

## الجزء الأول:

- يحتوي صندوق على 7 كرات لا يمكن التمييز بينهما باللمس. ثلاث كرات بيضاء وأربع كرات خضراء. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.
- شكل شجرة الإمكانات.
  - احسب احتمال الأحداث التالية:
  - $A$ : "سحب كرتين مختلفتين في اللون"
  $B$ : "سحب كرتين من نفس اللون"
  - نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب  $(DA)$   $\alpha$  (حيث  $\alpha$  عدد طبيعي معطى) إذا سحب كرتين يضاوين يتحصل على  $100 DA$ ، وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على  $50 DA$ ، وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة  $\alpha$ .
 

أ/ برر أن قيم المتغير العشوائي هي  $\{-\alpha, 50 - \alpha, 100 - \alpha\}$  ثم عين قانون احتماله.

ب/ بين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  بدلالة  $\alpha$  هو:  $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$

ج/ اوجد أكبر قيمة ممكنة لـ  $\alpha$  حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

## الجزء الثاني:

- ننزع من الصندوق ثلاث كريات خضراء وكرية بيضاء ونضيف كرتين حمراوين للصندوق، الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس ونسحب منه كرتين على التوالي مع إرجاع.
- شكل شجرة الإمكانات
  - احسب احتمال الأحداث التالية:
  - $C$ : "سحب كرة على الأقل حمراء"
  $D$ : "سحب كرتين خضراء على الأكثر" ماذا تستنتج؟
  - ليكن  $T$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة عدد الألوان المتحصل عليها.
    - عين قانون احتمال  $T$
    - احسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير  $T$ .

## الجزء الثالث:

- نرقم الكريات الموجودة في الصندوق حيث كرتين يضاوين تحملان الرقمين 1 و 0 و كرتين حمراوين تحملان الرقمين 2 و 0 والكرية الخضراء تحمل الرقم 2 كل الكرات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس. نسحب من الكيس كرتين على التوالي دون الارجاع.
- شكل شجرة الإمكانات
  - احسب احتمال الأحداث التالية:
  - $E$ : "الكرتان مختلفتان في اللون"
  $F$ : "الكرتان من نفس الرقم"
  $G$ : "سحب كرتين جداءهما معدوم"
  - احسب  $p(E \cap F)$  ثم استنتج احتمال الحدث  $p(E \cup F)$ .
  - ليكن  $Y$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين جداء الرقمين المسجلين عليها.
 

أ/ عين قانون احتمال  $Y$ ، ثم احسب الأمل الرياضي لـ  $Y$  واستنتج  $E(2023Y + 1444)$

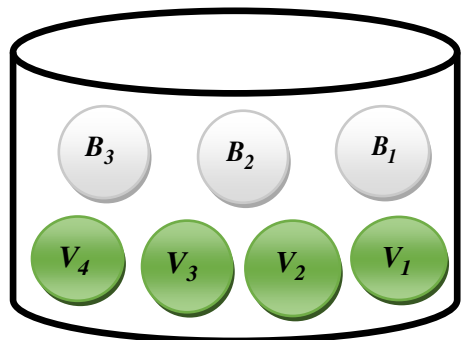
ب/ احسب  $P(Y^2 + Y - 2 = 0)$
  - ليكن  $Z$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.
 

أ/ عين قيم  $Z$

ب/ عين قانون احتمال  $Z$

ت/ احسب  $P(Z^2 - Z \leq 0)$

## حل الجزء الأول:



يحتوي صندوق على 7 كرات لا يمكن التمييز بينهما باللمس. ثلاث كرات بيضاء وأربع كرات خضراء نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

1. شكل شجرة الإمكانيات.

2. حساب احتمال الأحداث التالية:

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{12}{21}$$

$$P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$A = \{(B;V), (V;B)\}$  " سحب كرتين مختلفتين في اللون " ومنه

$B = \{(B;B), (V;V)\}$  " سحب كرتين من نفس اللون " ومنه

أو يمكن ملاحظة أن  $B$  حدث عكسي للحدث  $A$  أي

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

1. -أ- تعيين قيم المتغير العشوائي  $X$  مع التبرير:

لما اللاعب يسحب كرتين بيضاوين يتحصل على 100 DA ومع  $DA \alpha$  التي

دفعها  $(-\alpha)$  أي  $X = 100 - \alpha$

لما اللاعب يسحب كرة بيضاء وكرة خضراء يتحصل على 50 DA ومع

$DA \alpha$  التي دفعها  $(-\alpha)$  أي  $X = 50 - \alpha$

لما اللاعب يسحب كرتين خضراوين لا يتحصل على شيء وينحسر مادفعه

$DA \alpha$  أي  $(-\alpha)$  أي  $X = -\alpha$

وعليه  $X = \{100 - \alpha, 50 - \alpha, -\alpha\}$

| $X = X_i$    | $100 - \alpha$               | $50 - \alpha$                 | $-\alpha$                    |
|--------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| $P(X = X_i)$ | $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ | $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ | $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ |

• تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ :

ب- حساب الأمل الرياضي  $E(X)$  للمتغير العشوائي  $X$

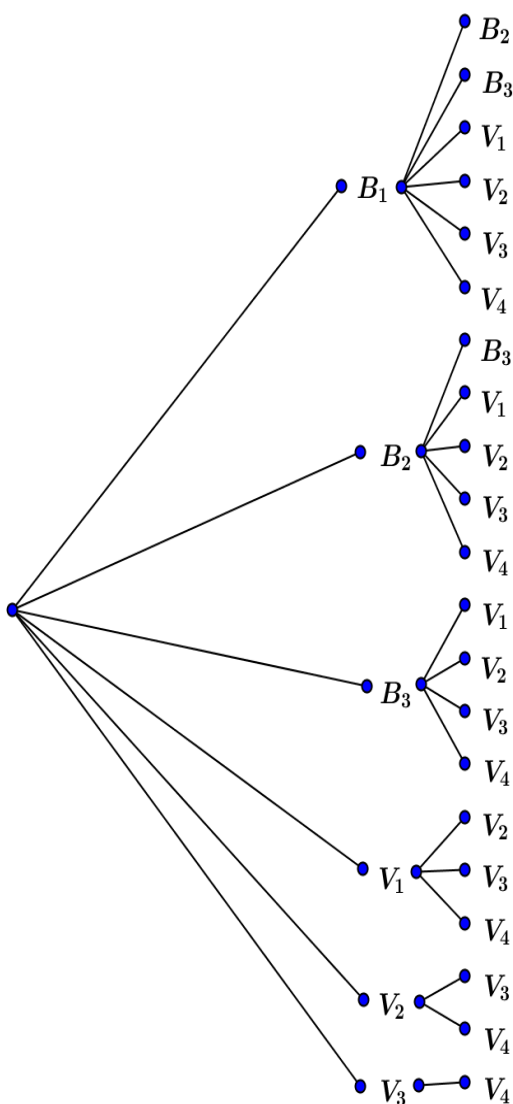
$$E(X) = (100 - \alpha) \times \frac{1}{7} + (50 - \alpha) \times \frac{4}{7} + (-\alpha) \times \frac{2}{7}$$

$$E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$$

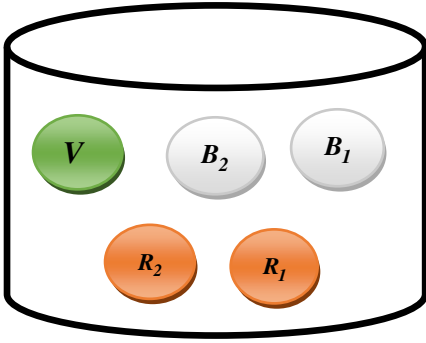
• اللعبة تكون مربحة للاعب إذا كان  $E(X) > 0$  إذن نحل المتراجحة

$$E(X) > 0 \text{ أي } -\alpha + \frac{300}{7} > 0 \text{ وعليه } \alpha < \frac{300}{7} \text{ ومنه أكبر قيمة لـ}$$

$\alpha$  حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب هي 42 DA.



## حل الجزء الثاني:



ننزع من الصندوق ثلاث كريات خضراء و كرية بيضاء و نضيف كرتين حمراوين للصندوق ، الكرات متماثلة و لا نميز بينها باللمس ونسحب منه كرتين على التوالي مع إرجاع.

1. شكل شجرة الإمكانات.

2. حساب احتمال الأحداث التالية:

$C$ : " سحب كرة على الأقل حمراء "  $C = \{(R; \bar{R}), (R; R)\}$  ومنه

$$P(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{16}{25}$$

$\bar{R}$  تعني الكرة ليست حمراء.

$D$ : " سحب كرتين خضراء على الأكثر "

$$P(D) = \frac{\text{card}D}{\text{card}\Omega} = \frac{25}{25} = 1 \quad \text{ومنه} \quad D = \{(V; V), (V; \bar{V}), (\bar{V}; \bar{V})\}$$

$\bar{V}$  تعني الكرة ليست خضراء.

الإستنتاج: نستنتج أن  $D$  حدث أكيد .

4. ليكن  $T$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة عدد الألوان المتحصل عليها.

• عین قانون احتمال  $T$

قيم هي  $T$ :

لما نسحب كرتين من نفس اللون  $(R; R)$  أو  $(B; B)$  أو  $(V; V)$  نتحصل على لون واحد

أي  $T = 1$

لما نسحب كرتين مختلفتين في اللون  $(B; R)$  أو  $(B; V)$  أو  $(R; V)$

مع مراعات الترتيب نتحصل على لونين أي  $T = 2$

ومنه  $T = \{1, 2\}$

وعليه

| $T = T_i$    | 1              | 2               |
|--------------|----------------|-----------------|
| $P(T = T_i)$ | $\frac{9}{25}$ | $\frac{16}{25}$ |

• حساب الأمل الرياضي  $E(X)$ :

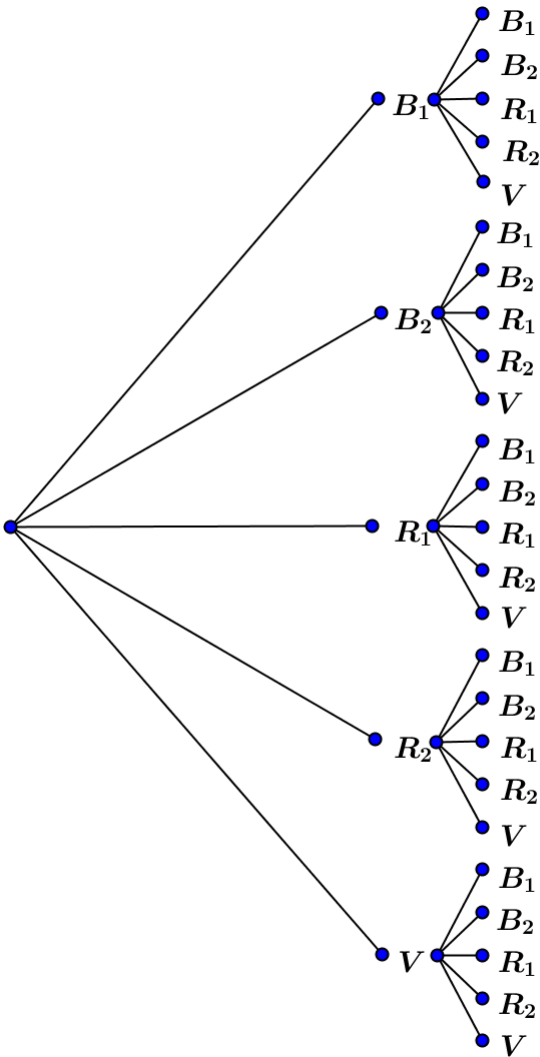
$$E(X) = \sum T_i \times P(T = T_i) = (1) \left( \frac{9}{25} \right) + (2) \left( \frac{16}{25} \right) = \frac{41}{25}$$

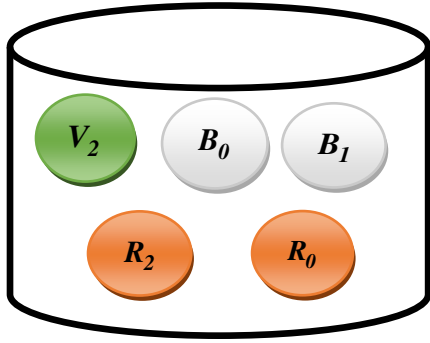
• حساب التباين  $V(X)$ :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (1^2) \left( \frac{9}{25} \right) + (2^2) \left( \frac{16}{25} \right) - \left( \frac{41}{25} \right)^2 = \frac{144}{625}$$

• حساب الإنحراف المعياري للمتغير  $\sigma(X)$ .

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{144}{625}} = \frac{12}{25}$$





## حل الجزء الثالث:

نرقم الكريات الموجودة في الصندوق حيث كرتين بيضاوين تحملان الرقمين 1 و 0 و كرتين حمراوين تحملان الرقمين 2 و 0 و الكرة الخضراء تحمل الرقم 2 كل الكرات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس نسحب من الكيس كرتين على التوالي دون الارجاع .

1. شكل شجرة الإمكانيات

2. حساب احتمال الأحداث التالية:

$E = \{(B; R); (B; V); (R; V)\}$  أي "الكرتان مختلفتان في اللون أي"

$$P(E) = \frac{\text{card}E}{\text{card}\Omega} = \frac{16}{20}$$

$F = \{(0; 0), (2; 2)\}$  "الكرتان من نفس الرقم"

$$P(F) = \frac{\text{card}F}{\text{card}\Omega} = \frac{4}{20}$$

$G = \{(0; \bar{0}), (0; 0)\}$  "سحب كرتين جداءهما معدوم"

$$P(G) = \frac{\text{card}G}{\text{card}\Omega} = \frac{14}{20}$$

( $\bar{0}$  تعني الكرة لا تحمل الرقم 0)

3. حساب  $p(E \cap F)$

$E \cap F = \{(B_0; R_0); (R_2; V_2)\}$  "الكرتان مختلفتان في اللون وتحملان نفس الرقم"

$$P(E \cap F) = \frac{\text{card}E \cap F}{\text{card}\Omega} = \frac{4}{20}$$

• استنتاج احتمال الحدث :  $p(E \cup F)$

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$$

$$p(E \cup F) = \frac{16}{20} + \frac{4}{20} - \frac{4}{20}$$

$$p(E \cup F) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

4. ليكن  $Y$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين جداء الرقمين المسجلين عليها.

أ- تعيين قانون احتمال  $Y$  :

عند سحب كرتين إحداهما أو كلاهما يحمل رقم 0 فإن جداءهما يساوي 0 وعليه  $Y = 0$ .

عند سحب كرة تحمل رقم 1 والأخرى تحمل رقم 2 فإن جداءهما يساوي 2 وعليه  $Y = 2$ .

عند سحب كرتين كلاهما يحمل رقم 2 فإن جداءهما يساوي 4 وعليه  $Y = 4$ .

$$Y = \{0; 2; 4\} \text{ إذن}$$

| $Y = y_i$    | 0                              | 2                            | 4                             |
|--------------|--------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| $P(Y = y_i)$ | $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$ | $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ | $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ |

- حساب الأمل الرياضي لـ  $Y$ :

$$E(Y) = \sum y_i \times p_i$$

$$E(Y) = (0)\left(\frac{14}{20}\right) + (2)\left(\frac{4}{20}\right) + (4)\left(\frac{2}{20}\right)$$

$$E(Y) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

- إستنتاج  $E(2023Y + 1444) = 2023E(Y) + 1444 = \frac{15312}{5}$  :  
ب- حساب  $P(Y^2 + Y - 2 = 0)$

$$P(Y^2 + Y - 2 = 0) = P(Y = 1) + P(Y = -2)$$

$$P(Y^2 + Y - 2 = 0) = P(\emptyset) + P(\emptyset) \quad Y^2 + Y - 2 = 0 \text{ معناه } Y = 1 \text{ أو } Y = -2 \text{ ومنه}$$

$$P(Y^2 + Y - 2 = 0) = 0 + 0 = 0$$

5. ليكن  $Z$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

أ- تعيين قيم  $Z$ :

عند سحب كرتين حمراوين يتبقى في الكيس صفر كرية حمراء أي  $Z = 0$

عند سحب كرية حمراء و كرية ليست حمراء يتبقى في الكيس كرية حمراء واحدة فقط أي  $Z = 1$

عند سحب كرتين كلاهما ليست حمراء يتبقى في الكيس كرتين حمراوين أي  $Z = 2$

وعليه  $Z = \{0; 1; 2\}$

ب- تعيين قانون احتمال  $Z$ .

| $Z = z_i$    | 0                             | 1                             | 2                             |
|--------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $P(Z = z_i)$ | $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ | $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ | $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ |

ت- حساب  $P(Z^2 - Z \leq 0)$ :

$$Z^2 - Z \leq 0 \text{ لـ } Z \in [0; 1] \text{ ومنه } Z = 0 \text{ أو } Z = 1$$

$$P(Z^2 - Z \leq 0) = P(Z = 0) + P(Z = 1)$$

$$P(Z^2 - Z \leq 0) = \frac{2}{20} + \frac{12}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

إذن