

• الدالة f دالة كثير حدود وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ ومن ثم على $[-3; -2]$.

• لدينا: $\begin{cases} f(-3) = -15 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$ ، كما نلاحظ أن العدد -2 محصور بين العددين $f(-3)$ و $f(-2)$.

إن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3 - 4x = -2$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[-3; -2]$.

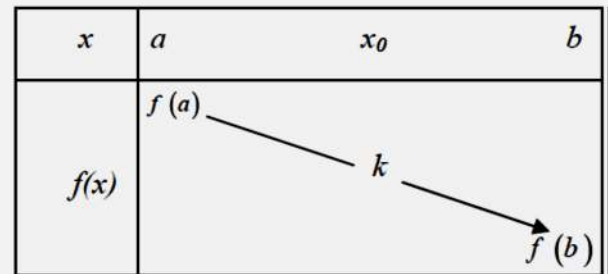
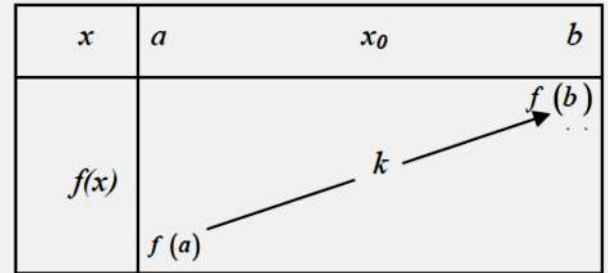
④ الدوال المستمرة والرتيبات تماماً على مجال $[a; b]$:

مبرهنة:

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماماً على مجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[a; b]$.

ملاحظات:

■ إذا كانت الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً (متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً) على مجال $[a; b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:



من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً وحيداً x_0 في المجال $[a; b]$.

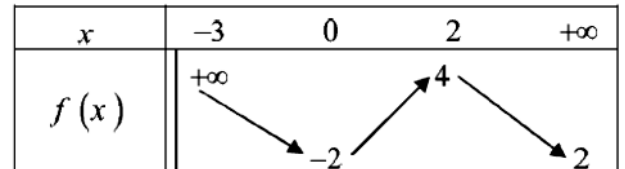
■ تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة ورتيبة تماماً على مجال I مفتوح أو مغلق من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

تذكير:

الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية ورتابة الدالة على المجال المعبر.

مثال: (● حل التمرين 01 ص 58)

لتكن f دالة مستمرة على المجال $[-3; +\infty[$ ، و جدول تغيراتها كالاتي:



تبيان أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يُطلب إعطاء حصراً لفاصلتيهما:

أي: نبي أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلي مختلفين في المجال $[-3; +\infty[$.

⊗ f مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[-3; 0]$ (لأنها: من جدول التغيرات متناقصة تماماً على المجال $[-3; 0]$)

ولدينا: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty \\ f(0) = -2 \end{cases}$ أي: $0 \in [-2; +\infty[$

إن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_0 في المجال $[-3; 0]$ ؛

أي: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 ، حيث $-3 < x_0 < 0$.

⊗ f مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[0; 2]$ (لأنها: من جدول التغيرات متزايدة تماماً على المجال $[0; 2]$)

ولدينا: $\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(2) = +4 \end{cases}$ أي: $f(0) \times f(2) < 0$

إن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_1 في المجال $[0; 2]$ ؛

أي: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_1 ، حيث $0 < x_1 < 2$.

⊗ لدينا: $\begin{cases} f(2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases}$ أي: $0 \notin]2; 4]$

إن: المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلول في المجال $[2; +\infty[$ ؛

أي: (C_f) لا يقطع حامل محور الفواصل في المجال $[2; +\infty[$.

الخلاصة:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين فاصلتيهما $-3 < x_0 < 0$ و $0 < x_1 < 2$.

تمارين: 56؛ 57؛ 58؛ 60؛ 61؛ 64 ص 30-31.

④ المشتقات والعمليات - مشتقة الدالة مركب:

① مشتقات دوال مألوفة:

$f(x) =$	$f'(x) =$	مجالات قابلية الاشتقاق
$k \ (k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N} \text{ و } n \geq 2)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N} \text{ و } n \geq 2)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'[u(x)] \times u'(x) \\ &= v'(2x^2 + x) \times u'(x) \\ &= 4(2x^2 + x)^3 \times (4x + 1) \end{aligned}$$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدالة $x \mapsto u(ax + b)$ ($a \neq 0$):

مبرهنة:

a و b عددين حقيقيين مع $a \neq 0$.
 u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.
 ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax + b \in I$.
 ينتمي إلى I .
 الدالة $f: x \mapsto u(ax + b)$ قابلة للاشتقاق على J ولدينا:

$$f'(x) = au'(ax + b)$$

مثال:

● لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \cos(2x - 3)$.
حساب الدالة المشتقة:

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:
 $f'(x) = -2 \sin(2x - 3)$

مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$:

مبرهنة:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ،
 وكانت موجبة تماماً على I ، فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق

$$\text{على } I \text{ ولدينا: } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

مثال: (● حل التمرين 37 ص 61)

● f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.
حساب الدالة المشتقة:

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:
 $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

مشتقة الدالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$):

مبرهنة:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ، فإن
 الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I ولدينا:

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

مثال: (● حل التمرين 34 ص 61)

● f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2 + 2x - 3)^3$.
حساب الدالة المشتقة:

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:
 $f'(x) = 3(2x + 2)(x^2 + 2x - 3)^2$

② المشتقات والعمليات على الدوال:

النتائج ملخصة في الجدول التالي:

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الشرط	الدالة المشتقة	العملية	
	$u' + v'$	$u + v$	مجموع دالتين
	ku'	ku	جداء دالة بعدد حقيقي
	$u'.v + v'u$	$u.v$	جداء دالتين
الدالة u لا تنعدم على I	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$	مقلوب دالة
الدالة v لا تنعدم على I	$\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	حاصل قسمة دالتين

نتائج:

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوي في مجموعة تعريفها.

مثال: (● حل التمرين 13 ص 59)

③ الاشتقاق والاستمرارية:

خاصية:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I ، فإنها مستمرة على هذا المجال وعكس هذه الخاصية ليس صحيح.

مثال: (● حل التمرين 02 ص 58)

الدالة $|x| \mapsto x$ مستمرة عند 0؛

بينما النسبة $\frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأن:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = -1 \text{ و } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1$$

ومن هنا الدالة $|x| \mapsto x$ غير قابلة للاشتقاق عند 0.

④ اشتقاق دالة مركبة:

أ. مشتقة الدالة $v \circ u$:

مبرهنة (تقبل دون برهان):

إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وقبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ ، فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I :

$$(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$$

مثال:

● لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (2x^2 + x)^4$.
 نلاحظ أن $f = v \circ u$ ، حيث $f = v \circ u$ ، حيث $u: x \mapsto 2x^2 + x$ و $v: x \mapsto x^4$

مبرهنة: (تقبل دون برهان)

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .
 ○ إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مُغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f .

ملاحظات:

✓ النقطة $A(x_0; f(x_0))$ تسمى نقطة حدية (الذروة) والمماس عند هذه النقطة يكون مُواز لحامل محور الفواصل معادلته هي: $y = f(x_0)$.
 ✓ إذا قبلت f قيمة حدية محلية عند x_0 فإن $f'(x) = 0$.
 (حل النمرين 28 ص 60) **مثان:**

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1$.

دراسة التغيرات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

النهايات:

الدالة المشتقة: f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:
 $f'(x) = 6x^2 + 24x$

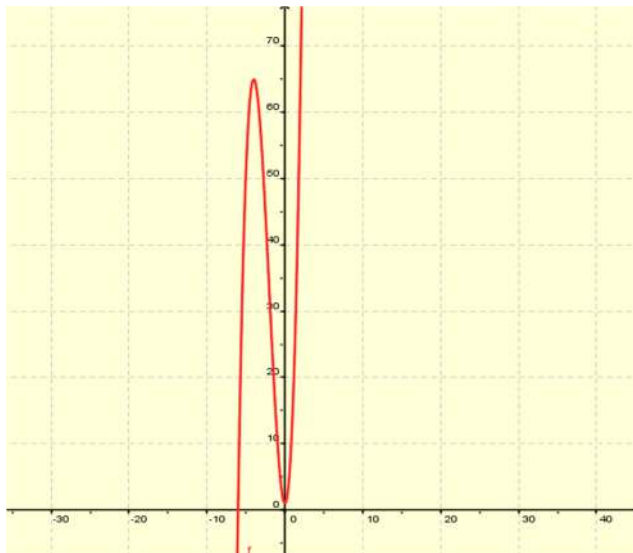
x	$+\infty$	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$

إن: f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; 4]$ و $[0; +\infty[$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $]-4; 0]$.

جدول التغيرات:

x	$+\infty$	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	65	1	$+\infty$

$f(-4) = 65$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f ،
 $f(0) = 1$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f .



مشتقة الدالة $\frac{1}{[u(x)]^n} \mapsto x \mapsto n$ عدد طبيعي يحقق

$$n \geq 1$$

مبرهنة:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I ، فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا:

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

مثان:

● لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{1}{(x^2+3)^8}$.

حساب الدالة المشتقة:

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$f'(x) = -\frac{8(2x)}{(x^2+3)^9}$$

تمارين: 40؛ 78 ص 61-66.

5 اتجاه نغيب دالة - القيس الجديدة:

1 المصفوفة واتجاه النغيب:

مبرهنة: (تقبل دون برهان)

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.
 ○ إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) > 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماماً على I .
 ○ إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) < 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماماً على I .
 ○ إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) = 0$ ، فإن الدالة f ثابتة على I .

مثان:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = 3x^2$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}^+$ ، $f'(x) > 0$ و $f'(0) = 0$.
 إذن: f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

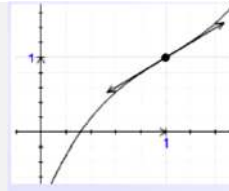
2 القيم الحدية المحلية:

تعريف:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .
 ○ القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \leq f(x_0)$.
 ○ القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \geq f(x_0)$.
 ○ القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

③ نقطة انعطاف منحنى:

تعريف:



نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يحتق فيها المماس المنحنى البياني .

مبرهنة:

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0 .
○ إذا انعدمت الدالة المشتقة الثانية f'' عند x_0 مُغيرة إشارتها فإن النقطة التي إحداثياتها $(x_0; f(x_0))$ تسمى نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

ملاحظة:

فإذا انعدمت f' عند x_0 ولا تغير من إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة التي إحداثياتها $(x_0; f(x_0))$ تسمى : نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f .
مثلا : الدالة $x^3 \rightarrow x$ مشتقتها الأولى تنعدم ولا تغير إشارتها بجوار $x_0 = 0$.

تجارب: 67؛ 70 ص 64-65.

⑥ التقريب التآلفي - طريقة أول:

① التقريب التآلفي:

خاصية:

f دالة معرفة على مجال مفتوح I .
إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I ، فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ مع } f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$$

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ:

$$f(x+h) \simeq f(x) + hf'(x)$$

يسمى $f(x) + hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f .

② طريقه أول:

الهدف:

إنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f .

المعطيات:

f' معرفة و $y_0 = f(x_0)$ من أجل h قريب من 0 لدينا:

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$$

✗ انطلاقا من $A_0(x_0; y_0)$ بحيث $f'(x_0) \neq 0$ ننشئ $A_1(x_1; y_1)$ ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ والتي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ والمار من A_0 وبالتالي: $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$.

$$\text{وبما أن: } f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$$

من أجل hf قريب من 0 فإن A_1 قريبة من (C_f) .

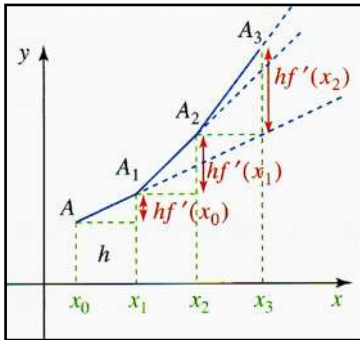
✗ بنفس الطريقة ننشئ $A_2(x_2; y_2)$ انطلاقا من A_1 .

✗ وهكذا على التوالي يمكن إنشاء النقط $A_n(x_n; y_n)$

حيث $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$

مع $n \geq 1$.

ربط النقط $A_0, A_1, A_2, \dots$ نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة. ونحصل على أكثر دقة كلما كان h أقرب إلى 0.



صن 01: (حل النمرين 41 ص 61)

تبرير التقريب التآلفي عند 0:

(1) لدينا: $f(x) = (1+x)^3$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

$$\text{ومنه: } (1+h)^3 \simeq (1+0)^3 + h(3(1+0)^2)$$

$$\text{إذن: } (1+h)^3 \simeq 1 + 3h$$

(2) لدينا: $f(x) = \sqrt{1+x}$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

$$\text{ومنه: } \sqrt{1+h} \simeq \sqrt{1+0} + h\left(\frac{1}{2\sqrt{1+0}}\right)$$

$$\text{إذن: } \sqrt{1+h} \simeq 1 + \frac{h}{2}$$

(3) لدينا: $f(x) = \frac{1}{1+x}$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

$$\text{ومنه: } \frac{1}{1+h} \simeq \frac{1}{1+0} + h\left(-\frac{1}{(1+0)^2}\right)$$

$$\text{إذن: } \frac{1}{1+h} \simeq 1 - h$$

(4) لدينا: $f(x) = \sin x$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

$$\text{ومنه: } \sin x \simeq \sin 0 + h(\cos 0)$$

$$\text{إذن: } \sin x \simeq h$$

صن 02: (مرين مقترح من طرف الأساذ)

لتكن f دالة تحقق $f(1) = 0$ ومن أجل كل x من

$$f'(x) = \frac{1}{x},]0; +\infty[$$

• باستعمال طريقة أولر وباختيار خطوة $h = 0,01$

شغل جدولا يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي

إلى $[0; 5]$ ، ثم أنشئ تمثيلا تقريبا للدالة f .