

التمرين الأول : (05 نقاط)

في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ نعتبر كثير الحدود : $P(z) = z^3 - 2(1-i)z^2 + 4(1-i)z + 8i$

① أثبت أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يُطلب تعيينه .

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ حيث تقبل هذه المعادلة حلين مترافقين z_1 و z_2 .

③ في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C ذات اللواحق :

$$z_A = -2i, z_B = 1 + \sqrt{3}i, z_C = 1 - \sqrt{3}i \text{ على الترتيب .}$$

① أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $\left[\frac{z_A z_C}{4} \right]^n$ حقيقيا سالبا .

② عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $OBDC$ متوازي الأضلاع .

③ أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_D}{z_B - z_C}$ على الشكل الجبري ثم استنتج طبيعة متوازي الأضلاع $OBDC$.

④ عين نسبة و زاوية التشابه المباشر f الذي يحول A إلى C و D إلى B ثم استنتج وفق f لاحقة النقطة I مركز $OBDC$.

⑤ - عين L مجموعة قيم العدد الحقيقي m حتى تكون النقطة Ω_m مرجح للجملة المثقلة :

$$\{(O; 2-m); (B; m); (D; 2m-1); (C; 3m-2)\}$$

- عين طبيعة (Γ_1) مجموعة النقط Ω_m من المستوي لما m تسمح المجموعة L .

⑥ عين طبيعة (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي و التي تحقق : $MO^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8$

التمرين الثاني : (06 نقاط)

لتكن الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 1 & / x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \ln x & / x > 1 \end{cases}$$

نسمى (C) المنحنى الممثل لـ f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$

① أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة على $\mathbb{R}$.

② أدرس اشتقاقية الدالة f عند القيمة $x_0 = 1$ ثم فسر النتيجة ببيانها .

③ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم أثبت أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الفواصل يُطلب تعيين معادلته .

④ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

⑤ أثبت أن المنحنى (C) يقبل مماسين معامل توجيههما هو $\frac{1}{e}$ يُطلب تعيين معادلتيهما .

⑥ لتكن الدالة العددية h_1 ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة على $[1; +\infty[$ كمايلي : $h_1(x) = \ln x - \frac{1}{e}x$

① أدرس اتجاه تغير الدالة h_1 ثم استنتج إشارة $h_1(x)$.

② ماهي الوضعية النسبية للمنحنى (C) مع المماس ؟ علل إجابتك .

7 لتكن الدالة العددية h_2 ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة على $[-\infty; 1]$ كمايلي : $h_2(x) = 2e^x - x - 1 - \ln 2$

① ادرس اتجاه تغير الدالة h_2 ثم استنتج إشارة $h_2(x)$.

② ماهي الوضعية النسبية للمنحنى (C) مع المماس ؟ علل إجابتك .

③ مثل المماسين و المنحنى (C) .

9 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (d_m) حيث $(d_m): y = \frac{1}{e}x + m$

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

ليكن ABCD رباعي وجوه حيث ABC ، ABD و ACD ثلاث مثلثات قائمة في A و متساوية الساقين .

نسمي A_1 مركز ثقل المثلث BCD و نضع $AB = AC = AD = a$.

① أثبت أن المستقيم (AA_1) عمودي على المستوي BCD . (يمكن حساب الجداءات السلمية $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD}$)

② عبّر بطريقتين مختلفتين عن حجم رباعي الوجوه ABCD ثم استنتج طول القطعة المستقيمة $[AA_1]$.

③ نسمي G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;1);(C;1);(D;1)\}$ و I منتصف $[BC]$.

① أثبت أن G تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[AA_1]$ ثم عين الطول AG.

② عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

④ لتكن H نظيرة A بالنسبة إلى G .

① أثبت أن : $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$

② أثبت أن : $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$

③ استنتج أن : $HC = HD$

التمرين الرابع : (04,5 نقاط)

① أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2772 ، 1260 و 504 .

② نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية : (1) $2772x - 1260y = 504$

① عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق : $2x_0^2 - 3y_0^2 = -4$

② باستعمال الحل الخاص المتحصل عليه ، حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (1).

③ نفرض أن x و y عدنان طبيعيان حيث $(x;y)$ هو حل للمعادلة (1).

① عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

② عين كل الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون العدنان x و y أوليين فيما بينهما.

④ ① نفرض من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن : $6^n \equiv 6[10]$

عين رقم أحاد الأعداد المختلفة و المشكلة من قوى العدد 2 ثم استنتج رقم أحاد العدد 2^{1439} 2018 .

② عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (1) و التي تحقق : $2^{y-2x} \equiv 8[10]$