

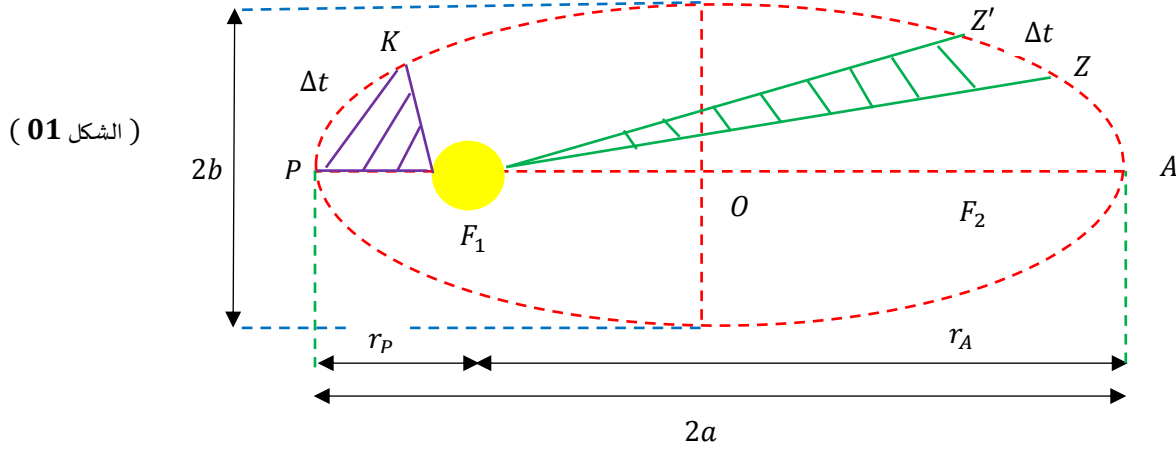
تمرين شامل : (حول حركة كوكب وقمر اصطناعي)

يهدف هذا التمرين إلى دراسة :

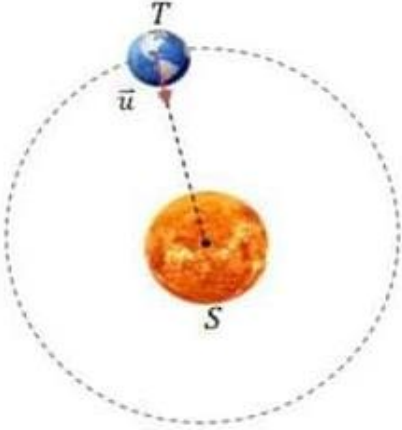
- ✓ حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار اهليلجي
- ✓ حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار دائري
- ✓ حركة قمر اصطناعي حول الأرض ضمن مسار دائري

I- تدور الأرض حول الشمس بحيث تأخذ المسافة بين مركز عطالتها وبين مركز الشمس القيمتين الموافقتين لأدنى بعد وأقصاه كما يلي

$$r_P = 147.1 \times 10^6 \text{ km} \text{ و } r_A = 152.1 \times 10^6 \text{ km} \text{ (الشكل 01)}$$



- (1) ماهو المرجع المناسب الذي تنسب إليه حركة الأرض ؟ عرفه ؟ وماهي الفرضية الواجب اعتمادها أثناء دراسته ؟
 - (2) أذكر نص القانون الأول لكبلر ؟
 - (3) ما طبيعة مسار كوكب الأرض ؟ ماهو موقع الشمس في هذا المسار ؟
 - (4) ماذا يمثل الطول $2a$ والطول $2b$ ؟ أحسب طول نصف المحور الكبير لهذا المسار
 - (5) في أي نقطة تكون سرعة الأرض أصغرية وفي أي نقطة تكون سرعته أعظمية ؟
 - (6) مثل شعاعي سرعتيهما بشكل كيفي على الرسم .
- ينتقل كوكب الأرض أثناء حركته على مداره من النقطة Z إلى Z' ثم من النقطة K إلى النقطة خلال نفس المدة الزمنية Δt .



- (7) حسب قانون كبلر الثاني ماهي العلاقة بين المساحتين الممسوحتين ؟
 - (8) بين أن متوسط السرعة بين الموضعين Z و Z' أقل من متوسط السرعة بين الموضعين K و P ؟
- II- بغية تسهيل الدراسة نفرض أن مسار الأرض حول الشمس هو مسار دائري :
- 1- مثل كلا من شعاع السرعة والقوة التي تطبقها الشمس على الأرض في الشكل 02 ؟
 - 2- أكتب العبارة الشعاعية للقوة $\vec{F}_{S/T}$ بدلالة $\vec{u}, G, M_S, M_T, h, R_S, R_T$
 - 3- بين انطلاقا من القانون الثاني لنيوتن أن حركة كوكب الأرض حول الشمس دائرية منتظمة .
 - 4- أوجد وحدة المقدار G باستعمال التحليل البعدي .
 - 5- أوجد عبارة السرعة المدارية v بدلالة G, M_S, h, R_S, R_T .
 - 6- عرف الدور ثم أكتب عبارته بدلالة G, M_S, h, R_S, R_T . هل يتعلق الدور بكتلة الأرض ؟
 - 7- أذكر نص قانون كبلر الثالث ثم أوجد عبارة ثابت كبلر K وأحسب قيمته .
 - 8- استنتج من القانون الثالث لكبلر البعد بين سطح الشمس و سطح الأرض .

III- يسعى رجل الأعمال الأمريكي (ايلون ماسك) صاحب شركة *Space X* إلى توصيل العالم بأكمله بالانترنت الفضائي عن طريق ارسال 12 ألف قمر اصطناعي خلال عدة أعوام ، في 23 مايو 2019 قامت الشركة باطلاق 60 قمر اصطناعي تدور في مدارات دائرية حول مركز الأرض .

نهتم في هذا الجزء بدراسة 6 أقمار اصطناعية خصائصها المدارية مسجلة في الجدول التالي :

اسم القمر	Starlink 1	Starlink 2	Starlink 3	Starlink 4	Starlink 5	Starlink 6
$T_s(s)$	5706.7	6340	10575.4	86400	17244	20963.8
$T_s^2(s^2)$						
$r(10^3m)$	6880	7380	10380	42105	14380	16380
$r^3(10^{20}m^3)$						

حيث T_s يمثل دور كل قمر و r البعد المتوسط بين مركزي القمر الصناعي والأرض .

- 1- ماهو المرجع المناسب لدراسة هذه الحركة ؟
- 2- بين أن التسارع لمركز عطالة أحد الأقمار يعطى بالعلاقة التالية : $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$
- 3- بين أن تسارع الجاذبية على ارتفاع h يعطى بالعلاقة التالية : $g = g_0 \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$
- 4- عرف القمر الجيومستقر ؟ من بين الأقمار 6 السابقة حدد القمر الجيو مستقر ؟
- 5- إملئ الجدول ثم أرسم المنحنى البياني $T_{sat}^2 = f(r^3)$.
- 6- أثبت العلاقة التالية : $\frac{T_{sat}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ ثم أحسب كتلة الأرض M_T معتمدا على البيان
- 7- أحسب ارتفاع هذا القمر الجيومستقر عن سطح الأرض ، وسرعته ثم تسارعه ؟
- 8- أذكر استعمالات الأقمار الاصطناعية ؟

المعطيات :

$$T = 365 \text{ jours} ; R_T = 6380 \text{ km} ; G = 6.67 \times 10^{-11} (SI) ; R_S = 7 \times 10^5 \text{ Km}$$

$$m_{sat} = 2300 \text{ Kg} ; g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2 ; \pi^2 = 10 ; M_S = 2 \times 10^{30} \text{ Kg}$$

حل تمرين حول حركة كوكب والأقمار الاصطناعية

I – حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار اهليلجي :

(1) المرجع المناسب الذي تنسبه إليه حركة الأرض هو المرجع الهيليومركزي

تعريف المرجع الهيليومركزي :

هو مرجع مزود بمعلم مبدؤه مركز الشمس ومحاوره الثلاثة متعامدة فيما بينها وموجهة نحو 3 نجوم ثابتة ، يستعمل لدراسة حركة الكواكب والمذنبات وبعض المركبات الفضائية .

الفرضية الواجب اعتمادها أثناء الدراسة : أن يكون المرجع عطالي (غاليلي) .

(2) نص القانون الأول لـ كيبلر : في المرجع المركزي الشمسي تتحرك الكواكب حول الشمس في مسارات اهليلجية وتمثل الشمس أحد محرقيه (بؤرتيه) ويعرف بقانون المسارات .

(3) طبيعة مسار كوكب الأرض : مسار اهليلجي . موقع الشمس بالنسبة لهذا المسار : أحد المحرقين في حالتنا الموضع F_1

(4) يمثل الطول $2a$ طول المحور الكبير ، يمثل الطول $2b$ طول المحور الصغير .

حساب طول نصف المحور الكبير a :

$$a = \frac{r_p + r_A}{2} = \frac{147.1 \times 10^6 \text{ km} + 152.1 \times 10^6}{2} \Rightarrow a = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$$

(5) السرعة الأصغرية والسرعة الأعظمية :

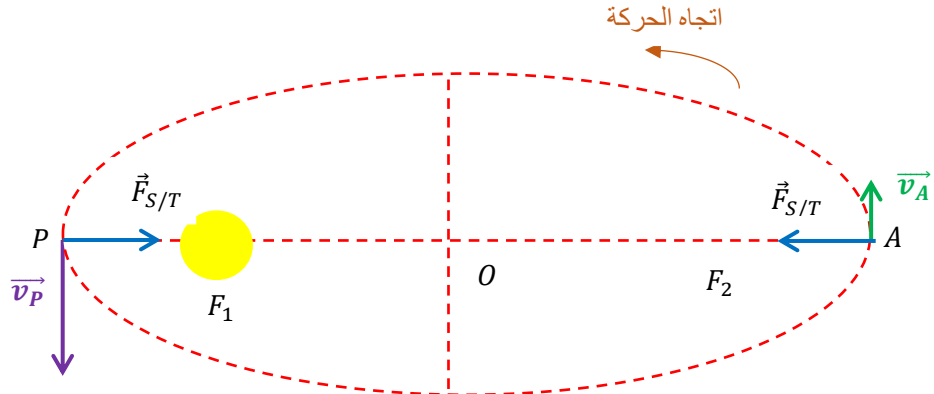
تكون السرعة أصغرية في نقطة الأوج A .

تكون السرعة أعظمية في نقطة الحضيض P .

(6) تمثيل شعاعي سرعتيهما :

- نشعاع السرعة يكون عمودي على شعاع القوة ، وشعاع القوة يكون موجه نحو مركز عطالة الشمس .
- السرعة تكون أصغرية في نقطة الأوج A وتكون أعظمية في نقطة الحضيض P ومنه فشعاع السرعة عند نقطة الحضيض يكون أطول من شعاع السرعة في عند نقطة الأوج .
- جهة حركة كوكب الأرض تكون عكس اتجاه عقارب الساعة .

وبالتالي يصبح التمثيل على الشكل التالي :



(7) نسمي المساحة الممسوحة بين النقطتين Z و Z' بـ S_1 والمساحة بين النقطتين P و K بـ S_2

حسب قانون كيبلر الثاني فإن $S_1 = S_2$

(8) البرهان أن متوسط السرعة بين الموضعين Z و Z' أقل من متوسط السرعة بين الموضعين P و K :

لدينا : $\widehat{KP} > \widehat{ZZ'}$ (نقصد بها طول القوس KP أكبر من طول القوس ZZ')

ونحن نعلم أن : $\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ (مع العلم أن الزمن Δt يبقى نفسه)

ومنه $\frac{\widehat{KP}}{\Delta t} > \frac{\widehat{ZZ'}}{\Delta t}$ أي $v_{KP} > v_{ZZ'}$

II - حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار دائري :

1- تمثيل كلا من شعاع السرعة والقوة التي تطبقها الشمس على الأرض (الشكل المقابل)

2- العبارة الشعاعية للقوة $\overrightarrow{F_{S/T}}$ بدلالة $\vec{u}, G, M_T, M_S, h, R_S, R_T$

$$\overrightarrow{F_{S/T}} = G \frac{M_S M_T}{r^2} \vec{u} = G \frac{M_S M_T}{(R_S + R_T + h)^2} \vec{u}$$

3- تبين أن حركة الأرض دائرية منتظمة انطلاقا من القانون الثاني لنيوتن :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (أرض) في المرجع الهيلومركزي الذي نعتبره غاليليا لدينا

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m \vec{a}$$

$$\overrightarrow{F_{S/T}} = M_T \vec{a}$$

$$\vec{a} = a_n \vec{u} + a_T \vec{T}$$

ومنه بالاسقاط على الشعاع الناطمي لدينا :

$$G \frac{M_S M_T}{r^2} = M_T a_n$$

$$a_n = \frac{GM_S}{r^2}$$

بالاسقاط على الشعاع المماسي لدينا : $0 = M_T a_T$ ومنه $a_T = 0$ أي $\frac{dv}{dt} = 0$ أي $v = cte$ (السرعة ثابتة)

بما أن مسار الحركة دائري و السرعة ثابتة فإن حركة كوكب الأرض حول الشمس دائرية منتظمة

4- وحدة المقدار G باستعمال التحليل البعدي :

$$G = \frac{F \times r^2}{M^2} \text{ ومنه } F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$[G] = \frac{[F] \times [r]^2}{[M]^2} = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^2}{kg^2} = kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$$

ومنه وحدة G في جملة الوحدات الدولية هي : $kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$

5- عبارة السرعة المدارية v :

$$v = \sqrt{\frac{GM_S}{(R_S + R_T + h)}} \text{ وأخيرا } v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}} \text{ ومنه } v^2 = \frac{GM_S}{r} \text{ أي } \frac{v^2}{r} = \frac{GM_S}{r^2} \text{ ومنه } a_n = \frac{v^2}{r}$$

6- الدور : هو الزمن اللازم للأرض للقيام بدورة كاملة حول الشمس (أي 365 jours) .

عبارة الدور T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_S + R_T + h)^3}{GM_S}} \text{ وأخيرا } T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_S}} \text{ ومنه } T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_S} \text{ أي } T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM_S}{r}} \text{ ومنه } T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_S}{r}}} \text{ ومنه } T = \frac{2\pi r}{v}$$

7- نص قانون كيبلر الثالث : يتناسب مربع الدور طردا مع مكعب البعد المتوسط بين مركز الكوكب ومركز الشمس .

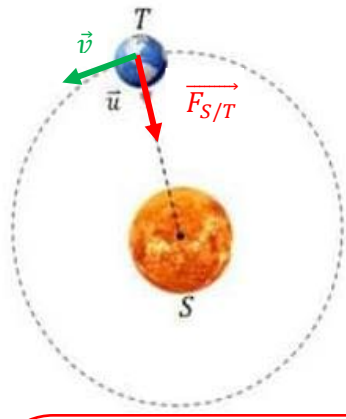
$$\frac{T^2}{r^3} = K \text{ حيث } K \text{ ثابت}$$

إيجاد عبارة الثابت K وحساب قيمته :

$$K = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_S r^3} \Rightarrow K = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$K = \frac{4 \times 10}{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}} \Rightarrow K = 3 \times 10^{-19} SI$$

من عبارة K نجد أن الثابت K لا يتعلق بكتلة كوكب الأرض بل يتعلق بكتلة كوكب الشمس .



ملاحظة : $r = R_S + R_T + h$ حيث :

r يمثل البعد بين مركز الأرض ومركز الشمس

R_S يمثل نصف قطر الشمس

R_T تمثل نصف قطر الأرض

h البعد بين سطح الأرض و سطح الشمس

8- استنتاج البعد بين سطح الشمس و سطح الأرض (h) من القانون الثالث لكيبلر :

$$K = \frac{T^2}{r^3} \Rightarrow r^3 = \frac{T^2}{K} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}} - R_s - R_T : \text{وأخيرا } R_s + R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}} \text{ ومنه } r = (R_s + R_T + h)$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(365 \times 24 \times 3600)^2}{3 \times 10^{-19}}} - (7 \times 10^5 - 6380) \times 10^3$$

$$h = 1.48 \times 10^{11} \text{ m}$$

III- حركة قمر اصطناعي حول الأرض ضمن مسار دائري :

1- المرجع المناسب : المرجع الجيو مركزي (المركزي الأرضي) .

2- إثبات أن أن التسارع لمركز عطالة أحد الأقمار يعطى بالعلاقة التالية : $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (أرض) في المرجع الهيلومركزي الذي نعتبره غاليليا لدينا : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$\vec{F}_{T/sa} = m_{sa}\vec{a}$$

بالاسقاط على الشعاع الناظمي لدينا :

$$G \frac{M_T m_{sa}}{r^2} = m_{sa} a_n$$

$$a_n = \frac{GM_T}{r^2} = G \cdot M_T \times \frac{1}{r^2}$$

وهي من الشكل $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$ حيث $A = G \cdot M_T$

3- تبين أن تسارع الجاذبية على ارتفاع h يعطى بالعلاقة التالية : $g = g_0 \left(\frac{R_T}{r} \right)^2$

نعلم أن $a = a_n = g$

$$g = GM_T \frac{1}{r^2} = GM_T \frac{1}{(R_T+h)^2} \dots \dots \dots (1)$$

في الطرف الثاني لدينا :

$$(2) \dots \dots \dots g_0 = GM_T \frac{1}{R_T^2} \text{ (عند } g_0 \text{ يكون } h = 0 \text{) لأن } g_0 \text{ تعني الجاذبية على سطح الأرض .}$$

$$\text{بقسمة (2) على (1) لدينا : } \frac{g}{g_0} = \frac{GM_T \frac{1}{(R_T+h)^2}}{GM_T \frac{1}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} \text{ ومنه نجد : } g = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T+h} \right)^2 \text{ وأخيرا } g = g_0 \left(\frac{R_T}{r} \right)^2$$

4- تعريف القمر الجيو مستقر :

هو عبارة عن قمر اصطناعي يظهر لمراقب على سطح الأرض ساكنا ويمتاز بالشروط التالية :

✓ يدور في نفس جهة دوران الأرض

✓ لديه نفس دور الأرض $T = 24 \text{ h} = 24 \times 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$

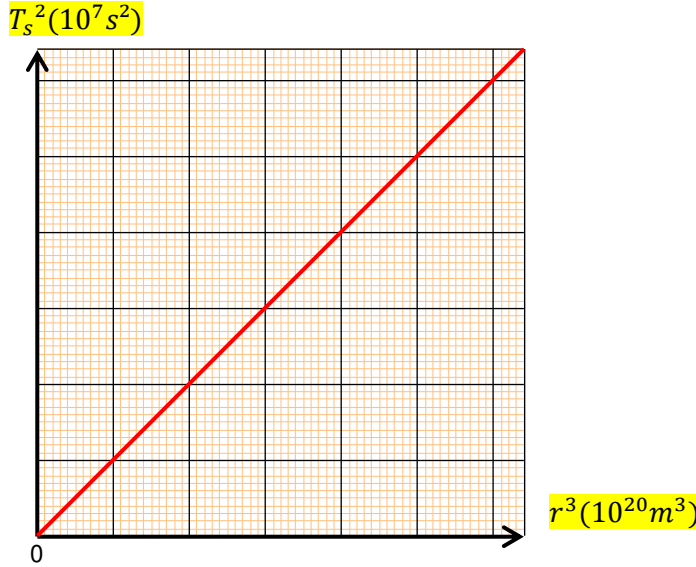
✓ يدور على مستوى خط الاستواء .

تحديد القمر الجيومستقر من بين 6 أقمار السابقة :

القمر الجيو مستقر من لديه دور يساوي 86400 s ومنه القمر الذي لديه نفس دور الأرض من بين 6 أقمار السابقة هو القمر Starlink 4

اسم القمر	Starlink 1	Starlink 2	Starlink 3	Starlink 4	Starlink 5	Starlink 6
$T_s(s)$	5706.7	6340	10575.4	86400	17244	20963.8
$T_s^2(10^7 s^2)$	3.25	4.019	11.18	7.465	29.73	43.94
$r(10^3 m)$	6880	7380	10380	42105	14380	16380
$r^3(10^{20} m^3)$	3.25	4.019	11.18	7.465	29.73	43.94

رسم المنحنى $T^2 = f(r^3)$:



6- اثبات العلاقة التالية : $\frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$:

لدينا : $a_n = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ ونعلم أن $a_n = \frac{v^2}{(R_T+h)}$ أي $\frac{v^2}{(R_T+h)} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ ومنه $v^2 = \frac{GM_T}{(R_T+h)}$ وأخيرا : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$

نعلم أن $T_s = \frac{2\pi r}{v}$ ومنه $T_s = \frac{2\pi(R_T+h)}{\sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}}$ ومنه $T_s^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^2}{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$ أي $T_s^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^3}{GM_T}$ ومنه $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$ وأخيرا : $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$ وبالتالي :

$$\frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2 \frac{r^3}{GM_T}}{r^3} \Rightarrow \frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

ايجاد كتلة الأرض M_T :

البيان عبارة عن خط مستقيم يمر بالمبدأ عبارته من الشكل : $T^2 = \beta r^3$ حيث β هو معامل توجيه البيان .

$$\beta = \frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow M_T = \frac{4\pi^2}{G\beta}$$

$$\beta = \frac{(4.019 - 3.25) \times 10^7}{(4.019 - 3.25) \times 10^{20}} = 1 \times 10^{-13}$$

$$M_T = \frac{4\pi^2}{G\beta} = \frac{4 \times 10}{6.67 \times 10^{-11} \times 1 \times 10^{-13}}$$

$$M_T = 5.99 \times 10^{24} \text{ kg}$$

7- حساب ارتفاع القمر الجيو مستقر عن سطح الأرض (حساب h) :

لايجاد الارتفاع h نستخدم عبارة الدور T_s^2 :

$$T_s^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM_T} \Rightarrow r^3 = \frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2}}$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2}} - R_T$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(24 \times 3600)^2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.99 \times 10^{24}}{4 \times 10}} - (6380 \times 10^3)$$

$$h = 35709000 \text{ m} = 35709 \text{ km}$$

حساب السرعة المدارية للقمر الجيومستقر :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T + h)}} : \text{ لدينا مما سبق}$$

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.99 \times 10^{24}}{(6380 + 35709) \times 10^3}}$$

$$v = 3081 \text{ m/s}$$

حساب تسارع القمر الجيومستقر :

$$a = g = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2$$

$$a = 9.81 \left(\frac{6380 \times 10^3}{(6380 + 35709) \times 10^3} \right)^2$$

$$a = 0.22 \text{ m/s}^2$$

8- استعمالات الأقمار الاصطناعية :

- الاتصالات
- الأحوال الجوية
- البث التلفزيوني
- تحديد المواقع GPS
- استعمالات عسكرية مختلفة

ملاحظتين في الحسابات :

يجب تحويل الأطوال إلى وحدة المتر (m)

يجب تحويل الدور إلى وحدة الثانية (s)