

التمرين-3-

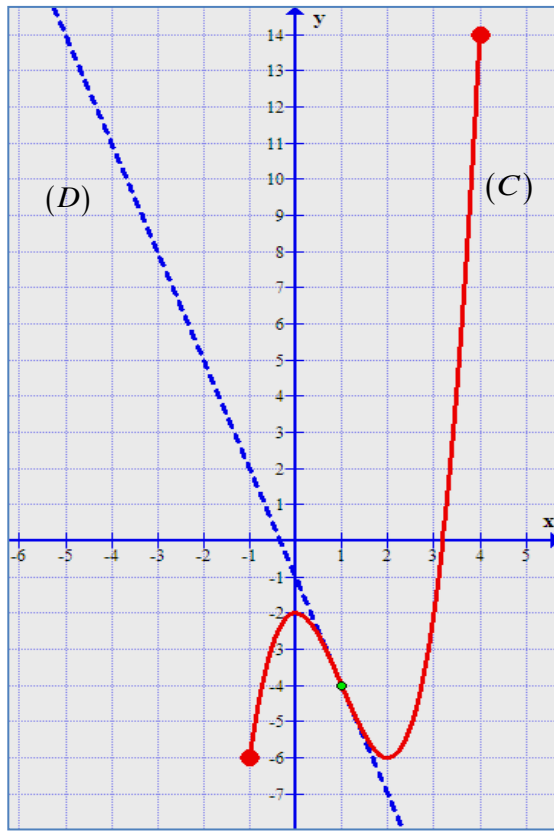
الجزء الأول :

g دالة معرفة على $[-1;4]$ كما يلي : $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

(C) هو التمثيل البياني للدالة g في معلم . و (D) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1;-4)$ ، (انظر الشكل)

(C) يقطع محور الفواصل في نقطة و وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha \approx 3.1$.

بقراءة بيانية :



1. شكل جدول تغيرات g .

2. عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ و $g'(1)$.

3. اكتب معادلة لـ (D) .

4. حل المتراجحة الآتية $g'(x) < 0$.

5. باستعمال (C) ، بين أن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$.

6. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$ و إشارة $g'(x)$

الجزء الثاني :

g دالة معرفة على المجال $[-1;4]$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

(C) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها على $[-1;4]$.

3. بين أن (C) يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل يطلب تعيين معادلة لكل منهما .

4. عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ، ثم استنتج قيمة مقربة لـ $g(1.0001)$.

5. عين تقريبا تألفيا للدالة عند 1 ، ثم استنتج قيمة مقربة لـ $g(1.0001)$.

6. عين حصرا لـ $g(x)$ على المجال $[1;2]$

7. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها فاصلتها .

f الدالة المعرفة على $[2;4]$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بين أنه ؛ من أجل كل x من $[2;4]$ ؛ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.

2. استنتج اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها .

3. ارسم (C_f) في $[2;4]$.

4. عين بيانيا إشارة $f(x)$ في $[2;4]$.

5. h الدالة المعرفة على المجال $[2;4]$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$

⇨ أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة)

6. u الدالة المعرفة على $[2;4]$ كما يلي : $u(x) = |f(x)|$ ، (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u .

⇨ أنشئ (C_u) انطلاقا من (C_f)

7. v الدالة المعرفة على $[2;4] \cup [-4;-2]$ كما يلي : $v(x) = f(|x|)$ هو التمثيل البياني للدالة v .

⇨ بين أن v زوجية ثم أنشئ (C_v) انطلاقا من (C_f)

8. k الدالة المعرفة على المجال $[3;5]$ كما يلي : $k(x) = f(x-1) + 2$ هو التمثيل البياني للدالة k .

⇨ اشرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) .

حل التمرين -3-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة $[2;4]$ كما يلي : $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية .
بقراءة بيانية :

1. شكل جدول تغيرات g :

x	-1	0	2	4
$g(x)$		-2	-6	14

2. عين $g(0), g(2), g'(0), g'(2), g'(1), g''(1)$:

$$g(0) = -2, g(2) = -6, g'(0) = 0, g'(2) = 0$$

$$g'(1) \text{ هو معامل توجيه المماس } (D) : g'(1) = \frac{-1 - (-4)}{1} = -3$$

3. اكتب معادلة (D) :

معادلة (D) هي : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ ولدينا $g(1) = -4$ و $g'(1) = -3$ ومنه $y = -3(x-1) - 4$. وبالتالي معادلة المماس (D) هي : $y = -3x - 1$

4. حل المتراجحة الآتية : $g'(x) < 0$: $x \in]0;2[$

5. باستعمال (C) ، بين أن $a = 1, b = -3, c = -2$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ و $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$$\begin{cases} c = -2 \\ a + b - 2 = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \text{ ولدينا : } \begin{cases} g(0) = -2 \\ g(1) = -4 \\ g'(2) = 0 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} c = -2 \\ a + b = -2 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} c = -2 \\ -a - b = 2 \dots (1) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد : $2a = 2$ ومنه $a = 1$

نعوض قيمة a في (1) نجد $1 + b = -2$ ومنه $b = -3$

اذن $a = 1, b = -3, c = -2$: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

6. استنتج إشارة $g(x)$:

x	-14	α
$g(x)$	-	+

إشارة $g'(x)$:

x	-1	0	2	4
$g'(x)$	+	0	-	0

الجزء الثاني:

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 3h^2 - 2 + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 - 3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 3h) = 0$$

g قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق عند 0 هو $g'(0) = 0$.
هندسيا : (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه 0 .

2. دراسة تغيرات الدالة g :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = 3x^2 - 6x$.

المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلين هما $x = 1$ و $x = -1$. وإشارة $g'(x)$ كما هو موضح في الجدول أدناه :

x	-1	0	2	4	
$g'(x)$	+	0	-	0	+

الدالة f متزايدة تماما على $[2; 4]$ و $[-1; 0]$. و متناقصة تماما على $[0; 2]$

جدول التغيرات :

x	-1	0	2	4
$g(x)$	-6	-2	-6	14

3. بين أن (C) يقبل مماسين موازيين لمحور يطلب تعيين معادلة لكل منهما .

$g'(x) = 0$ معناه $3x^2 - 6x = 0$ و منه $x(3x - 6) = 0$ و منه $x = 0$ أو $x = 2$.
اذن : (C) يقبل مماسين أفقيين :

أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته $y = g(0)$ أي $y = -2$

و الآخر عند النقطة ذات الفاصلة 2 معادلته $y = g(2) = -6$ أي $y = -6$

4. عين معادلة (D) مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ،

معادلته $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ و منه $y = -3(x - 1) - 4$ و منه معادلة (D) هي $y = -3x - 1$

ثم استنتج قيمة مقربة لـ $g(1.0001)$:

$$g(1.0001) \approx -3(1.0001) - 1 = -4.0003$$

5. عين تقريبا تألفيا للدالة عند 1 ،

$$g(1+h) = g'(x) \times h + g(1) = -3h - 4$$

ثم استنتج قيمة مقربة لـ $g(1.0001)$

$$g(1.0001) \approx g(1+0.0001) = -3(0.0001) - 4 = -4.0003$$

6. عين حصرا لـ $g(x)$ على المجال $[1; 2]$

لدينا $1 \leq x \leq 2$ و g متناقصة تماما على المجال $[1; 2]$ اذن $g(2) \leq g(x) \leq g(1)$ أي $-6 \leq g(x) \leq -4$

7. تبين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x) = 6x - 6$

x	1-	1	4
$g''(x)$	-	0	+

" g تنعدم عند 1 مغيرة إشارتها إذن $A(1; -4)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C).

الجزء الثالث :

f الدالة المعرفة على $[2;4]$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

1. بين أنه ؛ من أجل كل x من $[2;4]$ يكون :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2}$$

من أجل كل x من $[2;4]$ لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)]}{(x-1)(x-1)^3} = \frac{(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)}{(x-1)^3}$$

2. استنتج اتجاه تغير f :

من أجل كل عدد حقيقي x من $[2;4]$ ، $(x-1)^3 > 0$ اذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

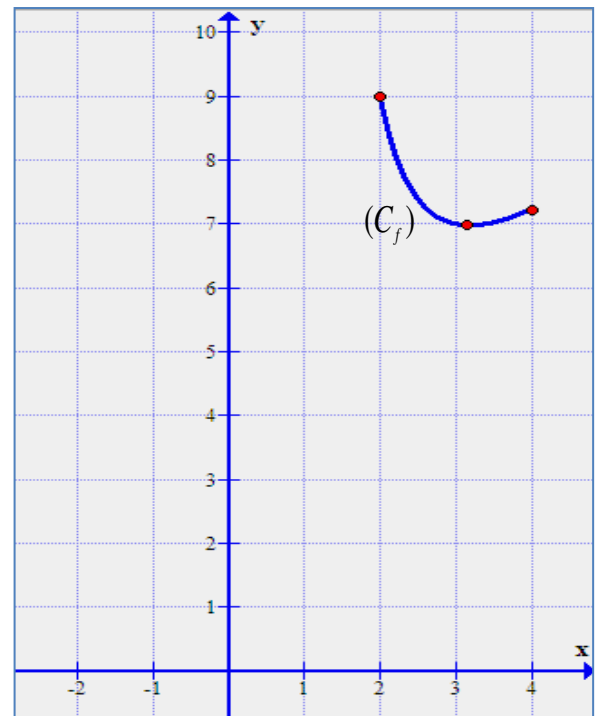
x	2	4
$f'(x)$	-	+

f متزايدة تماما على $[2;4]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2;\alpha]$.

و شكل جدول تغيراتها .

x	2	4
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	9	7.22

3. ارسم (C_f) في $[2;4]$.



4. عين بيانيا إشارة $f(x)$ في $[2;4]$.

في $[2;4]$ ، (C_f) فوق محور الفواصل اذن من أجل كل x من $[2;4]$ لدينا $f(x) > 0$

الأستاذ : بلجودي حمو

5. الدالة المعرفة على المجال $[2;4]$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$

أدرس اتجاه تغير h وشكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة) :

من أجل كل x من $[2;4]$ لدينا ، $h'(x) = 2 \times [f'(x)] \times [f(x)]$
 من أجل كل x من $[2;4]$ لدينا $f(x) > 0$ اذن إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(x)$

x	2	α	4
$h'(x)$	-	0	+

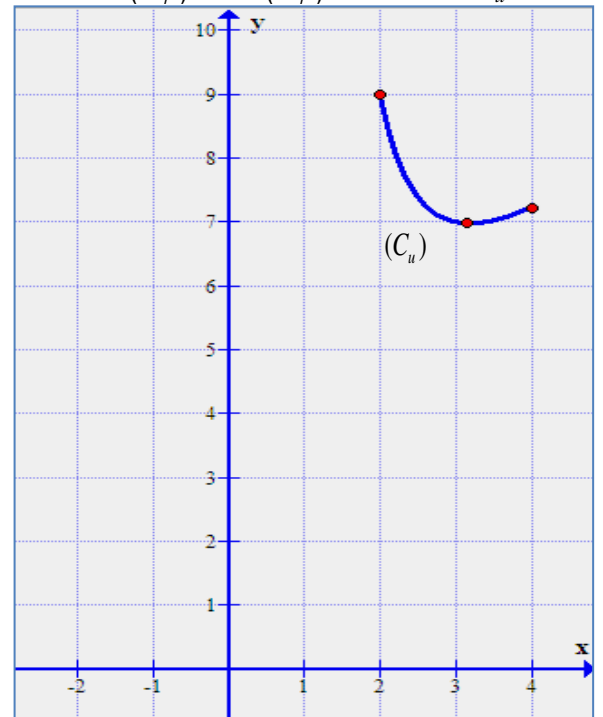
الدالة h متزايدة تماما على $[\alpha;4]$ ومتناقصة تماما على $[2;\alpha]$

x	2	α	4
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	9^2	6.98^2	7.22^2

6. u الدالة المعرفة على المجال $[2;4]$ كما يلي : $u(x) = |f(x)|$ (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u .

إنشاء (C_u) انطلاقا من (C_f) :

يكون (C_u) منطبقا على (C_f) لأن (C_f) فوق محور الفواصل .



الأستاذ : بلجودي حمو

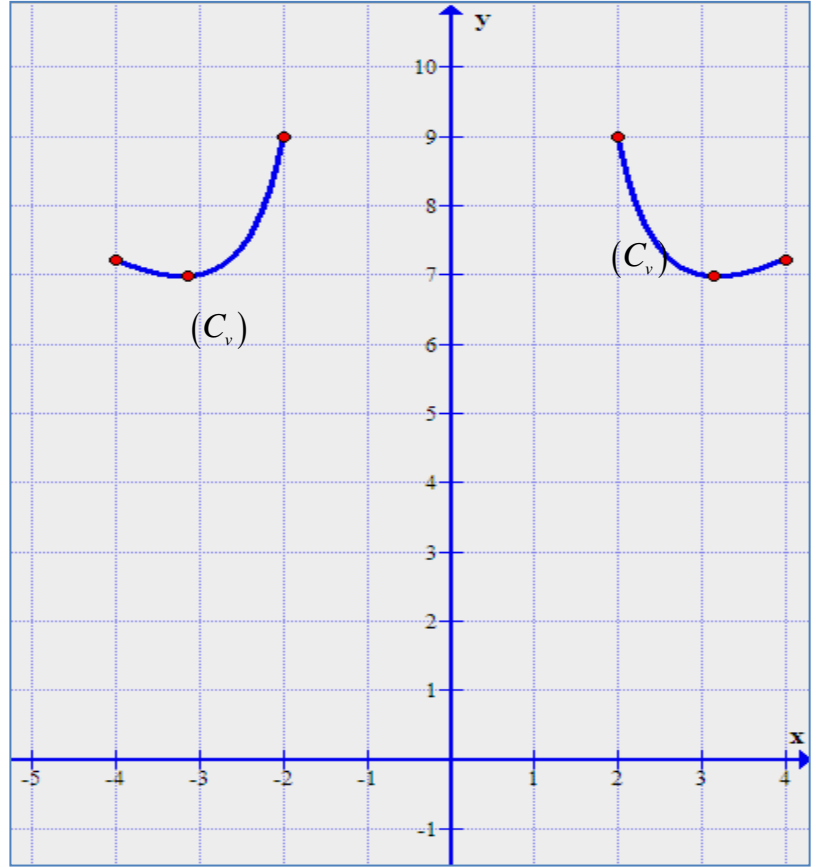
7. الدالة المعرفة على $D_v = [-4; -2] \cup [2; 4]$ كما يلي : $v(x) = f(|x|)$ هو التمثيل البياني للدالة v .

بين أن v زوجية

من اجل $x \in D_v$ ، $-x \in D_v$ و : $v(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = v(x)$ إذن الدالة v زوجية .

أنشاء (C_v) انطلاقاً من (C_f) :

في المجال $[2; 4]$ يكون $v(x) = f(x)$ إذن (C_v) منطبقاً على (C_f) في هذا المجال .
و بما أن الدالة v زوجية فإن منحنيتها متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .



8. الدالة المعرفة على المجال $[3; 5]$ كما يلي : $k(x) = f(x-1) + 2$ هو التمثيل البياني للدالة k .

أشرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقاً من (C_f) :

من الشكل $k(x) = f(x-1) + 2$ مع $a = -1$ و $b = 2$.

إذن (C_k) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1; 2)$.

الأستاذ : بلجودي حمو

دعواتكم