 \text{ و } \|\vec{U}\| = 8 \text{ ؛ إذن من أجل } M = A \text{ ، المساواة } \|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{U}\|$$

محقة ، و منه نستنتج أن $A \in (\zeta_n)$.

• استنتاج المسافة AG_n :

$$\text{النقطة } G_n \text{ هي مركز الدائرة } (\zeta_n) \text{ ، و بما أن } A \in (\zeta_n) \text{ فإن } AG_n = r \text{ معناه } AG_n = \frac{4n}{n+1}$$

الإنشاء الهندسي :



يقول عالم الرياضيات جورج بوليا : "الهندسة هي علم التبرير الصحيح على أشياء غير صحيحة"

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و النقطة I منتصف $[AB]$. المستقيمان (BD) و (CI) يتقاطعان في النقطة G .
(1) أرسم شكلا مناسباً .

(2) أ- برهن أن : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ (1).

ب- ماذا تمثل النقطة G بالنسبة إلى المثلث ABC ؟

(3) أ- أنشئ النقطة K مرجح $(A,1)$ ، $(B,1)$ و $(C,-1)$.

ب- برهن أن K هي أيضا مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$.

(4) أ- استنتج من العلاقة (1) أن النقطة A مرجح $(D,1)$ ، $(G,3)$ و $(C,-2)$.

ب- بين أن A منتصف القطعة $[DK]$.

(5) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق :

$$\|\vec{MD} + 3\vec{MG} - 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$$

(6) أ- من أجل أي قيم للعدد الحقيقي m المرجح I_m للجملة $\{(D,m);(G,3);(C,-2)\}$ يكون موجودا ؟

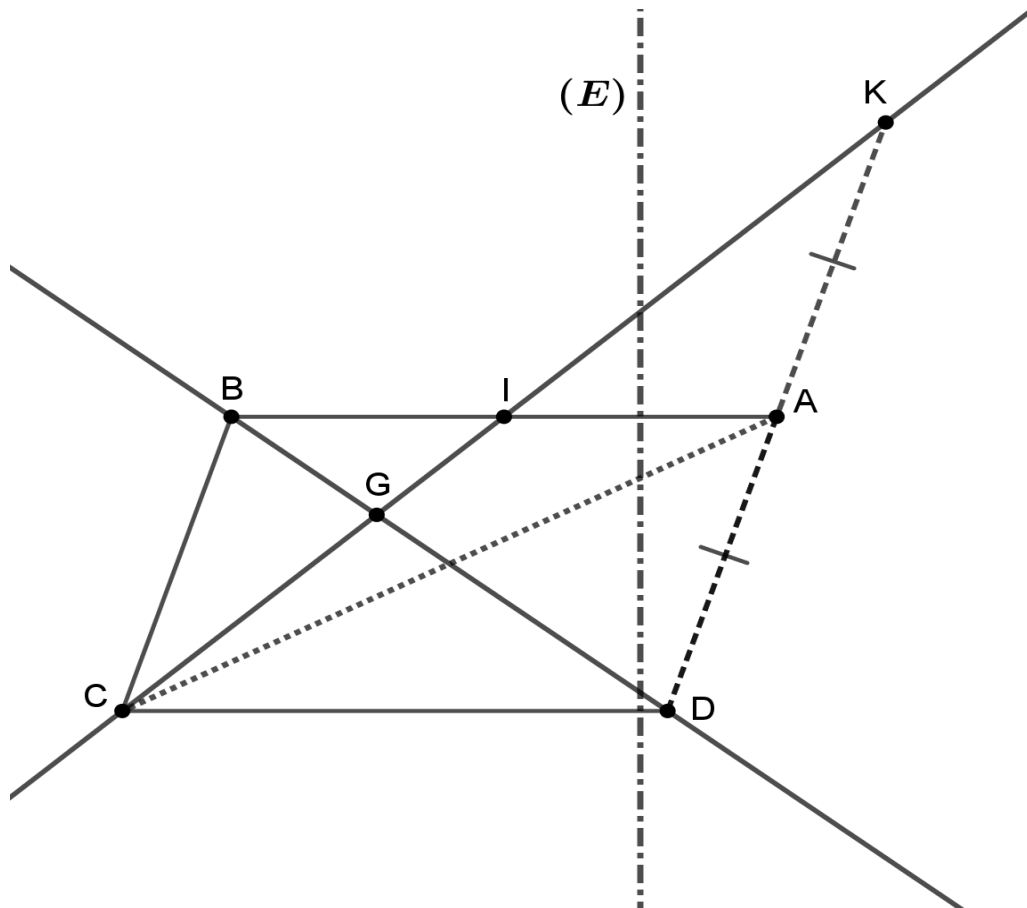
ب- عندما تكون I_m موجودة ، بين أن : $\vec{DI}_m = \frac{1}{m+1} \vec{DK}$.

ج- أدرس تغيرات الدالة $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ و شكل جدول تغيراتها (حدد النهايات عند أطراف مجموعة التعريف) .

د- استنتج المحل الهندسي للنقطة I_m عندما يسمح m المجموعة $\mathbb{R} - \{-1\}$.

حل مقترح :

(1) الإنشاء الهندسي :



(2) إثبات أن : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ (1).

G تمثل مركز ثقل المثلث ABC لأن G هي نقطة تقاطع متوسطين في المثلث ABC :

المتوسط المتعلق بالضلع $[AB]$ و هو المستقيم (CI) و المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ و هو المستقيم (BD) (المستقيم (BD))
يقطع الضلع $[AC]$ في المنتصف لأن قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ متناصفان ؛ إذن $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

(3) أ- إنشاء النقطة K مرجح $(A,1)$ ، $(B,1)$ و $(C,-1)$:

لإنشاء النقطة K نعتمد على العلاقة $\vec{AK} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$ و منه $\vec{AK} = \vec{AB} - \vec{AC}$ أي $\boxed{\vec{AK} = \vec{CB}}$.

ب- إثبات أن K هي أيضا مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$:

لدينا $\vec{KA} + \vec{KB} - \vec{KC} = \vec{0}$ و منه $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} - 2\vec{KC} = \vec{0}$ و باستعمال علاقة شال نكتب
 $\vec{KG} + \vec{GA} + \vec{KG} + \vec{GB} + \vec{KG} + \vec{GC} - 2\vec{KC} = \vec{0}$ أي $\vec{KG} + \underbrace{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}}_{\vec{0}} - 2\vec{KC} = \vec{0}$ و منه ينتج

$\boxed{3\vec{KG} - 2\vec{KC} = \vec{0}}$ ؛ إذن K هي مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$.

(4) أ- استنتاج من العلاقة (1) أن النقطة A مرجح $(D,1)$ ، $(G,3)$ و $(C,-2)$:

باستعمال علاقة شال في العلاقة (1) نكتب : $\vec{GA} + \vec{GA} + \vec{AB} + \vec{GA} + \vec{AC} = \vec{0}$ أي $3\vec{GA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$ و منه
 $3\vec{GA} + \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{AC} = \vec{0}$ أي $3\vec{GA} + 2\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{0}$ و منه $3\vec{GA} + 2\vec{AC} + \vec{DA} = \vec{0}$ لأن $\vec{CB} = \vec{DA}$ في متوازي
الأضلاع $ABCD$ معناه $\boxed{\vec{DA} + 3\vec{GA} - 2\vec{CA} = \vec{0}}$ و بالتالي A مرجح النقط D ، G و C المرفقة بالمعاملات 1 ، 3 و -2
على الترتيب .

ب- تبيان أن A منتصف القطعة $[DK]$:

A مرجح الجملة المثقلة $\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$ و K مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع فإن A
مرجح الجملة $\{(D,1);(K,1)\}$ لأن $-2 + 3 = 1$. إذن النقطة A منتصف القطعة $[DK]$.

(5) تعيين ثم إنشاء (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\vec{MD} + 3\vec{MG} - 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$$

A مرجح الجملة المثقلة $\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$$\boxed{\vec{MD} + 3\vec{MG} - 2\vec{MC} = 2\vec{MA}}$$
 أي $\vec{MD} + 3\vec{MG} - 2\vec{MC} = (1+3-2)\vec{MA}$.

I منتصف القطعة $[AB]$ و منه $\boxed{\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}}$.

إذن $\|\vec{MD} + 3\vec{MG} - 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$ تكافئ $\|2\vec{MA}\| = \|2\vec{MI}\|$ معناه $\boxed{MA = MI}$.

إذن مجموعة النقط (E) هي المستقيم المحوري للقطعة [AI].

(6) أ- يكون المرجح I_m للجملة $\{(D,m);(G,3);(C,-2)\}$ موجودا إذا و فقط إذا كان $m+1 \neq 0$ معناه $m \neq -1$ و منه $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

ب- من أجل $m \neq -1$ ، تبين أن : $\overrightarrow{DI_m} = \frac{1}{m+1} \overrightarrow{DK}$.

K مرجح (G,3) و (C,-2) ؛ إذن حسب خاصية التجمع فإن I_m مرجح الجملة $\{(D,m);(K,1)\}$ و منه ينتج :

$m\overrightarrow{DI_m} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DI_m} = \vec{0}$ معناه $m\overrightarrow{DI_m} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$ و بالتالي من أجل

كل عدد حقيقي $m \neq -1$ ينتج : $\overrightarrow{DI_m} = \frac{1}{m+1} \overrightarrow{DK}$.

ج- دراسة تغيرات الدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ و تشكيل جدول تغيراتها :

f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ و $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -1$ فإن :

$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$. من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن $f'(x) < 0$ و منه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ و $]-1; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	0	$+\infty$	0

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 & , & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty & , & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

د- استنتاج المحل الهندسي للنقطة I_m عندما يسمح m المجموعة $\mathbb{R} - \{-1\}$:

من جدول التغيرات نستنتج أنه إذا كان m يسمح المجموعة $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإن $f(m) = \frac{1}{m+1}$ تتغير في $\mathbb{R} - \{0\}$.

إذن المقدار $\frac{1}{m+1}$ لا يعدم لما m يسمح المجموعة $\mathbb{R} - \{-1\}$ و عليه الشعاع $\overrightarrow{DI_m}$ غير معدوم من أجل أي نقطة I_m و منه I_m لا يمكن أن تنطبق على D.

$\overrightarrow{DK}$ شعاع ثابت و غير معدوم من المستوي ، و من علاقة الارتباط الخطي $\overrightarrow{DI_m} = \frac{1}{m+1} \overrightarrow{DK}$ (النقط D ، K و I_m في استقامية) نستنتج أن مجموعة النقط I_m عندما m يسمح المجموعة $\mathbb{R} - \{-1\}$ هي المستقيم (DK) باستثناء النقطة D.