

مجلة سند المجتهد

المتتاليات

ثلاثة آداب وفلسفة

من اعداد الاستاذة :
أزرايب جميلة

bac2022

الفهرس :

- 1/ ملخص للقوانين المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية
- 2/ تمارين المراجعة النهائية للمتتاليات الحسابية
- 3/ تمارين المراجعة النهائية للمتتاليات الهندسية .
- 4/ تمارين المتتاليات في بكالوريا الشعب الأدبية .
- 5/ الحلول المقترحة لتمرين المراجعة النهائية

ملخص لقوانين المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية :**المتتاليات الهندسية** (u_n) متتالية هندسية أساسها q التعريف (العلاقة التراجعية):
 $u_{n+1} = u_n \times q$

عبارة الحد العام :

حدها الأول : $u_n = u_0 \times q^n$ حدها الأول : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ بصفة عامة : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

حساب المجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية:

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n \quad : \quad q \neq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$= u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad \text{أو} \quad u_p \times \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}$$

بصفة عامة :

$$S = \frac{\text{عدد الحدود} \times (1 - q)}{1 - q} \times \text{الحد الاول}$$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد.

■ إذا كان $q = 1$ فإن (الحدود متساوية والمتتالية الهندسية ثابتة)

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \text{الحد الاول}$$

■ إذا كان $q = 1$: معناه المتتالية ثابتة

$$u_p = u_{p+1} = \dots = u_n$$

ومنه :

$$S = u \times (n - p + 1)$$

اتجاه التغير : إذا كان الحد الأول غير معدوم

 $q < 0$ معناه المتتالية (u_n) غير رتيبة $q = 1$ معناه المتتالية (u_n) ثابتة $q > 0$ معناه المتتالية (u_n) رتيبة

ولمعرفة اتجاه تغيرها في هذه الحالة نختار طريقة مناسبة لذلك (الفرق

أو الدالة المرفقة $u = f(n)$ أو المقارنة)

العلاقة بين حدين :

$$\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$$

$$c - b = a$$

$$b^2 = a \times c$$

المتتاليات الحسابية (u_n) متتالية حسابية أساسها r التعريف (العلاقة التراجعية):
 $u_{n+1} = u_n + r$

عبارة الحد العام :

حدها الأول : $u_n = u_0 + nr$ حدها الأول : $u_n = u_1 + (n-1)r$ بصفة عامة : $u_n = u_p + (n-p)r$

حساب المجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية:

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$$

$$= \frac{n-p+1}{2} (u_p + u_n)$$

بصفة عامة :

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الاول} + \text{الحد الاخير})$$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد.

اتجاه التغير : لنا $u_{n+1} - u_n = r$ ومنه $r = 0$ معناه المتتالية (u_n) ثابتة $r > 0$ معناه المتتالية (u_n) متزايدة تماما $r < 0$ معناه المتتالية (u_n) متناقصة تماماالعلاقة بين حدين : $u_m - u_p = (m-p)r$ الوسط الحسابي : a, b, c حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

$$2b = a + c$$

المراجعة النهائية للمتتاليات الحسابية**التمرين الأول :**

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $u_0 = 7$

1. أحسب الحدود : u_1 ، u_2 و u_3

2. أكتب u_n بدلالة n .

3. عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $u_n = 2023$

4. أحسب S حيث : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{672}$

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = -2 - 3n$

1. بين ان المتتالية (u_n) حسابية معينا أساسها وحدها الأول .

2. حدد اتجاه تغير (u_n) .

3. عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $u_{n+1} + u_n + 1 = -2022$

4. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

5. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = -3u_n + 5$

أ) أكتب v_n بدلالة n .

ب) أحسب المجموع S'_n بدلالة n : $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

التمرين الثالث :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 3$ وأساسها r حيث : $u_1 + u_2 - 2u_3 = 12$

1. عين الأساس r .

2. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 - 4n$

3. بين أن -2021 حد من حدود المتتالية معينا رتبته .

4. أحسب المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{506}$

5. أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

ب) عين قيمة العدد الطبيعي n : $S_n = -187$

التمرين الرابع :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها $r = 6$ حيث : $u_1 - u_2 + 3u_4 = 57$

1. عين الحد الأول u_0 .2. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي $n : u_n = 6n - 3$.

3. أحسب الحد ذو الرتبة 2022 .

4. أحسب المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2021}$.**التمرين الخامس :**(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r حيث : $u_2 + u_3 + u_4 = 33$ و $u_1 - u_3 + 4 = 0$ (1) أحسب u_3 ثم أحسب u_1 واستنتج الأساس r .(2) . بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n غير معنوم : $u_n = 5 + 2n$

(3) عين قيمة الحد الذي رتبته 1009 .

(4) أ) أحسب بدلالة n المجموع $S_n : S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ب) عين قيمة العدد الطبيعي n حيث : $S_n = 4096567$ **التمرين السادس :**

« اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير .

الاقتراح الأول	الاقتراح الثاني	الاقتراح الثالث	
-17	-14	-11	الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدها الأول 1 هو
$u_n = 1 + 3n$	$u_n = 7 + 3n$	$u_n = -5 + 3n$	(u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$. الحد العام للمتتالية (u_n) هو :
$x = \frac{4}{3}$	$x = 2$	$x = \frac{3}{4}$	من أجل كل عدد حقيقي $x : a = 2x + 2$ ، $b = 6x - 3$ و $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a ، b و c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون
$\frac{n^2 + n}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{(n+1)^2}{2}$	المجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$ يساوي

التمرين السابع :(u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0 حيث :

$$\begin{cases} u_3 + u_6 = -10 \\ 2u_1 - u_4 = 8 \end{cases}$$
1. بين أن $r = -2$ و $u_0 = 4$ 2. أكتب u_n بدلالة n .

3. أحسب الحد ذو الرتبة 1009.

4. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ 5. استنتج قيمة المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{1009}$

المراجعة النهائية للمنتاليات الهندسية :

التمرين الاول :

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\square$ أساسها $q = 3$ وحدها $u_2 = -18$

عين في كل حالة من الحالات الأربع في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل .

الاقتراح 3	الاقتراح 2	الاقتراح 1	
$u_0 = -162$	$u_0 = -2$	$u_0 = -6$	1 الحد الاول للمتتالية (u_n)
$u_n = 3^n$	$u_n = -6 \times 3^n$	$u_n = -2 \times 3^n$	2 عبارة الحد العام للمتتالية (u_n)
-1458	-162	-486	3 الحد الخامس للمتتالية (u_n) يساوي
$1 - 3^n$	$3^n - 1$	$1 - 3^{n+1}$	4 المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ يساوي

التمرين الثاني :

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\square$ بحدها العام : $v_n = 3^{-2n+1}$

عين في كل حالة من الحالات الثلاث في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل .

الاقتراح 3	الاقتراح 2	الاقتراح 1	
-9	3	$\frac{1}{9}$	1 (v_n) هي متتالية هندسية أساسها
$\frac{1}{19683}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{2187}$	2 الحد السادس للمتتالية (v_n) يساوي
ليست رتيبة	متناقصة	متزايدة	3 المتتالية (v_n)

التمرين الثالث :

(v_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0 = 3$

1. أحسب الحدود v_1 ، v_2 و v_3

2. أكتب v_n بدلالة n .

3. أحسب الحد العاشر .

4. بين أن العدد 3072 هو حد من حدود المتتالية معينا رتبته علما ان $4^5 = 1024$

5. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

التمرين الرابع :

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $v_1 = -3$

1. أحسب الحدود v_2 ، v_3 و v_4

2. أكتب v_n بدلالة n .

3. أحسب الحد العاشر .

4. عين رتبة الحد الذي قيمته -1536 علما ان $2^9 = 512$

5. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

التمرين الخامس:

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{Z}$ بـ : $v_n = -3 \times 2^n$

1. بين ان (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2. حدد اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

3. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

4. عين قيمة العدد الطبيعي n حيث $S_n = -6141$ علما ان $2^{11} = 2048$

التمرين السادس :

(v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 حيث : $v_3 = 32$ و $v_8 = 1024$

1. بين ان $q = 2$ و $v_0 = 4$ علما أن $2^5 = 32$

2. أحسب الحدود v_1 و v_2

3. أكتب v_n بدلالة n .

4. أحسب الحد الحادي عشر .

5. أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ب) استنتج قيمة المجموع $4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 4096$

التمرين السابع:

(v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول v_0 حيث $v_1 + v_4 = 18$

1/ بين أن $v_0 = 1$

2/ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

3/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

3/ استنتج قيمة المجموع S حيث : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_8$

التمرين الثامن :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ حدها الأول $u_0 = 18$ و $u_0 + u_1 + u_2 = 38$

1/ عين q أساس المتتالية (u_n) .

2/ أكتب u_n بدلالة n .

3/ حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4/ أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين التاسع :

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_2 \times u_3 \times u_4 = 13824$

1/ أحسب u_3 علما أن $24^3 = 13824$

2/ علما أن $u_2 = 12$ ، عين الأساس q والحد الأول

3/ أكتب u_n بدلالة n .

4/ حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

5/ أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

6/ عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 765$ علما ان $2^8 = 256$

التمرين العاشر :

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 ، حدودها موجبة تماما حيث : $u_4 \times u_6 = 12544$

1/ أحسب u_5 .

2/ علما أن $u_4 = 56$ ، تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو 2.

3/ أحسب الحد الأول u_1 ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

4/ عين رتبة الحد الذي قيمته 448 (لاحظ أن $2^6 = 64$).

5/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

تمارين المتتاليات في البكالوريا للشعب الادبية :

✓ تمرين باك 2011 الموضوع الاول :

(I) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث $u_0 + u_3 = 28$

1. أحسب u_0 ، ثم أكتب الحد العام u_n بدلالة n .2. أحسب المجموع : $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

(II) (v_n) متتالية عددية معرفّة على $\square$ بحدّها العام : $v_n = 1 - 5n$

1. بين ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها ثم استنتج اتجاه تغيرها .2. أحسب المجموع : $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$.

(III) نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\square$ بحدّها العام : $k_n = 1 + 3^n - 5n$

• تحقق أن : $k_n = u_n + v_n$ ثم أحسب المجموع : $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$

✓ تمرين باك 2011 الموضوع الثاني :

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\square$ بحديهما العام : $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.

عين في كل حالة من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل .

الاقتراح 3	الاقتراح 2	الاقتراح 1		
لا حسابية ولا هندسية	حسابية	هندسية	(u_n) هي متتالية	1
$-n^2 - 1$	$-n^2 - n$	$n^2 + 1$	المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ يساوي	2
-9	9	$\frac{1}{9}$	(v_n) متتالية هندسية أساسها	3
ليست رتيبة	متناقصة	متزايدة	المتتالية (v_n)	4

✓ تمرين باك 2012 الموضوع الاول :

a, b, c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث : $a + b + c = 9$

1. أ) أحسب b ثم أكتب a و c بدلالة r .

ب) علما أن : $a \times c = -16$

- عين الأساس r ثم استنتج a و c

2. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5 .

أ) عبر عن الحد العام u_n بدلالة n .

ب) أحسب u_{15} ثم استنتج المجموع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\square$ بالعلاقة : $8v_n - u_n = 0$

- أحسب المجموع : $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$

✓ تمرين باك 2012 الموضوع الثاني :

(u_n) متتالية حسابية متزايدة ، أساسها r ، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1. أ) أحسب بدلالة r الجذائين : $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

ب) عين الأساس r بحيث : $T_2 - T_1 = 27$

2. نضع $r = 3$.

أ) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

بين أن : $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$

ج) جد العدد الطبيعي n بحيث : $S_n = 145$

3. أ) أكتب الحد u_{n+5} بدلالة n .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا .

✓ تمرين باك 2013 الموضوع الاول :

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1- أ) عبر عن v_n بدلالة n .

ب) أحسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

2- نضع ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n .

ب) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث : $S_n = 80$

ج) أثبت بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

✓ تمرين باك 2013 الموضوع الثاني :

(u_n) متتالية حسابية حدها الاول u_0 وأساسها 5 بحيث : $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$

1. أحسب u_0

2. بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5n + 1$

3. عين العدد الطبيعي n بحيث : $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$

4. أحسب المجموع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2013}$

5. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $v_n = 2u_n + 1$

(أ) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

(ب) أحسب المجموع : $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{2013}$

✓ تمرين باك 2014 الموضوع الأول :

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربعة الآتية ، مع التعليل :

(1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$ ، الحد العام للمتتالية (u_n) هو :

(أ) $u_n = 1 + 3n$ (ب) $u_n = 7 + 3n$ (ج) $u_n = -5 + 3n$

(2) n عدد طبيعي . المجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$ يساوي :

(أ) $\frac{n^2 + n}{2}$ (ب) $\frac{n(n-1)}{2}$ (ج) $\frac{n^2 + 1}{2}$

(3) x عدد حقيقي . تكون الأعداد $x - 2$ ، x ، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية اذا كان :

(أ) $x = 3$ (ب) $x = 5$ (ج) $x = -2$

(4) (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حددها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو :

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 6

✓ تمرين باك 2014 الموضوع الثاني :

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بمالي : $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = 5v_n + 4$

(1) أحسب : v_1 ، v_2 و v_3

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n + 1$

(أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الاول $u_0 = 2$

(ب) أكتب (u_n) بدلالة n .

(ج) حل العدد 1250 الى جداء عوامل أولية واستنتج أنه حد من حدود المتتالية (u_n) .

(3) أ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

ب. أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

✓ تمرين باك 2015 الموضوع الأول :

(u_n) المتتالية الهندسية التي حدها الأول u_0 وأساسها q حيث : $u_0 = 2$ و $q = 3$ 1/ أحسب u_1 و u_2 .2/ أكتب u_n بدلالة n ، ثم استنتج u_5 .3/ عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .4/ أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ ب) استنتج قيمة المجموع : $2 + 6 + 18 + \dots + 486$

✓ تمرين باك 2015 الموضوع الثاني :

(u_n) متتالية حسابية حدها الاول u_1 وأساسها r حيث : $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$ 1) أ) بين أن : $u_1 + u_3 = 1$.ب) عين الحد العام u_1 ، ثم استنتج أن $r = -\frac{5}{2}$.2) أكتب u_n بدلالة n .3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.ب) عين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$ 4) n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع : $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$ أ) تحقق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$ ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

✓ تمرين باك 2016 الموضوع الأول :

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = 3n - 2$ 1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 2) بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها .3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)4) بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته .

(5) أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(ب) عين العدد n بحيث يكون : $S_n = 328$

✓ تمرين باك 2016 الموضوع الثاني :

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 وتحقق : $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

(1) أحسب الحد الأول u_0

(2) أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

(3) عين العدد الطبيعي n بحيث : $u_n = 145$

(4) أحسب المجموع S بحيث : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49}$

(5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\square$ بالعلاقة : $v_n = 2u_n + 3$

أحسب المجموع S' بحيث : $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{49}$

✓ تمرين باك 2017 الموضوع الاول :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما ، معرفة على $\square$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

(1) بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

(2) أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة حدها السابع .

(3) أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(ب) استنتج قيمة المجموع S' حيث $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6$

✓ تمرين باك 2017 الموضوع الثاني :

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة $\square$ بحدها الأول $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

(1) عين الأساس r للمتتالية (u_n) .

(2) بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 6n - 5$

(3) أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ماهي رتبته ؟

(4) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

✓ تمرين باك 2018 الموضوع الاول :

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\square$ ب : $u_n = n^2 - 1$

المتتالية (u_n) : أ) متزايدة تماما (ب) متناقصة تماما (ج) ليست رتيبة

(2) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$ عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي :

(أ) $v_n = 3 \times 2^n$ (ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ (ج) $v_n = 2 \times 3^n$

المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي :

(أ) $3(2^n - 1)$ (ب) $(2^n - 1)$ (ج) $2(3^n - 1)$

✓ تمرين باك 2018 الموضوع الثاني :

 (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما ، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث :

$u_0 + u_1 = 30$ و $u_0 \times u_2 = 576$

(1) بين ان $u_1 = 24$ ، ثم استنتج قيمة u_0 .(2) بين أن $q = 4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .(4) أحسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته .(5) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

✓ تمرين باك 2019 الموضوع الاول :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \frac{2}{5}n - 1$

(1) بين ان المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب حساب حدها الأول u_1 .

(2) عين رتبة الحد الذي قيمته 575.

(3) أحسب قيمة المجموع S حيث : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$.

(4) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $v_n = 4^{5u_n+6}$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها v_1 .(ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

✓ تمرين باك 2019 الموضوع الثاني :

 (u_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول u_0 وأساسها r .(1) علما أن : $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، عين u_1 .(2) علما أن : $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، عين الحد الأول u_0 ، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية (u_n)

(3) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) أ) عين قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$.

(ب) أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n) .

(5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(6) عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $S_n = 96$

✓ تمرين باك 2020 الموضوع الاول :

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث : $u_2 - u_0 = 4$ و $u_1 + u_3 = 16$

(1) أحسب الحد u_2 ، ثم الحد u_0 واستنتج الأساس r للمتتالية (u_n) .

(2) أ. بين ان الحد العام للمتتالية (u_n) معرف بـ : $u_n = 4 + 2n$.

ب. حدد مع التبرير اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) بين ان العدد 2020 حد من حدود المتتالية (u_n) ، محددا رتبته .

(4) أحسب المجموع S المعروف بـ : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{1008}$

✓ تمرين باك 2020 الموضوع الثاني :

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 ، حدودها موجبة تماما حيث : $u_3 \times u_5 = 2916$

(1) أحسب الحد u_4 .

(2) علما أن $u_3 = 18$ ، تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو 3 .

(3) أحسب الحد الأول u_1 ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) عين رتبة الحد الذي قيمته 1458 . (لاحظ أن : $3^6 = 729$)

(5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

تمرين باك 2021 الموضوع الأول :

المتتالية العددية (u_n) هندسية حدودها موجبة تماما ، حدها الأول u_0 وأساسها q

حيث $u_0 = 3$ و $u_1 \times u_3 = 144$

(1) أحسب u_2 ثم بين أن $q = 2$.

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3 \times 2^n$ ،

(3) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

(4) عين قيمة الحد الخامس للمتتالية (u_n)

(5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(أ) بين أن : $S_n = 3(2^{n+1} - 1)$

(ب) عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $S_n = 381$ (لاحظ أن : $2^7 = 128$).

تمرين باك 2021 الموضوع الثاني :

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = 3 \times 4^n$ و $v_n = 3n + 2$

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الاجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التبرير .

(1) الحد الخامس للمتتالية (u_n) يساوي :

(أ) 3072 (ب) 768 (ج) 12288

(2) (v_n) هي متتالية :

(أ) حسابية (ب) هندسية (ج) لا حسابية ولا هندسية

(3) (u_n) هي متتالية :

(أ) متناقصة تماما (ب) غير رتيبة (ج) متزايدة تماما

(4) المجموع : $v_0 + v_1 + \dots + v_{35}$ يساوي :

(أ) 3815 (ب) 1962 (ج) 1890

الاجابة المقترحة لتمرين المراجعة النهائية في المتتاليات الحسابية :

حل التمرين الأول :

1/ حساب الحدود : $u_1 = u_0 + r = 7 + 3 = 10$ و $u_2 = u_1 + r = 10 + 3 = 13$ و $u_3 = u_2 + r = 13 + 3 = 16$

2/ كتابة u_n بدلالة n : لدينا : $u_n = u_0 + nr$ ومنه $u_n = 7 + 3n$

3/ تعيين قيمة n : لدينا $u_n = 2023$ تكافئ $7 + 3n = 2023$ تكافئ : $3n = 2023 - 7$ ومنه $3n = 2016$ أي $n = \frac{2016}{3}$ ومنه $n = 672$.

4/ حساب المجموع S :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{672} = \frac{672 - 0 + 1}{2} (u_0 + u_{672}) = \frac{673}{2} (7 + 2023) = 683095$$

حل التمرين الثاني :

1/ اثبات أن (u_n) متتالية حسابية :

$$u_{n+1} - u_n = -2 - 3(n+1) - (-2 - 3n) = -2 - 3n - 3 + 2 + 3n = -3$$

ومن المتتالية (u_n) حسابية أساسها -3

2/ تحديد اتجاه التغير :

بما أن $0 < -3 < r$ فإن المتتالية متناقصة تماما على $\square$.3/ تعيين قيمة n :

$$-2022 = u_{n+1} + u_n + 1 \text{ تكافئ } -2022 = -2 - 3(n+1) - 2 - 3n + 1 \text{ تكافئ } -2022 = -2 - 3n - 3 - 2 - 3n + 1 \text{ تكافئ}$$

$$-2022 = -6n - 6 \text{ تكافئ } -2022 + 6 = -6n \text{ تكافئ } -2016 = -6n \text{ تكافئ } n = \frac{-2016}{-6} \text{ تكافئ } n = 336$$

4/ حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n-0+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(-2 - 2 - 3n) = \frac{n+1}{2}(-4 - 3n)$$

$$5/ \text{ أ) كتابة } v_n \text{ بدلالة } n : \text{ لدينا } : v_n = -3u_n + 5 \text{ بالتعويض نجد } v_n = -3(-2 - 3n) + 5 \text{ أي } v_n = 6 + 9n + 5 \text{ ومنه } v_n = 9n + 11$$

ب) حساب S'_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} S'_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n = -3u_0 + 5 - 3u_1 + 5 + \dots - 3u_n + 5 \\ &= -3(u_0 + u_1 + \dots + u_n) + 5(n-0+1) \\ &= -3S_n + 5n + 5 = -3\left[\frac{n+1}{2}(-4 - 3n)\right] + 5n + 5 \end{aligned}$$

حل التمرين الثالث :

1/ تعيين الاساس r :

$$\text{لدينا : (1) } u_1 + u_2 - 2u_3 = 12$$

$$\text{لنا : } u_1 = u_0 + (1-0) \times r = 3 + (1-0) \times r = 3 + r$$

$$\text{و } u_2 = u_0 + (2-0) \times r = 3 + (2-0) \times r = 3 + 2r$$

$$\text{و } u_3 = u_0 + (3-0) \times r = 3 + (3-0) \times r = 3 + 3r$$

بالتعويض في (1) نجد :

$$3 + r + 3 + 2r - 2(3 + 3r) = 12 \text{ تكافئ } 3 + r + 3 + 2r - 6 - 6r = 12 \text{ تكافئ } -3r = 12 \text{ تكافئ } r = \frac{12}{-3} \text{ أي } r = -4$$

2/ اثبات أن : $u_n = 3 - 4n$

$$\text{لدينا : } u_n = u_0 + nr \text{ وبالتعويض نجد } u_n = 3 - 4n$$

$$3/ \text{ لدينا : } u_n = -2021 \text{ أي } 3 - 4n = -2021 \text{ أي } -4n = -2021 - 3 \text{ ومنه } -4n = -2024 \text{ ومنه } n = \frac{-2024}{-4} \text{ ومنه } n = 506$$

$$\text{ومنه العدد } -2021 \text{ حد من حدود المتتالية } (u_n) \text{ حيث } u_{506} = -2021 \text{ ورتبته } 507$$

4/ حساب S :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{506} = \frac{506-0+1}{2}(u_0 + u_{506}) = \frac{507}{2}(3 + (-2021)) = -511563$$

5/ أ) حساب S_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n-0+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(3 + 3 - 4n) \\ &= \frac{n+1}{2}(6 - 4n) = \frac{n+1}{2} \times 2(3 - 2n) = (n+1)(3 - 2n) \end{aligned}$$

ب) تعيين قيمة n :

لدينا $S_n = -187$ أي $(n+1)(3-2n) = -187$ أي $3n - 2n^2 + 3 - 2n = -187$ أي $-2n^2 + n + 3 + 187 = 0$ ومنه $2n^2 + n + 190 = 0$

حساب المميز Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-2)(190) = 1521$

مقبول $n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 39}{2 \times (-2)} = \frac{-40}{-4} = 10$ و مرفوض $n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 39}{2 \times (-2)} = \frac{38}{-4} = \frac{-19}{2}$

ومنه $n = 10$

حل التمرين الرابع :

1/ تعيين الحد الاول u_0 :

لدينا : (1) $u_1 - u_2 + 3u_4 = 57$

لنا : $u_1 = u_0 + (1-0)r = u_0 + (1-0) \times 6 = u_0 + 6$

و $u_2 = u_0 + (2-0)r = u_0 + (2-0) \times 6 = u_0 + 12$

و $u_4 = u_0 + (4-0)r = u_0 + (4-0) \times 6 = u_0 + 24$

بالتعويض في (1) نجد :

$3u_0 = 57 - 66$ ومنه $3u_0 + 66 = 57$ ومنه $u_0 + 6 - u_0 - 12 + 3u_0 + 72 = 57$ تكافئ $u_0 + 6 - (u_0 + 12) + 3(u_0 + 24) = 57$
ومنه $3u_0 = -9$ أي $u_0 = \frac{-9}{3}$ ومنه $u_0 = -3$

2/ من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا $u_n = u_0 + nr$ ومنه $u_n = -3 + 6n$ أي $u_n = 6n - 3$

3/ الحد ذو الرتبة 2022 هو u_{2021} : $u_{2021} = 6 \times 2021 - 3 = 12123$

4/ حساب S : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2021} = \frac{2021-0+1}{2}(u_0 + u_{2021}) = \frac{2022}{2}(-3 + (12123)) = 12253320$

حل التمرين الخامس :

1/ حساب u_3 :

$$\text{لدينا : } u_2 + u_3 + u_4 = 33 \text{ تكافئ } u_3 + u_2 + u_4 = 33$$

$$\text{لنا } u_2 + u_4 = 2u_3 \text{ وبالتعويض نجد :}$$

$$u_3 = 11 \text{ أي } u_3 = \frac{33}{3} \text{ ومنه } 3u_3 = 33 \text{ أي } u_3 + 2u_3 = 33$$

$$\text{حساب } u_1 : \text{لدينا : } u_1 - u_3 + 4 = 0 \text{ وبالتعويض نجد : } u_1 - 11 + 4 = 0 \text{ أي } u_1 - 7 = 0 \text{ ومنه } u_1 = 7$$

$$\text{حساب الاساس : } r = \frac{u_n - u_p}{n - p} \text{ ومنه } r = \frac{u_3 - u_1}{3 - 1} \text{ أي } r = \frac{11 - 7}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ ومنه } r = 2$$

$$/2 \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم :}$$

$$\text{لدينا : } u_n = u_1 + (n-1)r \text{ وبالتعويض نجد : } u_n = 7 + (n-1)(2) \text{ ومنه } u_n = 7 + 2n - 2 \text{ أي } u_n = 5 + 2n$$

$$/3 \text{ الحد الذي رتبته } 1009 \text{ هو } u_{1008} : u_{1008} = 5 + 2(1008) = 2021$$

$$/4 \text{ أ) حساب } S_n \text{ بدلالة } n :$$

$$S_n = u_1 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n-1+1}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(7 + 5 + 2n) = \frac{n}{2}(12 + 2n) = \frac{n}{2} \times 2(6 + n) = n(6 + n) = 6n + n^2$$

$$\text{(ب) تعيين قيمة } n :$$

$$\text{لدينا : } S_n = 4096567 \text{ أي } n^2 + 6n = 4096567 \text{ ومنه } n^2 + 6n - 4096567 = 0$$

$$\text{حساب المميز } \Delta : \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(-4096567) = 16386304$$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 4048}{2 \times (1)} = \frac{4042}{2} = 2021 \text{ و مقبول } n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 4048}{2 \times (1)} = \frac{-4054}{2} = -2027 \text{ مرفوض}$$

$$\text{ومنه } n = 2021$$

حل التمرين السادس :

$$/1 \text{ الاقتراح الثاني } -14$$

$$\text{الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها } -3 \text{ وحدها الأول } 1 \text{ هو } u_5 = u_0 + (5-0) \times r = 1 + 5 \times (-3) = -14$$

$$/2 \text{ الاقتراح الثالث } u_n = -5 + 3n$$

$$(u_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } 3 \text{ وحدها } u_2 = 1. \text{ الحد العام للمتتالية } (u_n) \text{ هو :}$$

$$\text{حساب } u_0 : u_0 = u_2 + (0-2) \times r = 1 - 2 \times 3 = -5$$

$$\text{عبارة الحد العام : } u_0 = u_2 + (0-2) \times r = 1 - 2 \times 3 = -5$$

$$\text{لدينا : } u_n = u_0 + nr \text{ وبالتعويض نجد : } u_n = -5 + 3n$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ الاقتراح الاول}$$

a, b و c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية معناه :

$$2b = a + c \text{ أي : } 2(6x - 3) = 2x + 2 + 4x \text{ أي } 12x - 6 = 6x + 2 \text{ ومنه } 12x - 6x = 2 + 6 \text{ أي } 6x = 8 \text{ ومنه}$$

$$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{n^2 + n}{2} \text{ الاقتراح الاول}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n-1+1}{2}(1+n) = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n^2 + n}{2} \text{ حساب المجموع :}$$

حل التمرين السابع :

$$\begin{cases} u_3 + u_6 = -10 \\ 2u_1 - u_4 = 8 \end{cases} \text{ لدينا : 1/}$$

$$\text{لنا : } u_3 = u_0 + (3-0)r = u_0 + 3r \text{ و } u_6 = u_0 + (6-0)r = u_0 + 6r \text{ و } u_1 = u_0 + (1-0)r = u_0 + r \text{ و}$$

$$u_4 = u_0 + (4-0)r = u_0 + 4r \text{ وبالتعويض نجد :}$$

$$\begin{cases} 2u_0 + 9r = -10 \dots\dots\dots (1) \\ u_0 - 2r = 8 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 2u_0 + 9r = -10 \\ 2u_0 + 2r - u_0 - 4r = 8 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} u_0 + 3r + u_0 + 6r = -10 \\ 2(u_0 + r) - (u_0 + 4r) = 8 \end{cases}$$

نضرب طرفي (2) في العدد -2 نجد :

$$\begin{cases} 2u_0 + 9r = -10 \dots\dots\dots (1) \\ -2u_0 + 4r = -16 \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ بجمع (1) و (3) نجد}$$

$$2u_0 + 9r - 2u_0 + 4r = -10 - 16 \text{ أي } 13r = -26 \text{ ومنه } r = \frac{-26}{13} \text{ أي } r = -2$$

$$\text{بالتعويض في (2) نجد : } u_0 - 2(-2) = 8 \text{ أي } u_0 + 4 = 8 \text{ ومنه } u_0 = 8 - 4 \text{ أي } u_0 = 4$$

$$2/ \text{ كتابة } u_n \text{ بدلالة } n \text{ لدينا } u_n = u_0 + nr \text{ وبالتعويض نجد } u_n = 4 - 2n$$

$$3/ \text{ الحد ذو الرتبة } 1009 \text{ هو } u_{1008} \text{ ولنا : } u_{1008} = 4 - 2(1008) = -2012$$

4/ حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{n-1-0+1}{2}(u_0 + u_{n-1}) = \frac{n}{2}(4 + 4 - 2(n-1)) = \frac{n}{2}(8 - 2n + 2)$$

$$= \frac{n}{2}(10 - 2n) = \frac{n}{2} \times 2(5 - n) = n(5 - n) = 5n - n^2$$

$$5/ \text{ استنتاج قيمة المجموع } S : S = u_0 + u_1 + \dots + u_{1009} = 5(1008) - (1008)^2 = -1011024$$

الإجابة المقترحة لتمرين المراجعة النهائية في المتتاليات الهندسية :

حل التمرين الاول :

1/ الاقتراح الثاني $u_0 = -2$

لدينا : $u_0 = u_2 \times q^{0-2} = -18 \times 3^{-2} = -2$

2/ الاقتراح الاول $u_n = -2 \times 3^n$

لدينا : $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه بالتعويض نجد : $u_n = -2 \times 3^n$

3/ الاقتراح الثاني -162

لدينا : الحد الخامس هو u_4 ومنه : $u_4 = -2 \times 3^4 = -162$

4/ الاقتراح الثالث

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times \frac{q^{n-1-0+1} - 1}{q - 1} = -2 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1} = -2 \times \frac{3^n - 1}{2} = -(3^n - 1) = 1 - 3^n$$

حل التمرين الثاني :

1/ الاقتراح الاول $\frac{1}{9}$

طريقة 1 :

$$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{-2(n+1)+1}}{3^{-2n+1}} = \frac{3^{-2n-2+1}}{3^{-2n+1}} = \frac{3^{-2n+1} \times 3^{-2}}{3^{-2n+1}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

طريقة 2 : يمكن حساب حدين من حدودها واستنتاج الاساس لاننا نعلم مسبقا انها متتالية هندسية

$$q = \frac{v_1}{v_0} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9} \text{ و بالتالي } v_1 = 3^{-2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3} \text{ و } v_0 = 3^{-2 \times 0 + 1} = 3$$

2/ الاقتراح الثالث $\frac{1}{19683}$

الحد السادس هو v_5 أي : $v_5 = 3^{-2 \times (5) + 1} = \frac{1}{19683}$

3/ الاقتراح الثاني " متناقصة "

$$v_{n+1} - v_n = 3^{-2(n+1)+1} - 3^{-2n+1} = 3^{-2n-2+1} - 3^{-2n+1} = 3^{-2n+1} \times 3^{-2} - 3^{-2n+1} = 3^{-2n+1} (3^{-2} - 1) = 3^{-2n+1} \left(\frac{-8}{9} \right) < 0$$

ومنه : المتتالية (v_n) متناقصة

حل التمرين الثالث :

1/ حساب الحدود :

$$v_3 = v_2 \times q = 48 \times 4 = 192 \quad \text{و} \quad v_2 = v_1 \times q = 12 \times 4 = 48 \quad \text{و} \quad v_1 = v_0 \times q = 3 \times 4 = 12$$

2/ كتابة v_n بدلالة n : لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ وبالتعويض نجد : $v_n = 3 \times 4^n$ 3/ حساب الحد العاشر وهو v_9 : $v_9 = 2 \times 4^9 = 786432$

4/ تبين أن العدد 3072 حد من حدود المتتالية :

$$\text{لدينا : } v_n = 3072 \text{ ومنه } 3 \times 4^n = 3072 \text{ ومنه } 4^n = \frac{3072}{3} \text{ ومنه } 4^n = 1024 \text{ أي } 4^n = 4^5 \text{ ومنه } n = 5$$

5/ حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 3 \times \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = 3 \times \frac{4^{n+1} - 1}{3} = 4^{n+1} - 1$$

حل التمرين الرابع :

/ حساب الحدود :

$$v_4 = v_3 \times q = -12 \times 2 = -24 \quad \text{و} \quad v_3 = v_2 \times q = -6 \times 2 = -12 \quad \text{و} \quad v_2 = v_1 \times q = -3 \times 2 = -6$$

2/ كتابة v_n بدلالة n : لدينا : $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ وبالتعويض نجد : $v_n = -3 \times 2^{n-1}$ 3/ حساب الحادي عشر وهو v_{11} : $v_{11} = -3 \times 2^{11} = -6144$

4/ تعيين رتبة الحد الذي قيمته -1536 :

$$\text{لدينا : } v_n = -1536 \text{ ومنه } -3 \times 2^{n-1} = -1536 \text{ ومنه } 2^{n-1} = \frac{-1536}{-3} \text{ ومنه } 2^{n-1} = 512 \text{ أي } 2^{n-1} = 2^9 \text{ ومنه } n = 10$$

5/ حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \frac{q^{n-1+1} - 1}{q - 1} = -3 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = -3 \times \frac{2^n - 1}{1} = -3(2^n - 1)$$

حل التمرين الخامس :

1/ اثبات أن (v_n) هندسية وتعيين أساسها :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-3 \times 2^{n+1}}{-3 \times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2^1}{2^n} = 2$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها 2

2/ تحديد اتجاه التغير :

طريقة 1 :

لدينا : $q = 2 > 1$ و $v_0 = -3 < 0$ إذن المتتالية (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

طريقة 2:

$$v_{n+1} - v_n = -3 \times 2^{n+1} - (-3 \times 2^n) = -3 \times 2^n \times 2 - (-3 \times 2^n) = (-3 \times 2^n)(2 - 1) = (-3 \times 2^n) < 0$$

ومنه المتتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.3/ حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{q^{n-0+1} - 1}{q - 1} = -3 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = -3 \times \frac{2^{n+1} - 1}{1} = -3(2^{n+1} - 1)$$

4/ تعيين قيمة n حتى يكون $S_n = -6141$

$$\text{لدينا } S_n = -6141 \text{ أي } -3(2^{n+1} - 1) = -6141 \text{ ومنه } 2^{n+1} - 1 = \frac{-6141}{-3} \text{ ومنه } 2^{n+1} - 1 = 2047 \text{ أي } 2^{n+1} = 2048 \text{ ومنه } 2^{n+1} = 2047 + 1$$

$$n = 10 \text{ وبالتالي } 2^{n+1} = 2^{11} \text{ ومنه } 2^{n+1} = 2048$$

حل التمرين السادس :

1/ تبين أن : $q = 2$ و $v_0 = 4$

$$\text{لدينا : } q^{n-p} = \frac{v_n}{v_p} \text{ أي } q^{8-3} = \frac{v_8}{v_3} \text{ ومنه } q^{8-3} = \frac{1024}{32} \text{ ومنه } q^5 = 32 \text{ ومنه } q^5 = 2^5 \text{ وبالتالي } q = 2$$

$$\text{لدينا : } v_n = v_p \times q^{n-p} \text{ أي } v_0 = v_3 \times q^{0-3} \text{ ومنه } v_0 = 32 \times 2^{-3} = 4$$

$$2/ \text{ حساب الحدود : } v_1 = v_0 \times q = 4 \times 2 = 8 \text{ و } v_2 = v_1 \times q = 8 \times 2 = 16$$

$$3/ \text{ كتابة } v_n \text{ بدلالة } n : \text{ لدينا } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه } v_n = 4 \times 2^n$$

4/ حساب الحد الحادي عشر : وهو v_{10}

$$v_{10} = 4 \times 2^{10} = 4096$$

5/ أ) حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{q^{n-0+1} - 1}{q - 1} = 4 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 4 \times (2^n - 1)$$

ب) استنتاج قيمة المجموع :

$$4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 4096 = v_0 + v_1 + \dots + v_{10} = 4 \times (2^{10} - 1) = 4092$$

حل التمرين السابع :

$$1/ \text{ تبين أن } v_0 = 1 : \text{ لدينا } v_1 + v_4 = 18$$

$$\text{لدينا } v_4 = v_0 \times q^{4-0} = v_0 \times 2^4 = 16v_0 \text{ و } v_1 = v_0 \times q^{1-0} = v_0 \times 2^1 = 2v_0$$

$$\text{بالتعويض نجد : } 2v_0 + 16v_0 = 18 \text{ أي } 18v_0 = 18 \text{ ومنه } v_0 = \frac{18}{18} \text{ وبالتالي } v_0 = 1.$$

$$2/ \text{ تعيين عبارة الحد العام : لدينا } v_n = v_0 \times q^n \text{ أي } v_n = 1 \times 2^n \text{ ومنه } v_n = 2^n$$

$$3/ \text{ حساب المجموع } S_n \text{ بدلالة } n :$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 1 \times \frac{2^{n+1} - 1}{1} = 2^{n+1} - 1$$

$$4/ \text{ استنتاج قيمة المجموع } S : S = v_0 + v_1 + \dots + v_8 = 2^{8+1} - 1 = 511$$

حل التمرين الثامن :

$$1/ \text{ تعيين الاساس :}$$

$$\text{لدينا : } u_2 = u_0 \times q^{2-0} = 18q^2 \text{ و } u_1 = u_0 \times q = 18q$$

$$\text{بالتعويض نجد : } 18 + 18q + 18q^2 = 38 \text{ ومنه } 18q^2 + 18q + 18 - 38 = 0 \text{ أي } 18q^2 + 18q - 20 = 0$$

$$\text{حساب } \Delta : \Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4(18)(-20) = 1764$$

$$\text{ومنه : } q_2 = \frac{-18 + 42}{2 \times 18} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \text{ و } q_1 = \frac{-18 - 42}{2 \times 18} = \frac{-60}{36} = \frac{-5}{3}$$

$$\text{بما أن المتتالية } (u_n) \text{ حدودها موجبة فإن } q = \frac{2}{3}$$

$$2/ \text{ كتابة } u_n \text{ بدلالة } n : \text{ لدينا } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه بالتعويض نجد } u_n = 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$3/ \text{ تحديد اتجاه التغير :}$$

$$\text{طريقة 1 : لدينا } 1 > q = \frac{2}{3} > -1 \text{ و } u_0 = 18 > 0 \text{ إذن المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما على } \mathbb{N}$$

$$\text{طريقة 2 : ندرس إشارة الفرق}$$

$$u_{n+1} - u_n = 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3}\right) - 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 1\right) = 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{-1}{3}\right) < 0$$

$$\text{ومنه المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما على } \mathbb{N}$$

$$4/ \text{ حساب المجموع :}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 18 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 18 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 18 \times 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 54 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

حل التمرين التاسع :

$$1/ \text{ حساب } u_3 : \text{ لدينا } u_2 \times u_3 \times u_4 = 13824 \text{ أي } u_2 \times u_3 \times u_4 = 13824$$

نعلم أن : $u_3^2 = u_2 \times u_4$ (خاصية الوسط الهندسي)

$$\text{بالتعويض نجد : } u_3 \times u_3^2 = 13824 \text{ ومنه } u_3^3 = 13824 \text{ أي } u_3^3 = 24^3 \text{ وبالتالي } u_3 = 24$$

$$2/ \text{ حساب الاساس } q : \text{ لدينا } u_2 = 12 \text{ و } u_3 = 24 \text{ وبالتالي } q = \frac{u_3}{u_2} = \frac{24}{12} = 2$$

$$\text{حساب الحد الاول : } u_0 = u_2 \times q^{0-2} = 12 \times 2^{-2} = 3$$

$$3/ \text{ كتابة } u_n \text{ بدلالة } n : \text{ لدينا } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه } u_n = 3 \times 2^n$$

4/ تحديد اتجاه التغير :

$$\text{طريقة 1 : لدينا } q = 2 > 1 \text{ و } u_0 = 3 > 0 \text{ إذن المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{N}$$

طريقة 2 : ندرس إشارة الفرق

$$u_{n+1} - u_n = 3 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n = 3 \times 2^n \times 2 - 3 \times 2^n = (3 \times 2^n)(2 - 1) = 3 \times 2^n > 0$$

5/ حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 3 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 3 \times \frac{2^{n+1} - 1}{1} = 3(2^{n+1} - 1)$$

حل التمرين العاشر :

$$1/ \text{ حساب } u_5 : \text{ لدينا حسب خاصية الوسط الهندسي } u_5^2 = u_4 \times u_6$$

$$\text{ومنه بالتعويض نجد : } u_5^2 = 12544 \text{ وبالتالي } u_5 = 112 \text{ أو } u_5 = -112$$

بما أن المتتالية حدودها موجبة تماما فإن $u_5 = 112$

2/ التحقق أن الأساس يساوي 2 :

$$\text{لدينا } u_4 = 56 \text{ و } u_5 = 112 \text{ وبالتالي } q = \frac{u_5}{u_4} = \frac{112}{56} = 2$$

$$3/ \text{ حساب الحد الاول : } u_1 = u_4 \times q^{1-4} = 56 \times 2^{-3} = 7$$

$$\text{كتابة } u_n \text{ بدلالة } n : u_n = u_1 \times q^{n-1} \text{ ومنه بالتعويض نجد } u_n = 7 \times 2^{n-1}$$

$$\sqrt{12544} = 112$$

4/ تعيين رتبة الحد الذي قيمته 448 :

لدينا $u_n = 448$ أي $7 \times 2^{n-1} = 448$ وبالتالي $2^{n-1} = \frac{448}{7}$ ومنه $2^{n-1} = 64$ أي $2^{n-1} = 2^6$ وبالتالي $n = 7$

5/ حساب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = u_1 + u_1 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{q^{n-1+1} - 1}{q - 1} = 7 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 7 \times \frac{2^n - 1}{1} = 7(2^n - 1)$