



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسية e^x

3

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 16

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) برهن أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

(3) أ- بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

(4) بيّن أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-2.77 < \alpha < -2.76$.

(5) مثل بيانيا (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(4x + 1)$$

(عبارة g غير مطلوبة).

(1) ما هو اتجاه تغير الدالة g .

(2) تحقق من أن:

$$g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$$

(3) استنتج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha - 1}{4}$.

(4) تحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ:

$$y = (1 + \alpha)^2 x - \frac{(1 + \alpha)(\alpha^2 - 1)}{4}$$

(III) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمي (C_k) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$

(1) بين أن الدالة k زوجية.

(2) أ- بين كيف تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) .

ب- انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسَمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.

(2) أ- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب- انطلاقاً من (C_f) ، مثل بيانياً (C_h)

(I)

(1) أ- تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \\ &= \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \end{aligned}$$

ب- دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما.

لدينا $f'(0) = 0$ أي المشتقة تنعدم ولا تغير إشارتها، ومنه نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف.

ج- جدول تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{\frac{4}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] = +\infty$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(0)$	$+\infty$

(2) برهان أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) :

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$



- نثبت أن: $(2(0) - x) \in D_f$

لدينا $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-x) \in \mathbb{R}$

- نثبت أن: $f(2(0) - x) + f(x) = 2(1)$

لدينا:

$$\begin{aligned} f(2(0) - x) + f(x) &= -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} + x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \\ &= -2 + \frac{4}{e^{-x} + 1} + \frac{4}{e^x + 1} \\ &= \frac{-2(e^{-x} + 1)(e^x + 1) + 4(e^x + 1) + 4(e^{-x} + 1)}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\ &= \frac{2[2(e^x + 1) + 2(e^{-x} + 1) - (e^{-x} + 1)(e^x + 1)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\ &= \frac{2[2(e^x + e^{-x} + 2) - (e^x + e^{-x} + 2)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\ &= \frac{2[2(e^x + e^{-x} + 2) - (e^x + e^{-x} + 2)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\ &= \frac{2[e^x + e^{-x} + 2]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\ &= \frac{2[e^x + e^{-x} + 2]}{e^x + e^{-x} + 2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ومنه النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

(3) أ- تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{e^x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} \right] = 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x - 1$

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] = 3$$

- الاستنتاج؟

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 3 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 3] = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

◀ ملاحظة: أمكننا إدخال 3 داخل النهاية لأنها لا تتعلق بالنهاية ▶

(4) تبين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-2.77 < \alpha < -2.76$.

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(-2.76) = 0.001$ و $g(-2.77) = -0.3$

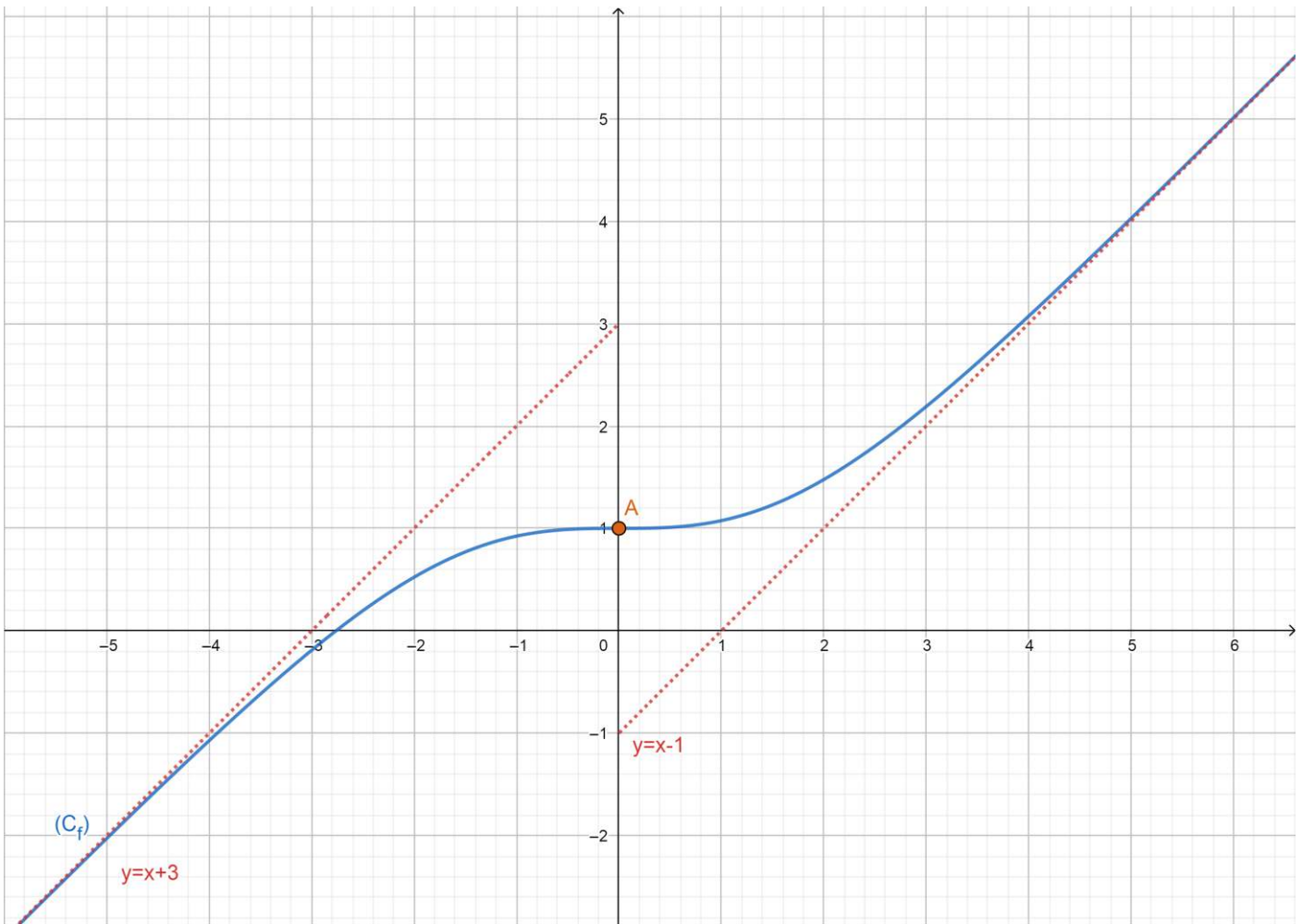
ولدينا: $g(-2.77) \times g(-2.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

(5) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة: $(y = x - 1)$ و $(y = x + 3)$
- نعين A نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II)

(1) اتجاه تغير الدالة g :

نلاحظ أن $g(x) = (f \circ \varphi)(x)$ حيث $\varphi(x) = 4x + 1$

لدينا الدالة φ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

والدالة f متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

(2) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$

$$g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = f\left(4 \cdot \frac{\alpha-1}{4} + 1\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبين أن: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$

لدينا: $g'(x) = 4f'(4x + 1)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'\left(4 \cdot \frac{\alpha-1}{4} + 1\right) = 4f'(\alpha)$$

(3) استنتاج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$:

$$(T): y = g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)\left(x - \frac{\alpha-1}{4}\right) + g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)$$

$$= 4f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha-1}{4}\right) + 0$$

$$= 4f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha-1)$$

(4) التحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ: $y = (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$

لدينا:

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - 1 + \frac{4}{e^\alpha + 1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{e^\alpha + 1} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow e^\alpha = \frac{3 + \alpha}{1 - \alpha}$$

ومنه:

$$(T): y = 4 \left(\frac{\frac{3+\alpha}{1-\alpha} - 1}{\frac{3+\alpha}{1-\alpha} + 1} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right)$$

$$= 4 \left(\frac{2\alpha+2}{4} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right)$$

$$= 4 \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right)$$

$$= (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{4}$$

$$= (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{4}$$

$$= (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$$



دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

$$\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \quad \text{لتبين أن الدالة } f \text{ فردية} \quad \text{نبين أن}$$

$$\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \quad \text{لتبين أن الدالة } f \text{ زوجية} \quad \text{نبين أن}$$

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$k(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

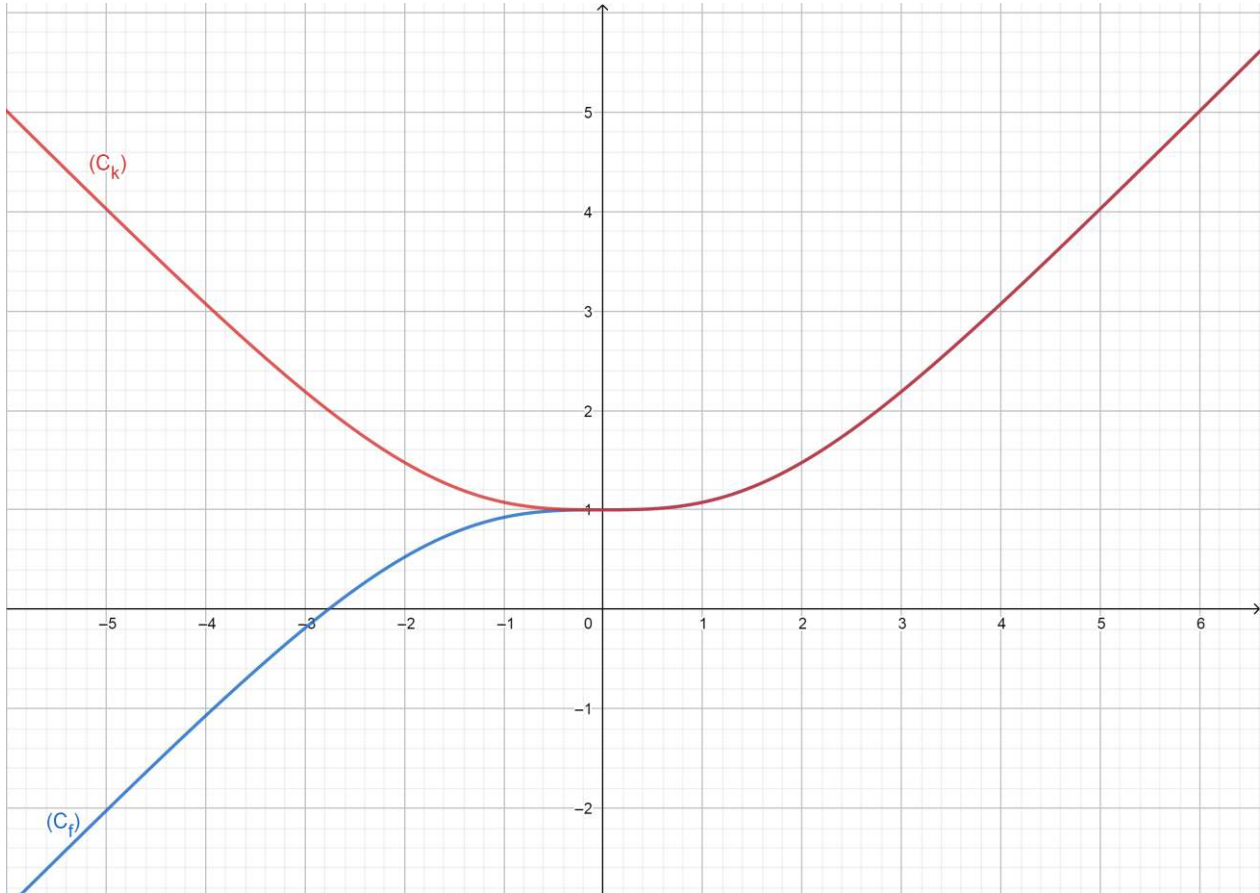
ومنه الدالة k زوجية.

(2) أ- تبين كيفية تمثيل (C_k) انطلاقاً من (C_f) :

لما $x \geq 0$: (C_k) ينطبق على (C_f)

ولما $x \leq 0$: (C_k) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور الترتيب (yy')

ب- التمثيل البياني لـ (C_k) :



(1) التحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$

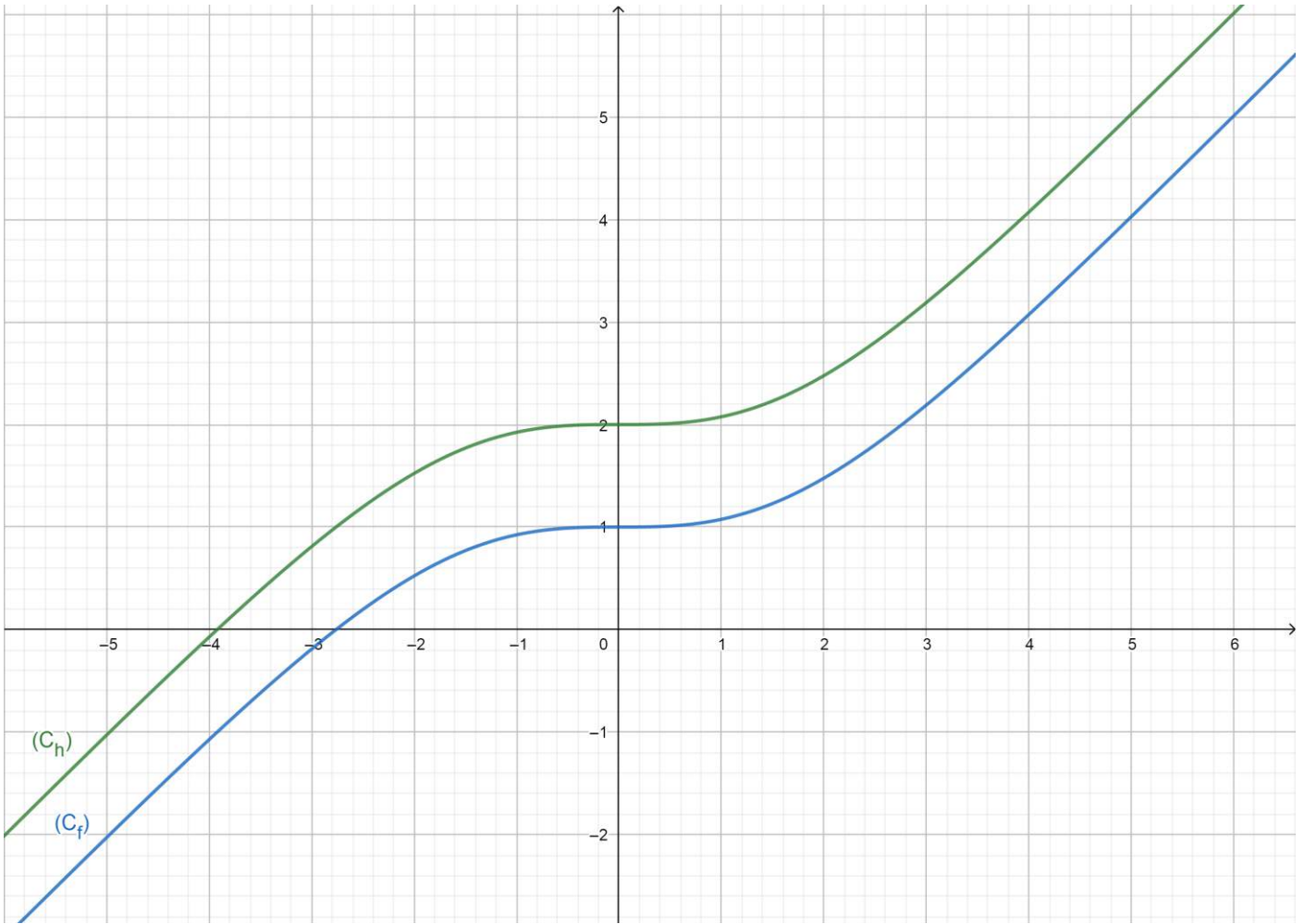
$$\begin{aligned} f(x) + 1 &= x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} + 1 \\ &= x + \frac{4}{e^x + 1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

(2) أ- استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه:

لدينا: $h(x) = f(x) + 1$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}(0; 1)$

ب- التمثيل البياني لـ (C_h) :



◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶