

ملخص محور الاحتمالات

إذا كان	نقول إن
$A = \Omega$	A هي الحادثة الأكيدة.
$A = \phi$	A هي الحادثة المستحيلة.
$C = A \cap B$	C هي الحادثة A و B .
$C = A \cup B$	C هي الحادثة A أو B .
$(B = \Omega - A)$ ، $B = \bar{A}$	B الحادثة المعاكسة لـ A .
$A \cap B = \phi$	الحادثتين A و B غير متلائمتين.
نقول عن p إنه قانون احتمال على Ω إذا وفقط إذا كان : $\sum_{i=1}^n p_i = 1$	
من أجل كل حادثتين غير متلائمتين A و B فإن :	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
(Ω, p) فضاء احتمالي و A و B حادثتان. 1. $p(\phi) = 0$. 2. $0 \leq p(A) \leq 1$. 3. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. 4. إذا كان $A \subset B$ فإن : $p(A) \leq p(B)$. 5. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.	الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي المعروف بـ : $E(X) = \sum p_i x_i$. التباين: $V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ الانحراف المعياري: $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ خواص $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$  $E(aX + b) = aE(X) + b$  $\sigma(aX) = a \sigma(X)$ و $Var(aX) = a^2 Var(X)$  $\sigma(X + b) = \sigma(X)$ و $Var(X + b) = Var(X)$ 
الأحتمال الشرطي احتمال الحادثة B علما أن A (أي الحادثة A محققة) هو العدد الحقيقي $p_A(B)$ المعروف كما يلي	$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ الأحتمال الشرطي
الحوادث المستقلة نقول عن الحادثتين A و B إنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان تحقق إحدهما لا يغير من احتمال تحقق الأخرى.	$P_B(A) = P(A)$ و $P_A(B) = P(B)$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
دستور الاحتمالات الكلية	$p(B) = \sum_1^n p(B \cap A_i) = \sum_1^n p(A_i) \times p_{A_i}(B)$
دستور ثنائي الحد : من أجل كل عددين حقيقيين a و b و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n	$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ $(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n$

المجموعات	سحب من كيس	تشكيل لجان	تشكيل أعداد	الطريقة/ المطلوب
//	على التوالي مع الإعادة	//	الأرقام يمكن أن تتكرر	القوائم عدد القوائم n^p يمكن استعمال شجرة الإحتمالات
//	على التوالي دون إعادة	المهام محددة	الأرقام لا تتكرر	الترتيبات عدد الترتيبات $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$ وهي جداء p حد انطلاقا من العدد الطبيعي n نزولا مثال $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ أي جداء عددين انطلاقا من العدد 4 نزولا مثال $A_n^3 = n \times (n-1) \times (n-2)$ أي جداء ثلاث أعداد انطلاقا من العدد n نزولا نستعمل الآلة الحاسبة لحساب الترتيبات
أجزاء مجموعة	في آن واحد	المهام غير محددة	//	التوفيقات عدد التوفيقات $C_n^k = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$ مثال $C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ أي جداء عددين انطلاقا من العدد 4 نزولا قسمة 2 عاملي مثال $C_n^3 = \frac{A_n^3}{3!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$

تمارين محور الاحتمالات الواردة في شهادة البكالوريا

أولا شعبة علوم تجريبية

التمرين 01: بكالوريا شعبة علوم 2024 - الموضوع الأول-

يحتوي كيس على 11 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي : كريتان بيضاوان مرقمتان ب : 1، 3 وأربع كريات حمراء مرقمة ب : 0، 1، 1، 3 وخمس كريات خضراء مرقمة ب : 0، 1، 3، 4. (I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الكيس ونعتبر الأحداث الآتية :

A "الحصول على 3 كريات من نفس اللون" ، B "الحصول على 3 كريات جداء أرقامها عدد فردي" ، C "الحصول على 3 كريات جداء أرقامها عدد فردي"

$$(1) \text{ أ - أحسب } P(A) \text{ احتمال الحادثة } A \text{ وبين أن : } P(B) = \frac{56}{165} \text{ ثم استنتج } P(C).$$

ب - أحسب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$.

(2) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات ، عدد الكريات التي تحمل رقما زوجيا . أ - عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$. ب - أحسب احتمال الحادثة $(X > 1)$.

(II) نسحب الآن من الكيس عشوائيا 3 كريات على التوالي وبدون إرجاع . أحسب احتمال الحادثة D : "الحصول على 3 كريات جداء أرقامها معدوم"

التمرين 02: بكالوريا شعبة علوم 2024 - الموضوع الثاني-

يحتوي كيس على 5 قطع كهربائية غير متميزة ولا نفرق بينها باللمس ، منها 3 قطع سليمة وقطعتان غير سليمتين .

نرمز إلى القطعة السليمة بالرمز S وإلى القطعة غير السليمة بالرمز $\bar{S}$.

نسحب عشوائيا من الكيس 3 قطع على التوالي مع الإرجاع ، ونعتبر الحوادث :

A "القطعة الأولى المسحوبة سليمة" ، B "سحب قطعة واحدة فقط سليمة"

C "القطعة الثالثة المسحوبة سليمة"

(1) شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة .

$$(2) \text{ أحسب } P(A) \text{ و } P(B) \text{ احتمالي الحادثتين } A \text{ و } B \text{ ثم بين أن : } P(C) = \frac{3}{5}.$$

(3) أحسب الاحتمال الشرطي $P_C(A)$. هل الحادثتان A و C مستقلتان ؟

(4) نفرق بكل قطعة سليمة العدد 10 و بكل قطعة غير سليمة العدد -10 ، ونعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق

بكل عملية سحب من الكيس لثلاث قطع مجموع الأعداد المرفقة بها .

أ - برر أن قيم المتغير العشوائي X ، هي : -30 ، -10 ، 10 ، 30 .

ب - عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين 03: بكالوريا شعبة علوم 2023 - الموضوع الأول-

يحتوي صندوق U_1 على 5 كريات تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2، 3 و يحتوي صندوق U_2 على 4 كريات تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2 . كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس

نختار عشوائيا أحد الصندوقين ونسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد .

(1) نعتبر الأحداث : A "سحب كريتتين تحملان رقمين فرديين" ، B "سحب كريتتين تحملان رقمين زوجيين"

C "سحب كريتتين إحداهما تحمل رقما فرديا والأخرى تحمل رقما زوجيا" .

أ - أنجز الشجرة التي تنمذج هذه التجربة .

$$\text{ب - بين أن : } P(A) = \frac{23}{60} \text{ و } P(B) = \frac{1}{12} \text{ ثم أحسب } P(C).$$

(2) نفرغ محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق جديد U_3 ثم نسحب منه عشوائيا كريتتين في آن واحد .

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جداء الرقمين المسجلين عليهما .

أ- برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{1; 2; 3; 4; 6\}$.

ب- عيّن قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين 04: بكالوريا شعبة علوم 2023 - الموضوع الثاني-

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، موزعة كما يلي : ثلاث كريات بيضاء مرقمة ب : 1 ، 2 ، 1 ،

وثلاث كريات حمراء مرقمة ب : 1 ، 2 ، 2 ، و أربع كريات خضراء مرقمة ب : 1 ، 2 ، 2 ، 2 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس ونعتبر الأحداث A ، B ، C الآتية :

A الحصول على كريتين من نفس اللون ، B الحصول على كرية خضراء على الأقل

C الحصول على كريتين تحملان رقمين زوجيين

(1) أ- بين أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{4}{15}$ وأن احتمال الحدث B يساوي $\frac{2}{3}$.

ب- أحسب الإحتمالين $P(C)$ و $P(A \cap C)$ ، هل الحدثان A و C مستقلان ؟

ج- استنتج احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون علما أنهما تحملان رقمين زوجيين.

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

أ- برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{2; 3; 4\}$.

ب- عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين 05: بكالوريا شعبة علوم 2021 - الموضوع الأول-

يراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 وامرأتان F_1 و F_2 .

نعتبر الأحداث A ، B ، C حيث : A "عضوا اللجنة من نفس الجنس" .

B "عضوا اللجنة من جنسين مختلفين" .

C " H_1 عضو في اللجنة" .

(1) أ- أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال A و B على الترتيب .

ب- بين أن $P(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.

(2) المتغير العشوائي X يرفق بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة .

أ- برر أن مجموعة قيم X هي : $\{0; 1; 2\}$.

ب- عيّن قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين 06: بكالوريا شعبة علوم 2021 - الموضوع الثاني-

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، مكتوب على كل منها سؤال واحد ، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة

مرقمة ب 1 ، 2 و 3 ، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة ب 1 ، 2 ، 3 و 4 و سؤالين في التحليل مرقمين ب 1 و 2 .

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الأحداث التالية :

A "سحب سؤال في الهندسة" ، B "سحب سؤال في التحليل" و C "سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا" .

(1) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الأحداث A ، B و C على الترتيب .

(2) أحسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 .

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها .

أ- برر أن مجموعة قيم X هي : $\{1; 2; 3; 4\}$.

ب- عيّن قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي .

ج- استنتج قيمة $E(2021X + 1442)$.

التمرين 07: باكوريا شعبة علوم 2020 -الموضوع الأول-

يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و 6 سوداء و يحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و 3 سوداء و كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من أحد الوعائين بالكيفية التالية :

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة و مرقمة من 1 إلى 6 ، إذا حصلنا على أحد الرقمين 3 أو 5 نسحب الكرتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكريتين من V .

نسمي A الحدث : "الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5" .

نسمي M الحدث : "الحصول على كريتين من نفس اللون" .

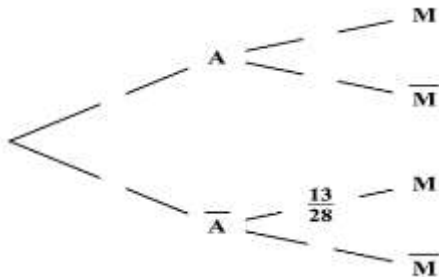
(1) تحقق $R(\bar{A})$ أن احتمال السحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

(2) علما أن الكريتين المسحوبتين من U ، بين أن احتمال أن تكونا

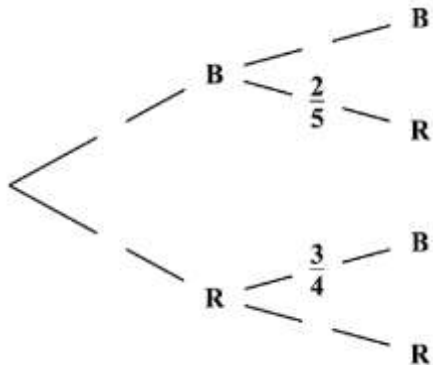
من نفس اللون هو $\frac{7}{15}$.

(3) أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة ثم أكملها واستنتج $P(M)$.

(4) أحسب $P_M(A)$ احتمال السحب من الوعاء U علما أن الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللون .

**التمرين 08: باكوريا شعبة علوم 2020 -الموضوع الثاني-**

كيس به ثلاث كريات بيضاء وكريتين حمراوين لا نميز بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية : إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس وإذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس .



(1) أ- أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة ثم أكملها .

B يرمز إلى الحصول على كرية بيضاء و R إلى

الحصول على كرية حمراء .

ب- أحسب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

أ- عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

ب- بين أن : $P(X=1) = \frac{27}{50}$ ، ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ج- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين 09: باكوريا شعبة علوم 2019 -الموضوع الأول-

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 . (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث :

A : "سحب كريتين من نفس اللون" ، B : "سحب كريتين تحملان نفس الرقم"

(1) بين أن احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B .

(2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم ؟

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .
عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي و أحسب أمله الرياضي.

التمرين 10: بكالوريا شعبة علوم 2019 - الموضوع الثاني

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

(1) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(2) بين أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.

(3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع .

ما إحتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي ؟

التمرين 11: بكالوريا شعبة علوم 2018 - الموضوع الأول

يحتوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء

مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .

نعتبر الحادثتين A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني " .

و B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " .

(1) أـ أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ إحصائيات الحادثتين A و B على الترتيب .

بـ بين أن : $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ثانيا شعبة تقني رياضي

التمرين 12: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2024 - الموضوع الأول

يحتوي صندوق على 9 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، منها : 4 بيضاء و 3 حمراء و 2 خضراوان .

(I) نسحب عشوائيا من الصندوق 3 كريات في آن واحد .

(1) أحسب إحصائيات كلا من الحوادث الآتية :

A "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون" ، B "الحصول على الألوان الثلاثة" .

C "الحصول على كرية بيضاء على الأقل" .

(2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كريات ، عدد الألوان المتحصل عليها .

أـ عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

بـ أحسب إحصائيات الحادثة $(84X + 1837)$.

(II) نضيف الآن إلى الصندوق كرية واحدة سوداء ثم نسحب منه عشوائيا 4 كريات على التوالي دون إرجاع .

بين أن إحصائيات الحادثة D : "الحصول على الألوان الأربعة" هو $\frac{4}{35}$.

التمرين 13: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2024 - الموضوع الثاني

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس منها :

كريتان تحملان الرقم 0 ، ثلاث كريات تحمل الرقم 2 ، كرية تحمل الرقم 3 و أربع كريات تحمل الرقم 4 .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

(1) أحسب احتمال كلا من الحوادث الآتية :

A "مجموع الأعداد التي تحملها الكريات المسحوبة يساوي 12"

B "الحصول على ثلاثة أعداد أولية"

C "جاء الأعداد التي تحملها الكريات المسحوبة معدوم"

(2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الأعداد الأولية المتحصل عليها .

أ- عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب- أحسب احتمال الحادثة $(X^2 > 9)$.

التمرين 14: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2023 -الموضوع الأول-

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، موزعة كما يلي :

ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : 0 ، 1 ، 1 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ :

1 ، 2 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس ونعتبر الأحداث A ، B و C الآتية :

A " الحصول على كريتين من نفس اللون " ، B " الحصول على كرية حمراء على الأقل "

C "الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما يساوي 3"

(1) أ- بين أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{1}{4}$. وأن احتمال الحدث B يساوي $\frac{9}{14}$.

ب- أحسب الإحتمال $P(C)$.

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

أ- برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{1; 2; 3; 4\}$.

ب- عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين 15: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2023 -الموضوع الثاني-

يحتوي كيس على 11 كرية متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، موزعة كما يلي :

ثلاث كريات تحمل الرقم 0 ، ثلاث كريات تحمل الرقم 1 و خمس كريات تحمل الرقم 2 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس ونعتبر الأحداث A ، B و C الآتية :

A " الحصول على كريتين رقم كل منهما عدد أولي " ، B " الحصول على كرية واحدة تحمل رقما فرديا "

C "الحصول على كريتين جاء رقميهما معدوم"

(1) أ- بين أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{2}{11}$ وأن احتمال الحدث B يساوي $\frac{24}{55}$.

ب- أحسب الاحتمال $P(C)$.

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جاء الرقمين المسجلين عليهما .

أ- برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0; 1; 2; 4\}$.

ب- عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

ج- أحسب احتمال الحدث : " $e^{X+6} < 2023$ " .

التمرين 16: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2020 -الموضوع الأول-

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 3 ، 3 ، 2 .

الكريات لا نفرق بينها باللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من هذا الكيس .

(1) نعتبر الحدثين : A " الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم "

و B " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون " .

أ- أحسب احتمال كلا من الحدثين A و B .

بـ. بين أن احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم و مختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.

جـ. استنتج احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم أو مختلفتين في اللون.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الرقمين الظاهريين على الكرتين المسحوبتين. عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(3) في لعبة، يقوم لاعب بسحب كرتين: إذا كان جداء رقميهما 4 يربح x^2 دينار، إذا كان جداء رقميهما 6 يخسر x^2 دينار وإذا كان جداء رقميهما 9 يخسر 130 دينار. (x و y عدنان طبيعيين غير معدومين) عيّن قيمة كلا من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة.

التمرين 17: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2020 - الموضوع الثاني

يحتوي كيس على كرتين خضراوين تحملان الرقمين 1، 2 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 2 و أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 2، 3، 3، 4. (الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

(I) نسحب من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

(1) أحسب احتمال كلا من الحدثين A و B التاليين:

A "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون" و B "الحصول على كرية بيضاء على الأقل".

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

أبين أن $P(X=3) = \frac{3}{7}$ ، ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

بـ. أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

(II) نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع.

ليكن C الحدث "الحصول على ثلاث أرقام جذاؤها زوجي".

أحسب احتمال C .

التمرين 18: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2019 - الموضوع الأول

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية. اختر الإجابة الصحيحة مبررا اختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 1، 2.

(الكريات لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا وفي آن واحد.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

(1) قيم المتغير العشوائي X هي: أ) $\{1; 2; 3\}$ ب) $\{0; 2; 3\}$ ج) $\{0; 1; 2\}$.

(2) الأمل الرياضي $E(X)$ لـ X هو: أ) $E(X) = \frac{4}{5}$ ب) $E(X) = \frac{6}{5}$ ج) $E(X) = \frac{11}{10}$.

(3) احتمال "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة"

يساوي: أ) $\frac{7}{10}$ ب) $\frac{9}{10}$ ج) $\frac{3}{5}$.

(4) احتمال "باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1"

يساوي: أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{1}{5}$.

التمرين 19: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2019 - الموضوع الثاني

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 3 و كرتين سوداوين

تحملان الرقمين 1، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق عند اللمس)

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الكيس .

(1) أحسب احتمال الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرية بيضاء واحدة " .

B : " الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر " .

C : " الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية " .

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .

ب- أحسب $P(X^2 - X \leq 0)$.

التمرين 20: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2018 - الموضوع الثاني

كيس به 7 كريات متماثلة ، لانفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و 4 خضراء .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس .

(I) 1) أحسب احتمال الحادثة A : " سحب كريتين مختلفتين في اللون " .

2) أحسب احتمال الحادثة B : " سحب كريتين من نفس اللون " .

(II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب (DA) ، α (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).

إذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، وإذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ،

و إذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه . وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

(1) بزر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{-\alpha; 50 - \alpha; 100 - \alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله .

(2) بين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو : $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$.

ثم جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

ثالثا شعبة رياضيات

التمرين 21: بكالوريا شعبة رياضيات 2024 - الموضوع الأول

يحتوي صندوق U_1 على 5 بطاقات متماثلة مرقمة ب: 1، 1، 2، 3، 3، و يحتوي صندوق U_2 على 6 كريات موزعة كما يلي :

4 كريات حمراء و 2 خضراوان . (لا نفرق بين البطاقات ولا بين الكريات باللمس)

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق .

• إذا تحصلنا على الرقم 1 نسحب عشوائيا من كرية واحدة .

• إذا تحصلنا على الرقم 2 نسحب عشوائيا من كريتين في آن واحد .

• إذا تحصلنا على الرقم 3 نسحب عشوائيا من ثلاث كريات في آن واحد .

نعتبر الحوادث الآتية

C_i "البطاقة المتحصل عليها تحمل الرقم i " حيث $i \in \{1; 2; 3\}$.

A "الحصول على كريات حمراء فقط "

B "الحصول على كريات خضراء فقط "

D "الحصول على كريات ليست كلها من نفس اللون"

(1) أ- بين أن : $P_2(B) = \frac{1}{15}$ و $P_3(B) = \frac{4}{5}$.

ب- أنقل واملأ شجرة الإحتمالات المقابلة .

ج- أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(D)$.

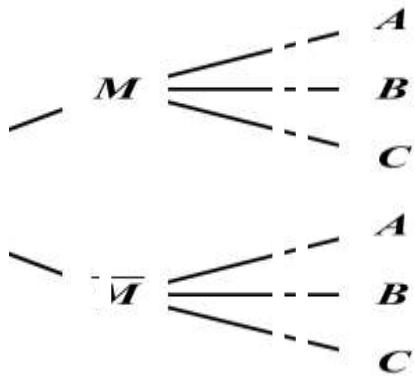
(2) أحسب احتمال أن تكون البطاقة المتحصل عليها تحمل الرقم 3 علما أن الكريات المسحوبة حمراء .

(3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المتحصل عليها .

- عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب الأمل الرياضي $E(75X+1917)$.
- (4) إذا كان عدد الكريات الحمراء في الصندوق U_2 هو $n+4$ حيث n عدد طبيعي.
- جد قيمة n التي من أجلها يكون $P_G(A) = \frac{7}{15}$.

التمرين 22: بكالوريا شعبة رياضيات 2024 - الموضوع الثاني

- يحتوي صندوق U_1 على 7 كريات منها : 3 كريات بيضاء و 4 كريات حمراء و يحتوي صندوق U_2 على 7 كريات منها : كريتان بيضاوان و 5 كريات حمراء . (جميع الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس) نلقى نردا متوازنا أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 و نسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي .
- إذا ظهر رقم مضاعف للعدد 3 ، نسحب عشوائيا من الصندوق U_1 كريتين على التوالي دون إرجاع .
 - في الحالات الأخرى ، نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتتين على التوالي دون إرجاع .
- نعتبر الحوادث الآتية :



- M "ظهور رقم مضاعف للعدد"
- A "الحصول على كريتتين بيضاوين"
- B "الحصول على كريتتين حمراوين"
- C "الحصول على كريتتين من لونين مختلفين"
- (1) أنقل واملأ شجرة الإحتمالات المقابلة .
- (2) نعتبر الحادثتين :

- G "الحصول على كريتتين من نفس اللون"
- H "الحصول على كرية حمراء على الأقل"
- بين أن $P(G) = \frac{31}{63}$ ثم أحسب $P(H)$.

- (3) أحسب $P_G(M)$ إحتمال ظهور رقم مضاعف للعدد 3 علما أن الكريتتين المسحوبتين من نفس اللون .
- (4) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتتين عدد الألوان المتحصل عليها .
- عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب الأمل الرياضي $E(63X+1350)$.

التمرين 23: بكالوريا شعبة رياضيات 2023 - الموضوع الأول

- يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، منها كريتان حمراوان مرقمتان ب : 2 ، 3 - وخمس كريات بيضاء مرقمة ب : 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 - وثلاث كريات خضراء مرقمة ب : 0 ، 1 ، 2 .
- نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس و نعتبر الأحداث A ، B ، C الآتية :
- A "الحصول على 3 كريات من نفس اللون "
- B "الحصول على الألوان الثلاثة "
- C "الحصول على 3 كريات مجموع أرقامها معدوم"

(1) أ - أحسب $P(A)$ و $P(C)$ ثم بين أن : $P(C) = \frac{3}{20}$

ب - أحسب $P(A \cap C)$ ثم استنتج $P_G(A)$.

- (2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الألوان المتحصل عليها .
- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.
- (3) نسحب الآن عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي وبارجاع .
- أحسب إحتمال الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها معدوم .

التمرين 24: بكالوريا شعبة رياضيات 2023 - الموضوع الثاني

- يحتوي صندوق U على كريتتين حمراوين وكريتتين خضراوين و يحتوي صندوق V على كريتتين حمراوين وثلاث كريات خضراء . كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس
- نسحب عشوائيا كريتتين في آن واحد من أحد الصندوقين بالكيفية الآتية :
- نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس به 10 بطاقات متماثلة و مرقمة من 1 إلى 10 .

إذا تحصلنا على عدد أولي نسحب الكريتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكريتين من V .

(1) نعتبر الأحداث A ، B و C الآتية :

A "سحب كريتين حمراوين" ، B "سحب كريتين خضراوين" و C "سحب كريتين من لونين مختلفين".
أ- أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة.

ب- بين أن $R(B) = \frac{19}{150}$ و $R(B) = \frac{37}{150}$ ثم استنتج $R(C)$.

(2) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المتحصل عليها.

أ- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب- أحسب احتمال الحدث : " $\ln X \leq 1$ ".

التمرين 25: باكالوريا شعبة رياضيات 2021 - الموضوع الأول

كيس به كرية 12 متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

كل من الكريات الإثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية : 1، 2، 3 و 4.

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس.

نرمز بـ P_i إلى احتمال سحب كرية رقمها i ، حيث : $P_1 = \frac{1}{3}$ ، $P_2 = \frac{1}{6}$ ، $P_3 = \frac{1}{4}$ و $P_4 = \frac{1}{4}$.

(1) وزع الكريات الإثنتي عشرة حسب الأرقام 1، 2، 3 و 4.

(2) أحسب احتمال كلا من الأحداث A ، B و C الآتية : A "سحب كرية تحمل رقما فرديا".

B "سحب كرية تحمل رقما من أرقام نظام التعداد ذي الأساس 4".

C "سحب كرية رقمها حل للمعادلة $x^2 = 2^x$ ".

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب لكرية الرقم الذي تحمله.

عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي.

التمرين 26: باكالوريا شعبة رياضيات 2021 - الموضوع الثاني

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 وأربع نساء F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4 .

(1) بين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو : 42.

(2) نعتبر الأحداث الآتية :

B : "اللجنة من جنسين مختلفين".

A : "اللجنة من نفس الجنس".

E : "اللجنة لا تضم كلا من H_1 و F_1 ".

C : " H_1 هو الرئيس".

أ- أحسب $R(A)$ احتمال الحدث A ثم استنتج $R(B)$.

ب- أحسب $R(C)$ و $R(E)$.

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها. عين قانون احتمال X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي.

التمرين 27: باكالوريا شعبة رياضيات 2020 - الموضوع الأول

صندوق به 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء. (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

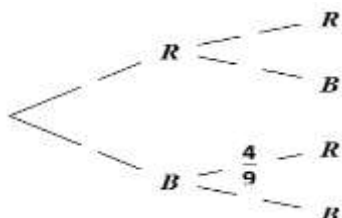
نسحب من الصندوق كرية واحدة بحيث : إذا ظهرت كرية حمراء نعيدها إلى الصندوق ونضيف له كرية بيضاء وإذا

ظهرت كرية بيضاء نعيدها إلى الصندوق ونضيف له كرية حمراء، ونكرر العملية مرة ثانية.

(1) أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه التجربة ثم أكملها.

(2) بين أن احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

(3) أحسب احتمال أن يوجد بالصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.



(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العملية الثانية .

أ- بزر أن قيم المتغير العشوائي هي : 5 ، 6 ، و 7 .

ب- عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي .

التمرين 28: باكالوريا شعبة رياضيات 2020 - الموضوع الثاني

يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها : n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي و $n \geq 2$)

و 4 كريات حمراء تحمل الأعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و π و كريتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$.

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الصندوق .

(1) أ- أحسب إحتمال كلا من الحدثين A و B حيث :

A " سحب كريتين من نفس اللون " و B " سحب كريتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون " .

ب- عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $P(A) = \frac{17}{55}$.

(2) نفرض فيما يلي : $n=5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين .

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد : $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

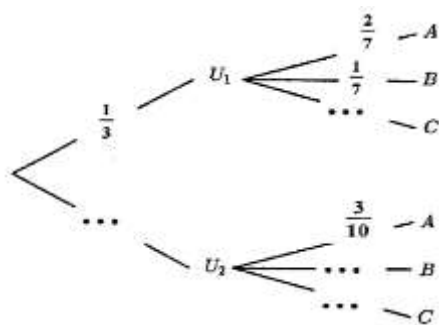
أ- بزر أن قيم المتغير العشوائي X هي : $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ و 1 .

ب- بين أن : $P(X=0) = \frac{27}{55}$.

ج- عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين 29: باكالوريا شعبة رياضيات 2019 - الموضوع الثاني

صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 ، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و ثلاث كريات سوداء و يحتوي الصندوق



U_2 على 3 كريات حمراء و كريتين سوداوين . (كل الكريات متشابهة)

نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 .

إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1

و في باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2 .

نعتبر الأحداث A ، B و C المعرفة بـ :

A : " سحب كريتين حمراوين " .

B : " سحب كريتين سوداوين " .

C : " سحب كريتين من لونين مختلفين " .

(1) أنقل و أكمل شجرة الإحتمالات .

(2) أحسب إحتمالات الأحداث A ، B و C .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

(3) أ- عين قيم المتغير العشوائي X .

ب- عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

(4) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين 30: باكالوريا شعبة رياضيات 2018 - الموضوع الثاني

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 و

و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 3 ، 2 ، 3 و كرية بيضاء مرقمة بـ : 1- .

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد .

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " .

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " .

C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله .

ب- أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

ج- أحسب احتمال الحادثة : " $X^2 - X > 0$ " .

التمرين 31: بكالوريا شعبة رياضيات 2009 - الموضوع الأول

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء .

(1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد .

أ- أحسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء .

ب- أحسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي .

التمرين الشامل الرابع في الإحتمالات

يحتوي صندوق U_1 على ستة كريات حمراء مرقمة 2، 2، 2، 4، 4، 2 و أربع كريات سوداء مرقمة 0، 2، 4، 4، 4، 0

يحتوي صندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة 0، 0، 1 و كرية سوداء تحمل الرقم 2 و كرية بيضاء تحمل الرقم 3

الجزء الأول : نسحب عشوائيا على التوالي ودون ارجاع 3 كريات من الصندوق U_1

1- شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية (شجرة تخص الألوان فقط)

2- أحسب احتمال الحادثة A حادثة الحصول على 3 كرات حمراء

3- أحسب احتمال الحادثة B حادثة الحصول على كرية حمراء على الأقل

الجزء الثاني : نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

1- علما أن الكرية المسحوبة من U_2 سوداء ما هو احتمال سحب كرية حمراء على الأقل

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ- بين أن قيم المتغير العشوائي X هي 0 و 1

ب- احسب الأمل الرياضي ثم استنتج $E(1445X + 2024)$

ج- أحسب $P((\ln X)^2 - \ln X \leq 0)$

الجزء الثالث : نضيف n كرة سوداء الى الصندوق U_1 و n كرة حمراء الى الصندوق U_2

نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

لتكن C حادثة الحصول على كريتين من نفس اللون - عين قيمة n حتى يكون $P(C) = \frac{3}{7}$

الجزء الرابع : نعتبر الحالة الأولى لصندوق، نسحب عشوائيا أربعة كريات في آن واحد من الصندوق U_1 ونعتبر الحوادث

التالية : نعتبر الحادثة D حادثة الحصول على أربع كريات من نفس اللون ."

والحادثة E حادثة الحصول على أربع كريات تحمل نفس الرقم ."

والحادثة F "حادثة الحصول على اربع كريات يمكن أن تشكل 2024".

1- أحسب $P(D)$. $P(E)$ و $P(F)$ احتمال الحوادث F, E, D على الترتيب

2- علما أن الكريات الأربعة المسحوبة من نفس الرقم ما هو احتمال أن تكون من نفس اللون

الجزء الخامس : نسحب عشوائيا كريتين على التوالي بإرجاع من الصندوق U_2 ونعتبر الحوادث التالية

نعتبر الحادثة G "حادثة الحصول على كريتين من نفس اللون".

والحادثة H "حادثة الحصول على كريتين تحملان رقما فرديا".

والحادثة I "حادثة الحصول على كرية بيضاء على الأقل".

1- أحسب $P(G)$. $P(H)$ و $P(I)$ احتمال الحوادث I, H, G على الترتيب

2- نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل عملية سحب كريتين القيمة المطلقة لطرح العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين

أ- بين أن قيم المتغير العشوائي Y هي 0; 1; 2; 3

ب- بين أن $P(Y = 0) = \frac{7}{25}$ ثم عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي Y

ج- أحسب الأمل الرياضي $E(Y)$. التباين $V(Y)$ والانحراف المعياري $\delta(Y)$

د- استنتج كل من $V(Y + 1962)$ و $V(-2Y)$ و $\delta(-1954Y)$

هـ- استنتج احتمال الحادثة $P(e^{2Y} - 4e^Y + 3 = 0)$

و- أحسب $P(Y > \int_0^1 \frac{1}{Y+1} . dY)$

الجزء السادس : نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم 1 من إلى 6 مرة واحدة إذا ظهر أحد الأرقام 6 أو 3 نسحب كريتين على التوالي دون ارجاع من صندوق U_1 وإذا ظهر رقم آخر نسحب كريتين على التوالي بإرجاع من الصندوق U_2

1) شكل شجرة الإحتمال التي تنمذج هذه التجربة

2) ما هو احتمال الحادثة w حادثة سحب كريتين من نفس اللون

3) ما هو احتمال الحادثة S حادثة سحب كريتين مختلفتين في اللون

4) علما أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون ما هو احتمال أن تكونا من الصندوق U_1

الجزء السابع : نجمع كل الكريات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها في صندوق U_3 ونسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كريات من الصندوق U_3 ونعتبر الحوادث التالية

نعتبر الحادثة J "حادثة الحصول على ثلاث كريات تحمل رقما فردي".

والحادثة K "حادثة الحصول على ثلاث كريات تحمل رقما زوجي".

والحادثة L "حادثة الحصول على ثلاث كريات مجموع الأرقام الظاهرة عليها زوجي".

1- أحسب $P(J)$. $P(K)$ و $P(L)$ احتمال الحوادث J, K, L على الترتيب

أ- نعتبر المتغير العشوائي Z الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كريات عدد الكرات التي تحمل رقما زوجيا عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي Z

ب - نضيف الى الصندوق n كرية بيضاء , حيث $n \geq 2$ نعتبر الحدث M : الحصول على ثلاث كريات بيضاء

أحسب : $P(M)$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(M)$ وماذا تستنتج

الجزء الثامن : يتواجد في قاعة النشاطات بالثانوية 30 تلميذا منهم 10 ذكور من بينهم محمد و 20 اناث من بينهم فاطمة نريد تشكيل لجنة تضم ثلاث تلاميذ للمساعدة في انجاح تظاهرة يوم العلم و تسند مهام لهم المنشط والمنظم ومسؤول النشاطات ماهي عدد اللجان الممكن تشكيلها

ما هو احتمال أن تكون أعضاء اللجنة من نفس الجنس

ما هو احتمال أن تضم اللجنة محمد

ما هو احتمال أن تضم اللجنة محمد و فاطمة معا

ما هو احتمال أن لا تضم اللجنة أحمد و فاطمة معا

ما هو احتمال أن يكون محمد مسؤول النشاطات

الجزء التاسع : نفس أسئلة الجزء الثامن تشكيل لجنة تضم ثلاث تلاميذ دون تحديد المهام

الجزء العاشر : أحسب مايلي :

1- المجموع $S_n = C_{n+2}^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 2^{n+1} \times 3 + \dots + C_{n+2}^{n+2} 3^{n+2}$

2- المجموع $S_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k$

3- المجموع $S_n = C_{n+2}^2 2^2 + C_{n+2}^3 2^3 + \dots + C_{n+2}^{n+2} 2^{n+2}$

4- معامل x^5 في منشور العبارة $(2x^2 + \frac{3}{x})^7$

5- الحد الذي درجته 10 في منشور العبارة $(x-2)^{15}$

6- A و B حدثان غير متلائمين من فضاء العينة Ω حيث : $P(\bar{A}) = 2P(\overline{A \cup B}) = 0,75$ أحسب احتمال الحدث B

7- A و B حدثان مستقلان حيث : $P_A(B) = 0,2$ و $P(A \cup B) = 0,48$ ، أحسب احتمال الحدث A



تحميل الحل

التصحيح المقترح للمسألة الشاملة في الإحتمالات

الجزء الأول: يحتوي صندوق U_1 على ستة كريات حمراء مرقمة 2، 2، 2، 2، 4، 4 و أربع كريات سوداء مرقمة

4، 4، 2، 0

يحتوي صندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة 0، 0، 1 وكريّة سوداء تحمل الرقم 2 وكريّة بيضاء تحمل الرقم

3 نسحب عشوائيا على التوالي ودون ارجاع 3 كريات من الصندوق U_1

1- تشكيل شجرة الإحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية

2- حساب احتمال الحادثة A حادثة الحصول على 3 كرات حمراء

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

3- حساب احتمال الحادثة B حادثة الحصول على كريّة حمراء على الأقل

نستخدم الحادثة المعاكسة $\bar{B}$ لم نسحب أي كرة حمراء

أي سحب ثلاث كرات سوداء

$$P(\bar{B}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

ملاحظة هامة: يكمن استعمال الترتيبات لحل السؤالين السابقين على النحو الآتي:

حساب احتمال الحادثة A حادثة الحصول على 3 كرات حمراء

$$P(A) = \frac{A_6^3}{A_{10}^3} = \frac{1}{6}$$

حساب احتمال الحادثة B حادثة الحصول على كريّة حمراء على الأقل الطريقة الأولى

أي سحب كريّة حمراء وكريتين سوداوين مع مراعاة ترتيبهم (RNN, NRN, NNR) أي نضرب في 3

أو سحب كريتين حمراوين وكريّة سوداء مع مراعاة ترتيبهم (RRN, NRR, RNR) أي نضرب في 3

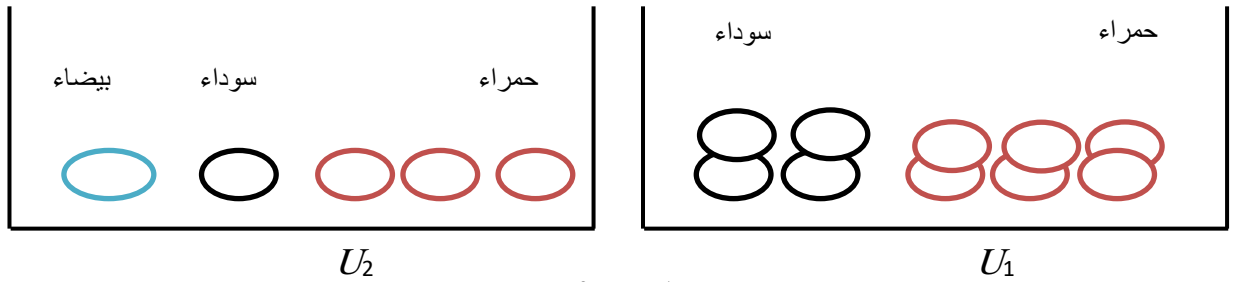
أو سحب ثلاث كريات حمراء RRR

$$P(B) = \frac{3(A_6^1 \times A_4^2) + 3(A_6^2 \times A_4^1) + A_6^3}{A_{10}^3} = \frac{29}{30}$$

الطريقة الثانية نستخدم الحادثة المعاكسة $\bar{B}$ لم نسحب أي كرة حمراء أي سحب ثلاث كرات سوداء

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \quad P(\bar{B}) = \frac{A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

الجزء الثاني : نسحب عشوائيا كرتين في ان واحد من الصندوق U_1 وكريّة واحدة من الصندوق U_2



عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هي : $C_{10}^2 \times C_5^1 = 225$

1- علما أن الكريّة المسحوبة من U_2 سوداء ماهو احتمال سحب كريّة حمراء على الأقل

احتمال شرطي نسمي الكريّة المسحوبة من U_2 سوداء بالحادثة N

نسمي سحب كريّة حمراء على الأقل بالحادثة R

$$P_N(R) = \frac{P(R \cap N)}{P(N)}$$

$P(R \cap N)$ ماهو احتمال سحب كريّة حمراء على الأقل و الكريّة المسحوبة من U_2 سوداء

$$P(R \cap N) = \frac{C_1^1}{C_5^1} \times \frac{C_6^2 + C_6^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{39}{225} = \frac{13}{75}$$

$P(N)$ ماهو احتمال سحب كريّة سوداء من الصندوق U_2

$$P(N) = \frac{C_1^1}{C_5^1} \times \frac{C_{10}^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$$

$$P_N(R) = \frac{P(R \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{13}{75}}{\frac{1}{5}} = \frac{13}{15}$$

ومنه الاحتمال الشرطي

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة

أ- قيم المتغير العشوائي X هي 0 اذا لم نسحب أي كريّة بيضاء و 1 اذا سحبنا كريّة بيضاء

تعيين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

$$P(X = 1) = \frac{C_1^1}{C_5^1} \times \frac{C_{10}^2}{C_{10}^2} = \frac{45}{225} = \frac{1}{5} \text{ و } P(X = 0) = \frac{C_4^1}{C_5^1} \times \frac{C_{10}^2}{C_{10}^2} = \frac{39}{225} = \frac{4}{5}$$

بد حساب الأمل الرياضي: $E(X) = 0 \times \frac{4}{5} + 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ استنتاج قيمة $E(1445X + 2024)$

$$E(1445X + 2024) = 1445 \times \frac{1}{5} + 2024 = 2313$$

ج- حساب $P((\ln X)^2 - \ln X \leq 0)$ نقوم أولا بحل المتراجحة $(\ln X)^2 - \ln X \leq 0$ أي أن

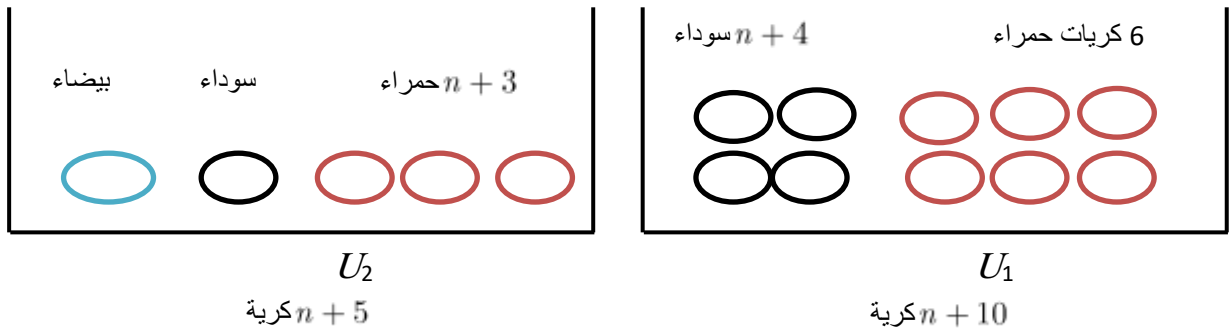
$$(\ln X)(\ln X - 1) \leq 0$$

حلول المتراجحة هي : $[1; e]$ ومنه قيم المتغير العشوائي التي تنتمي الى هذا المجال هي $X = 1$

$$P((\ln X)^2 - \ln X \leq 0) = P(X = 1) = \frac{1}{5}$$

ومنه

الجزء الثالث : نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 و n كرية حمراء الى الصندوق U_2



نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2 لتكن C حادثة الحصول على كريتين من نفس اللون ومنه (سحب كرية حمراء من الصندوق U_1 و كرية حمراء من الصندوق U_2) أو (سحب كرية سوداء من الصندوق U_1 و كرية سوداء من الصندوق U_2)
ملاحظة: في حالة سحب كرية واحدة لا يهم طريقة السحب نستعمل إما القائمة أو الترتيب أو مخطط لتعيين الإحتمال

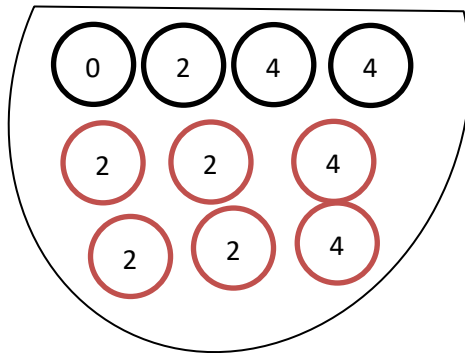
$$P(C) = \frac{6}{n+10} \times \frac{n+3}{n+5} + \frac{n+4}{n+10} \times \frac{1}{n+5} = \frac{7n+22}{n^2+15n+50}$$

تعيين قيمة n حتى يكون $P(C) = \frac{3}{7}$ نضع $\frac{7n+22}{n^2+15n+50} = \frac{3}{7}$ تكافئ $3n^2 + 45n + 150 = 49n + 154$

تكافئ $3n^2 - 4n - 4 = 0$ باستعمال المميز نجد الحل الأول مرفوض لأن n عدد طبيعي $n = -\frac{2}{3}$

و الحل الثاني مقبول $n = 2$

أي ان قيمة n حتى يكون $P(C) = \frac{3}{7}$ هي $n = 2$



الجزء الرابع :

نسحب عشوائيا أربعة كريات في ان واحد من الصندوق U_1

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

نعتبر الحادثة D حادثة الحصول على اربع كريات من نفس اللون $RRRR$ أو $NNNN$

$$P(D) = \frac{C_6^4 + C_4^4}{210} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$$

الحادثة E حادثة الحصول على اربع كريات تحمل نفس الرقم 4444 أو 2222

$$P(E) = \frac{C_5^4 + C_4^4}{210} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

الحادثة F حادثة الحصول على اربع كريات يمكن أن تشكل 2024 0 و كرية تحمل الرقم 2 و كرية تحمل الرقم 4

$$P(F) = \frac{C_5^2 \times C_1^1 \times C_4^1}{210} = \frac{40}{210} = \frac{4}{21}$$

علما أن الكريات الأربعة المسحوبة من نفس الرقم ما هو احتمال أن تكون من نفس اللون

احتمال شرطي : الكريات المسحوبة من نفس الرقم هي الحادثة E الكريات المسحوبة من نفس اللون هي الحادثة D

$$P_E(D) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)}$$

$P(D \cap E)$ ماهو احتمال أن تكون الكريات الأربع المسحوبة من نفس اللون و من نفس الرقم

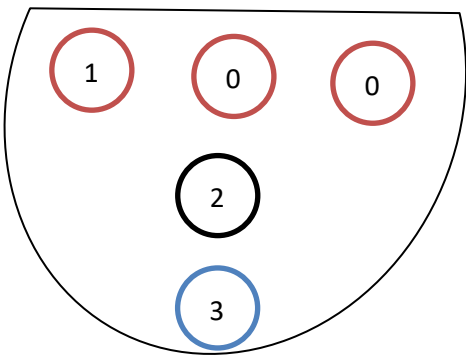
$$P(D \cap E) = \frac{C_4^4}{210} = \frac{1}{210}$$

الحادثة E "حادثة الحصول على اربع كريات تحمل نفس الرقم " 4444 أو 2222

$$P(E) = \frac{C_5^4 + C_4^4}{210} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

$$P_E(D) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{210}}{\frac{1}{35}} = \frac{1}{6}$$

ومنه الاحتمال الشرطي



الجزء الثاني: نسحب عشوائيا كريتتين على التوالي باراجع

من الصندوق U_2 نستعمل القائمة $5^2 = 25$

ملاحظة يمكن إستعمال الشجرة لحل هذا الجزء " التكرار موجود "

الحادثة G "حادثة الحصول على كريتتين من نفس اللون "

$$P(G) = \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} = \frac{11}{25} \text{ أو } RR \text{ أو } NN \text{ أو } BB$$

الحادثة H "حادثة الحصول على كريتتين تحملان رقما فرديا "

$$P(H) = \frac{1^1 \times 1^1 + 1^1 \times 1 + 1^2 + 1^2}{5^2} = \frac{4}{25} \text{ طريقة 01 أو 31 أو 13 أو 11 أو 33}$$

$$P(H) = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25} \text{ طريقة 02 كريتتان تحملان رقما فرديا من بين كريتتين}$$

الحادثة I "حادثة الحصول على كرية بيضاء على الأقل "

طريقة 01 كرة بيضاء وكرة لون آخر " أو العكس الترتيب مهم " أو كريتتين بيضاوين

$$P(I) = \frac{2(1^1 \times 4^1) + 1^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

طريقة 02 نستعمل الحادثة المعاكسة لم نسحب أي كرة بيضاء

$$P(I) = 1 - \frac{4^2}{5^2} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل عملية سحب كريتتين القيمة المطلقة لطرح العددين الظاهرين على الكريتتين المسحوبتين

تبيان أن قيم المتغير العشوائي Y هي 0; 1; 2; 3

$Y = 0$ معناه سحب كريتتين من نفس الرقم

$Y = 1$ معناه سحب 01 أو العكس أو 21 أو العكس أو 32 أو العكس

$Y = 2$ معناه سحب 20 أو العكس أو 31 أو العكس

$Y = 3$ معناه سحب 30 أو العكس ملاحظة العكس يعني الترتيب 30 أو 03

والجدول الآتي يشرح كيفية تعيين قيم المتغير العشوائي

$ \alpha - \beta $	0	0	1	2	3
0	0	0	1	2	3
0	0	0	1	2	3
1	1	1	0	1	2
2	2	2	1	0	1
3	3	3	2	1	0

تبين أن $P(Y = 0) = \frac{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{25} = \frac{7}{25}$ $P(Y = 0) = \frac{7}{25}$ تعريف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي Y يمكن الاستعانة بالجدول لحل السؤال

$$P(Y = 0) = \frac{7}{25}$$

$$P(Y = 1) = \frac{2(2^1 \times 1^1) + 2(1^1 \times 1^1) + 2(1^1 \times 1^1)}{25} = \frac{8}{25}$$

$$P(Y = 2) = \frac{2(2^1 \times 1^1) + 2(1^1 \times 1^1)}{25} = \frac{6}{25}$$

$$P(Y = 3) = \frac{2(2^1 \times 1^1)}{25} = \frac{4}{25}$$

حساب الأمل الرياضي $E(Y)$

$$E(Y) = \sum_{i=0}^3 Y_i P_i = 0 \times \frac{7}{25} + 1 \times \frac{8}{25} + 2 \times \frac{6}{25} + 3 \times \frac{4}{25} = \frac{32}{25} = 1,28$$

حساب التباين $V(Y)$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \sum_{i=0}^3 Y_i^2 P_i - \left[\sum_{i=0}^3 Y_i P_i \right]^2 = 0^2 \times \frac{7}{25} + 1^2 \times \frac{8}{25} + 2^2 \times \frac{6}{25} + 3^2 \times \frac{4}{25} - \left(\frac{32}{25} \right)^2 = \frac{676}{625} = 1,0816$$

$$\delta(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{676}{625}} = \frac{26}{25} = 1,04$$

استنتاج $V(Y + 1962)$

$$V(Y + 1962) = V(Y) = 1,0816 \text{ ومنه } Var(Y + b) = Var(Y)$$

استنتاج $V(-2Y)$

$$V(-2Y) = 4V(Y) = 4 \times 1,0816 = \frac{2704}{625} \text{ ومنه } Var(aY) = a^2 Var(Y)$$

استنتاج $\delta(-1954Y)$

$$\delta(-1954Y) = |-1954| \delta(Y) = 1954 \times \frac{26}{25} = 2032,16 \text{ ومنه } \delta(aY) = |a| \delta(Y)$$

استنتاج احتمال الحادثة $P(e^{2Y} - 4e^Y + 3 = 0)$

نحل المعادلة $e^{2Y} - 4e^Y + 3 = 0$ نضع $e^Y = t$ تكافئ $t^2 - 4t + 3 = 0$ نستعمل المميز لتعيين حلول t
 $t_1 = 1$ أو $t_2 = 3$ تكافئ $e^Y = 1$ أي $Y = 0$ أو $e^Y = 3$ أي $Y = \ln 3$ مرفوض

$$\text{ومنه } P(e^{2Y} - 4e^Y + 3 = 0) = P(Y = 0) = \frac{7}{25}$$

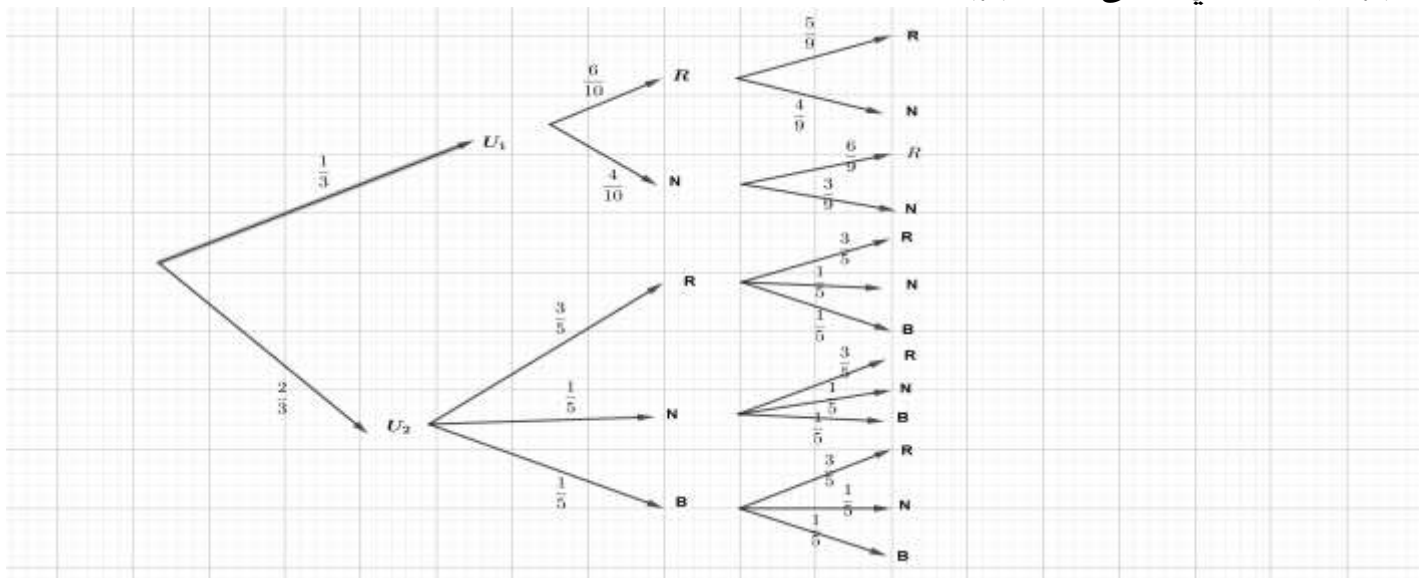
حساب $P(Y > \int_0^1 \frac{1}{Y+1} . dY)$ نقوم بحساب التكامل وحل المتراجحة

$$Y > \ln 2 \int_0^1 \frac{1}{Y+1} . dY = [\ln(Y+1)]_0^1 = \ln 2$$

تنتمي الى هذا المجال $Y = 1; Y = 2; Y = 3$

$$\text{ومنه } P(Y > \int_0^1 \frac{1}{Y+1} . dY) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) = \frac{18}{25}$$

الجزء السادس نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم 1 من إلى 6 مرة واحدة إذا ظهر أحد الأرقام 6 أو 3 نسحب كريتين على التوالي دون ارجاع من صندوق U_1 وإذا ظهر آخر نسحب كريتين على التوالي بإرجاع من الصندوق U_2
 شجرة الإحتمال التي تنمذج هذه التجربة



احتمال سحب كريتين من نفس اللون RR من الصندوق U_1 أو NN من الصندوق U_1 أو RR من الصندوق U_2 أو NN من الصندوق U_2 أو BB من الصندوق U_2

$$P(w) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}\right) = \frac{101}{225}$$

احتمال سحب كريتين مختلفتين في اللون: هي الحادثة المعاكسة لسحب كريتين من نفس اللون

$$P(S) = 1 - \frac{101}{225} = \frac{124}{225}$$

- علما أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون ما هو احتمال أن تكونا من الصندوق U_1

نسمي الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون الحادثة S

نسمي الكريتين المسحوبتين من الصندوق U_1 الحادثة T

$$P_S(T) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)}$$

$P(T \cap S)$ الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون ومن الصندوق U_1

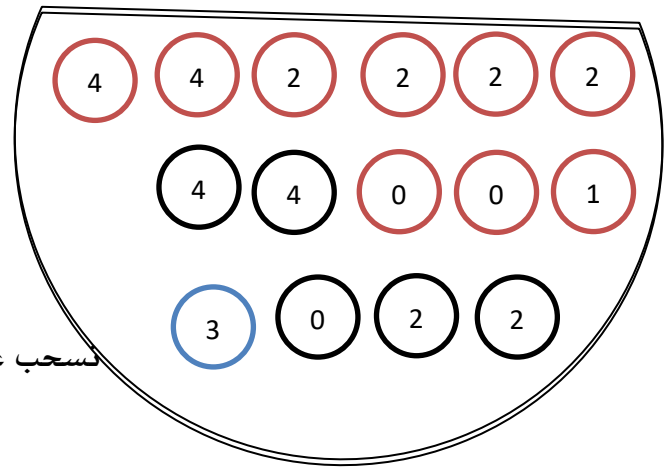
$$P(T \cap S) = \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{48}{270} = \frac{8}{45}$$

الحادثة S الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون نعلم أن $P(S) = \frac{124}{225}$

$$P_S(T) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{8}{45}}{\frac{124}{225}} = \frac{10}{31} \quad \text{ومنه}$$

الجزء السابع : نجمع كل الكريات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها في صندوق U_3

ثلاثة عشر كرية تحمل رقم زوجي
كريتين تحملان رقم فردي



نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كريات من الصندوق U_3

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هي $C_{15}^3 = 455$

الحادثة J حادثة الحصول على ثلاث كريات تحمل رقما فردي J .

حادثة مستحيلة $P(J) = 0$

الحادثة K حادثة الحصول على ثلاث كريات تحمل رقما زوجي K .

$$P(K) = \frac{C_{13}^3}{455} = \frac{286}{455} = \frac{22}{35}$$

الحادثة L حادثة الحصول على ثلاث كريات مجموع الأرقام الظاهرة عليها زوجي L .
ثلاث كرات تحمل رقما زوجيا أو كريتان تحملان رقما فرديا وكرية تحمل رقم زوجي

$$P(L) = \frac{C_{13}^3 + C_2^2 \times C_{13}^1}{455} = \frac{299}{455} = \frac{23}{35}$$

نعتبر المتغير العشوائي Z الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كريات عدد الكرات التي تحمل رقما زوجيا

قيم المتغير العشوائي Z هي 1; 2; 3

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي Z

$$P(Z = 1) = \frac{C_2^2 \times C_{13}^1}{455} = \frac{13}{455} = \frac{1}{35}$$

Z	1	2	3
$P(Z = Z_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{22}{35}$

$$P(Z = 3) = \frac{C_{13}^3}{455} = \frac{286}{455} = \frac{22}{35}$$

$$P(Z = 2) = \frac{C_2^1 \times C_{13}^2}{455} = \frac{156}{455} = \frac{12}{35}$$

نضيف الى الصندوق n كرية بيضاء , نعتبر الحدث M : الحصول على ثلاث كريات بيضاء

$$C_{n+15}^3 = \frac{n+15!}{3! (n+15-3)!} = \frac{n+15}{3!} \frac{n+14}{1} \frac{n+13}{1}$$

$$C_{n+1}^3 = \frac{n+1!}{3! (n+1-3)!} = \frac{n+1}{3!} \frac{n}{1} \frac{n-1}{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^3} = 1 \text{ النهاية} \quad P(M) = \frac{C_{n+1}^3}{C_{n+15}^3} = \frac{(n+1)(n)(n-1)}{(n+15)(n+14)(n+13)}$$

نستنتج أن حادثة الحصول على ثلاث كرات بيضاء هي حادثة أكيدة لما n يكون كبير بالقدر الكافي

الجزء الثامن : يتواجد في قاعة النشاطات بالثانوية 30 تلميذا منهم 10 ذكور من بينهم محمد و 20 اناث من بينهم فاطمة نريد تشكيل لجنة تضم ثلاث تلاميذ للمساعدة في انجاح تظاهرات يوم العلم وتساعد مهامهم المنشط والمنظم ومسؤول النشاطات

عدد اللجان الممكن تشكيلها هو $A_{30}^3 = 24360$ نستعمل الترتيب لأن المهام محددة

$$\frac{A_{20}^3 + A_{10}^3}{A_{30}^3} = \frac{7560}{24360} = \frac{9}{29} \text{ احتمال أن تكون أعضاء اللجنة من نفس الجنس هو :}$$

$$\frac{3 \times A_1^1 \times A_{29}^2}{A_{30}^3} = \frac{2436}{24360} = \frac{1}{10} \text{ احتمال أن تضم اللجنة محمد}$$

$$\frac{6 \times A_1^1 \times A_1^1 \times A_{28}^1}{A_{30}^3} = \frac{168}{24360} = \frac{1}{145} \text{ احتمال أن تضم اللجنة محمد وفاطمة معا}$$

احتمال ان لا تضم اللجنة أحمد وفاطمة : معناه اللجنة تضم أحمد وشخصين أو فاطمة وشخصين أو 3 أشخاص اخرين

$$\frac{3 \times A_1^1 \times A_{28}^2 + 3 \times A_1^1 \times A_{28}^2 + A_{28}^3}{A_{30}^3} = \frac{144}{145}$$

$$1 - \frac{1}{145} = \frac{144}{145} \text{ طريقة أخرى نستعمل الحادثة المعاكسة اللجنة تضم محمد وفاطمة معا}$$

$$\frac{A_1^1 \times A_{29}^2}{A_{30}^3} = \frac{812}{24360} = \frac{1}{30} \text{ احتمال أن يكون محمد مسؤول النشاطات}$$

الجزء التاسع : يتواجد في قاعة النشاطات بالثانوية 30 تلميذا منهم 10 ذكور من بينهم محمد و 20 اناث من بينهم فاطمة نريد تشكيل لجنة تضم ثلاث تلاميذ للمساعدة في انجاح مناسبة يوم العلم

عدد اللجان الممكن تشكيلها هو $C_{30}^3 = 4060$ نستعمل التوفيق لأن المهام غير محددة

$$\frac{C_{20}^3 + C_{10}^3}{C_{30}^3} = \frac{1260}{4060} = \frac{9}{29} \text{ احتمال أن تكون أعضاء اللجنة من نفس الجنس هو :}$$

$$\frac{C_1^1 \times C_{29}^2}{C_{30}^3} = \frac{1}{10} \text{ احتمال أن تضم اللجنة محمد}$$

$$\frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_{28}^1}{C_{30}^3} = \frac{28}{4060} = \frac{1}{145} \text{ احتمال أن تضم اللجنة محمد وفاطمة معا}$$

احتمال ان لا تضم اللجنة أحمد وفاطمة : معناه اللجنة تضم أحمد وشخصين أو فاطمة وشخصين أو 3 أشخاص اخرين

$$\frac{C_1^1 \times C_{28}^2 + C_1^1 \times C_{28}^2 + C_{28}^3}{C_{30}^3} = \frac{144}{145}$$

$$1 - \frac{1}{145} = \frac{144}{145} \text{ طريقة أخرى نستعمل الحادثة المعاكسة اللجنة تضم محمد وفاطمة معا}$$

الجزء العاشر

السؤال الأول

$$S_n = C_{n+2}^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 2^{n+1} \times 3 + \dots + C_{n+2}^{n+2} 3^{n+2} \text{ المجموع 1-}$$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n \text{ نعلم أن}$$

نلاحظ أن $a=2$ و $b=3$ ومنه المجموع

$$S_n = C_{n+2}^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 2^{n+1} \times 3 + \dots + C_{n+2}^{n+2} 3^{n+2}$$

$$S_n = (a+b)^{n+2} = (2+3)^{n+2} = (5)^{n+2}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ المجموع السؤال الثاني}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \text{ نعلم أن}$$

$$S_n = (a+b)^n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ ومنه المجموع نلاحظ أن } a=1 \text{ و } b=\frac{1}{2}$$

السؤال الثالث

$$S_n = C_{n+2}^2 2^2 + C_{n+2}^3 2^3 + \dots + C_{n+2}^{n+2} 2^{n+2} \text{ المجموع}$$

نلاحظ أن $a=1$ و $b=2$ ومن جهة أخرى نلاحظ أن المجموع بدأ من $C_{n+2}^2 2^2$ أي سنقوم بإضافة وطرح

$$C_{n+2}^0 2^0 + C_{n+2}^1 2^1$$

$$S_n = \frac{C_{n+2}^0 2^0 + C_{n+2}^1 2^1 + C_{n+2}^2 2^2 + C_{n+2}^3 2^3 + \dots + C_{n+2}^{n+2} 2^{n+2}}{(1+2)^{n+2}} - \frac{C_{n+2}^0 2^0}{1} - \frac{C_{n+2}^1 2^1}{2(n+2)}$$

$$S_n = (3)^{n+2} - 1 - 2n - 4 = (3)^{n+2} - 2n - 5 \text{ ومنه المجموع}$$

السؤال الرابع

$$C_n^k a^{n-k} b^k \text{ نستخدم الحد العام } (2x^2 + \frac{3}{x})^7 \text{ في نشر العدد } x^5 \text{ نيجاد معامل}$$

نلاحظ أن $a = 2x^2$ و $b = \frac{3}{x}$ و $n = 7$ بالتعويض في الحد العام نجد $C_7^k (2x)^{7-k} \left(\frac{3}{x}\right)^k$

$$C_7^k (2x^2)^{7-k} \left(\frac{3}{x}\right)^k = C_7^k (2)^{7-k} (x^2)^{7-k} (x^{-1})^k (3)^k = C_7^k (2)^{7-k} (x)^{14-2k} (x)^{-k} (3)^k = C_7^k (3)^k (2)^{7-k} (x)^{14-3k}$$

نضع $14 - 3k = 5$ (معامل x^5) تكافئ $k = 3$ بالتعويض في الحد العام نجد $C_7^3 (3)^3 (2)^{7-3} (x)^{14-3 \times 3}$

$$C_7^3 (3)^3 (2)^4 = 15120 \text{ هو } (2x^2 + \frac{3}{x})^7 \text{ في نشر العبارة } x^5 \text{ ومنه معامل } C_7^3 (3)^3 (2)^4 (x)^5 \text{ تكافئ}$$

السؤال الخامس

الحد الذي درجته 10 في نشر العبارة $(x-2)^{15}$ نستعمل الحد العام $C_n^k a^{n-k} b^k$

نلاحظ أن $a = x$ و $b = -2$ و $n = 15$ بالتعويض في الحد العام نجد $C_{15}^k (x)^{15-k} (-2)^k$

نضع $15 - k = 10$ الحد الذي درجته 10 تكافئ $k = 5$ بالتعويض في الحد العام نجد $C_{15}^5 (x)^{15-5} (-2)^5$

$$C_{15}^5 (x)^{10} (-2)^5 = -96096 x^{10} \text{ هو } C_{15}^5 (x)^{10} (-2)^5 \text{ الحد الذي درجته 10 في نشر العبارة}$$

السؤال السادس

A و B حدثان غير متلائمين من فضاء العينة Ω حيث: $P(\bar{A}) = 2P(\overline{A \cup B}) = 0,75$ أحسب احتمال الحدث B

$$\text{لدينا } P(\bar{A}) = 0,75 \text{ ومنه } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,75 = 0,25$$

$$\text{لدينا } 2P(\overline{A \cup B}) = 0,75 \text{ ومنه } P(\overline{A \cup B}) = \frac{3}{8} \text{ ومنه } P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

نعلم أن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ومنه $P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$

$$P(B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \text{ ملاحظة هامة: احتمال التقاطع معدوم لأن الحدثان غير متلائمان}$$

توجد طرق أخرى للحل

السؤال السابع

A و B حدثان مستقلان حيث: $P_A(B) = 0,2$ و $P(A \cup B) = 0,48$ ، أحسب احتمال الحدث A

بما أن A و B حدثان مستقلان فإن $P_A(B) = P(B) = 0,2$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)(1 - P(B)) + P(B)$$

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A)(1 - P(B))$$

ومن جهة أخرى

$$P(A) = \frac{P(A \cup B) - P(B)}{1 - P(B)}$$

$$P(A) = \frac{P(A \cup B) - P(B)}{1 - P(B)}$$

$$P(A) = \frac{P(A \cup B) - P(B)}{1 - P(B)} = \frac{0,48 - 0,2}{1 - 0,2} = \frac{7}{20} = 0,35$$

انتهى التصحيح المقترح للمسألة الشاملة في الاحتمالات

أعتذر عن أي خطأ حسابي يمكن أن يكون في التصحيح

تحتوي هذه المجلة على :

- 1- ملخص رائع للمحور
- 2- تمارين الاحتمالات الواردة في شهادة البكالوريا مقسمة حسب الشعب
- 3- المسألة الشاملة في الاحتمالات مرفقة بتصحيح مفصل



بالتوفيق في شهادة البكالوريا Bac2025

رابط حسابي على الأنستغرام لمزيد من الأفكار



