

مجلة المفيد فى الرياضيات

للأستاذ بلجودى حمـو

بكالوريا 2022 شعب علمية

1. النهايات و السلوك التقاربى

👉 تتضمن ما يلى :

- ❖ سلسلة 1- ملخص درس و تمرين لكل عنصر .
- ❖ سلسلة 2- تمارين .
- ❖ واجب النهايات .
- ❖ تمارين محلولة في نهايات دالة كثير حدود .
- ❖ تمارين محلولة في نهايات دالة ناطقة .
- ❖ تمارين محلولة في النهايات بوسيط .
- ❖ تمارين محلولة في ازالة حالات عدم التعيين .
- 👉 المرافق
- 👉 التحليل
- 👉 العدد المشتق
- 👉 الاختزال
- 👉 تبديل المتغير
- ❖ تمرين محلول في السلوك التقاربى (المستقيم المقارب المائل).



❖ بعض نهايات الدوال المرجعية:

$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$	$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$	$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$	$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$	$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$	$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$	$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

❖ العمليات على النهايات: حالات التعيين و عدم التعيين :

l عدد حقيقي ، $(l+)$ عدد حقيقي موجب تماما و $(l-)$ عدد حقيقي سالب تماما:

حالات عدم التعيين	حالات التعيين			
$\frac{0}{0}$	$(l-)\times -\infty = +\infty$	$(l-)\times +\infty = -\infty$	$(l+)\times -\infty = -\infty$	$(l+)\times +\infty = +\infty$
$\frac{\infty}{\infty}$	$(-\infty)\times -\infty = +\infty$	$(+\infty)\times -\infty = -\infty$	$(-\infty)\times +\infty = -\infty$	$(+\infty)\times +\infty = +\infty$
$+\infty - \infty$	$-\infty - \infty = -\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$	$l - \infty = -\infty$	$l + \infty = +\infty$
$0 \times \infty$	$\frac{+\infty}{l-} = -\infty, \frac{+\infty}{l+} = +\infty$	$\frac{-\infty}{l-} = +\infty, \frac{-\infty}{l+} = -\infty$	$\frac{l}{0} = \infty$	$\frac{l}{\infty} = 0$

❖ حساب نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود نحسب نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ و $-\infty$.

تمرين-1: احسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x) = -x^3 - 4x + 2 \bullet 3$	$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 5 \bullet 2$	$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 5 \bullet 1$
----------------------------------	---------------------------------------	--

❖ نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و عند $-\infty$: و عند عدد حقيقي a :

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة نحسب نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ و $-\infty$.

لحساب نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي a نعوض قيمة a مباشرة في عبارة الدالة .

تمرين-2: احسب النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}, \mathbb{R} - \{-1;1\} \bullet 4$	$f(x) = \frac{x^2+1}{(x-2)^2}, \mathbb{R} - \{2\} \bullet 3$	$f(x) = \frac{x+1}{1-x}, \mathbb{R} - \{1\} \bullet 2$	$f(x) = \frac{2x^2+2x-1}{x-1}, \mathbb{R} - \{1\} \bullet 1$
---	--	--	--

❖ حساب نهاية دالة مركبة:

a, b, c و u, v, f دوال حيث $f = v \circ u$ لحساب نهاية f عند a :
 $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} v(x) = c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ نستنتج أن :

تمرين-3: احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x + 3}{x - 1}\right) \bullet 3$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 2} \bullet 2$	$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{3x + 1}{x - 1}} \bullet 1$
---	---	--

❖ حساب النهايات بالمقارنة :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$ و كان $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

تمرين-4:

f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$

1- برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{x}$ ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

❖ طرق إزالة حالة عدم التعيين : احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

❖ بالاختزال:	❖ باستعمال التحليل:	❖ باستعمال المرافق:	❖ العدد المشتق:
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \bullet 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - \sqrt{x} \bullet 1$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \bullet 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \bullet 1$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \bullet 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - 2x \bullet 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x \bullet 2$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \bullet 4$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \bullet 3$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{3x + 2} \bullet 3$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \bullet 3$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \bullet 2$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + \sqrt{x}}{x^2 + 2x - 3} \bullet 4$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} + 2 - 2} \bullet 4$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \bullet 3$

المستقيمات المقاربة :

❖ المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (الأفقي):

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = a$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = a$ فإن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = a$.

تمرين -1:-

f الدالة المعرفة على المجموعة R بـ $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{2x^2 + 1}$ و (C_f) تمثيل بيانها في المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

❖ احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم فسر كل نتيجة هندسيا .

❖ المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (العمودي):

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = a$.

تمرين -2:-

f الدالة المعرفة على المجموعة $D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيل بيانها .

❖ احسب نهاية الدالة f عند الأطراف المفتوحة لـ D (لا تحسب عند $+\infty$ و $-\infty$) ثم فسر كل نتيجة هندسيا .

❖ المستقيم المقارب المائل:

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ فإن منحنى دالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = ax + b$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

❖ دراسة الوضع النسبي لمنحنى الدالة بالنسبة لمستقيم المقارب المائل:

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) منحنى الدالة f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y = ax + b$ ندرس إشارة : $[f(x) - (ax + b)]$ ، إذا كان :

$[f(x) - y] < 0$ فإن (C_f) تحت (Δ) .	$[f(x) - y] > 0$ فإن (C_f) فوق (Δ) .	$[f(x) - y] = 0$ فإن (C_f) يقطع (Δ) .
---	---	--

تمرين -3:-

1 • f الدالة المعرفة على المجموعة $R - \{-1; 1\}$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$ ، (C_f) تمثيل بيانها .

بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

❖ المنحنيان المتقاربان:

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ فإن منحنى الدالة f و منحنى الدالة g متقاربان بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

تمرين -4:-

1 • f الدالة المعرفة على المجموعة $R - \{-1; 1\}$ كما يلي : $f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x - 1}$ ، (C_f) تمثيل بيانها .

بين أن (C_f) و منحنى الدالة $x \mapsto x^2 + 1$ متقاربان بجوار $+\infty$ و $-\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي لهما .

الأستاذ : بلجودي حمو



التمرين 1 :

أحسب نهاية الدالة f	عند
$f(x) = x-1 + \frac{4}{x-2}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 2
أحسب نهاية الدالة f	عند
$f(x) = x^2 - 1 $	$-\infty$ و $+\infty$

التمرين 2 :

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$.

2. f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$.
 $\Leftrightarrow$ عين نهاية f عند $+\infty$.

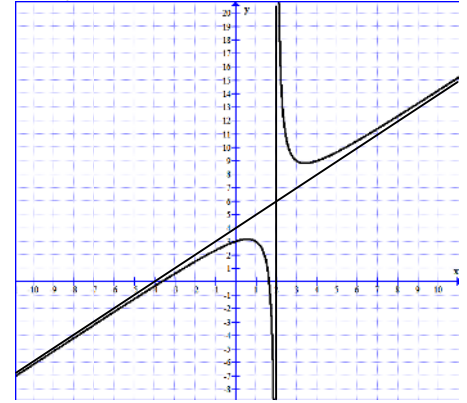
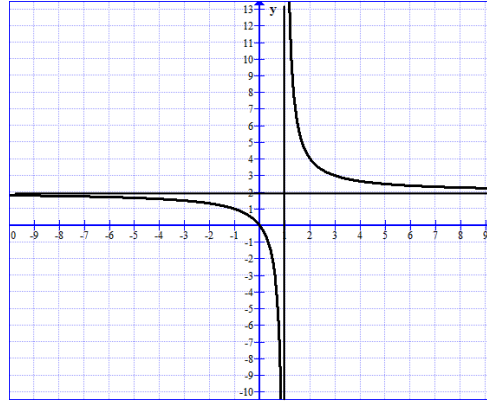
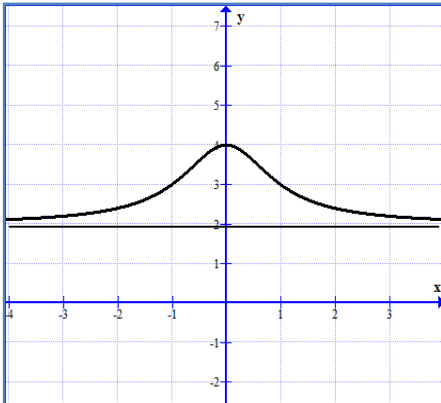
التمرين 3 :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{x}{x^2 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x + \sqrt{x}}{x^2 + 1 - \sqrt{x}}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x + 1 - \sqrt{x}}$
$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2022} - 1}{x^{1011} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{4x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{x} - 1} - \sqrt{3\sqrt{x} + 2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x + 1$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + 3x$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 3x + 1$

التمرين 4 :

المنحني C_f هو التمثيل البياني الممثل لدالة f

عين مجموعة تعريف الدالة f ثم خمن النهايات في أطراف المجموعة D واستنتج معادلات كل المستقيمات المقاربة .



التمرين 5 :

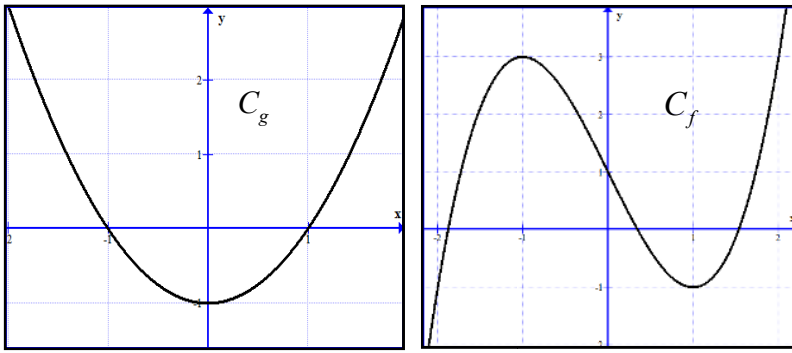
1. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = a + \frac{2x^2 - 2}{3x^2 + 1}$ حيث a عدد حقيقي. $\Leftrightarrow$ أوجد قيمة a علما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

2. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{(a^2 + 1)x^2 - 2}{ax^2 + 1}$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم. $\Leftrightarrow$ أوجد قيمة a علما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

3. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ: $f(x) = \frac{ax - 2}{2x - b}$ حيث a و b عدنان حقيقيان. $\Leftrightarrow$ أوجد قيمة كل من a و b علما أن
 منحني الدالة يقبل مستقيما مقاربا افقيا معادلته $y = 1$.

التمرين 6:

المنحني C_f هو التمثيل البياني للممثل لدالة f و المنحني C_g هو التمثيل البياني للممثل لدالة g



عين بيانيا $f(1)$ و $f(-1)$.

عين بيانيا إشارة $g(x)$.

2. لتكن الدالة h المعرفة على D بـ : $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

عين D مجموعة تعريف الدالة h .

عين النهايات عند الأطراف المفتوحة لـ D . (لا

يطلب حسابها عند $+\infty$ و $-\infty$)

التمرين 7:

f الدالة المعرفة على المجموعة $R - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$ (C_f) تمثيل بيانيها .

عين الثوابت الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $R - \{3\}$ فإن : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$.

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يطلب تعيين معادلته له ، ثم ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D)

التمرين 8:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x - 1)^2}$ (C_f) تمثيلها البياني .

عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$: $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x - 1)^2}$

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f و المستقيم (d) الذي معادلته $y = x - 2$ ؟ برر . حدد وضعية C_f بالنسبة لـ (d) .

التمرين 9:

4 • f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$ (C_f) تمثيل بيانيها .

احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

التمرين 10:

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$ (C_f) تمثيل بيانيها .

بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$. استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يطلب تعيين معادلته له .

التمرين 11:

f و g الدالتين المعرفتين على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 - 3x - 1$ و $g(x) = x^2 - 3x - 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$

(C_f) و (C_g) تمثيل بيانيهما في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا ، حدد الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0
$f(x)$	1	2	$-\infty$	3	$-\infty$

التمرين 12:

اليك جدول تغيرات الدالة f :

حدد المستقيمات المقاربة الافقية والعمودية لمنحني الدالة f .

واجب في النهايات

التمرين الأول :

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x مجموعة تعريفها D_f .

احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجال التعريف في كل حالة من الحالات التالية :

$D_f = R - \{-1; 1\}$	$f(x) = \frac{2x-3}{x^2-1}$	$D_f = R$	$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 5$
$D_f = R - \{1\}$	$f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2}$	$D_f = R$	$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 5$
$D_f = R - \{1\}$	$f(x) = x + \frac{2}{x-1}$	$D_f = R$	$f(x) = -x^2 + x + 5$
$D_f = R - \{1\}$	$f(x) = x + \frac{2}{x-1}$	$D_f = R - \{2\}$	$f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$
		$D_f = R - \{-1\}$	$f(x) = \frac{2x}{x+1}$

التمرين الثاني :

1. عين النهايات المطلوبة بكل الطرق الممكنة :

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-2x+1}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+\sqrt{x}}{x^2-2x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x-\sqrt{x}}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{3x+2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2\sqrt{x^2-x+1} + x$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-2} + x$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

التمرين الثالث :

2. f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ : $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم.

اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة ثم ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

بين أن المستقيمين $\Delta: y = x+1$ و $\Delta': y = -x-1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ على المجال $]1; +\infty[$ و ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ' على المجال $]-\infty; -1]$.

التمرين الرابع : لتعمق

1. عين النهايات المطلوبة : m عدد حقيقي

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{-2-x} - \sqrt{2}}{\sqrt{-3-x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{2x^3 - 2x^2 + 3x - 3}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin x}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + (-1)^x}{x^2}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx + \sqrt{x} + 1}{x+1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - m\sqrt{x^2-1}$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x} - x^2 + x}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx + \sqrt{x} + 1}{x+1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - mx$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx-2}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3 - 2x^2 - 2)$

2. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -\frac{2}{3}x + \sqrt{|x^2-1|}$ احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

3. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + \sqrt{|x^2-1|}$ احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

4. بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $1 \leq \frac{2x}{x+1} \leq 2$ ثم استنتج النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}(x+1)}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x}}{x+1}$

الأستاذ : بلجودي حمو



تمارين محلولة - نهاية دالة كثير حدود و دالة ناطقة . بكالوريا 2022

نهاية دالة كثير حدود.

تمارين :

$3 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 2x^2 + x + 5)$	$2 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x + 2)$	$1 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 + x + 5)$
$6 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x + 2)$	$5 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x^2 + x + 5)$	$4 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 3x + 2)$
	$8 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 3x + 2)$	$7 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 2x^2 + x + 5)$

الحل :

$2 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$	$1 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$
$4 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4) = -\infty$	$3 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 2x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4) = +\infty$
$6 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$	$5 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$
$8 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4) = -\infty$	$7 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 2x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4) = +\infty$

نهاية دالة ناطقة :

تمارين :

احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \bullet 3$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x - 1} \bullet 2$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1} \bullet 1$
---	--	--

الحل :

$$1 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$2 \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x - 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \bullet 3$$

حالة عدم التعيين من الشكل 0/0 ، لإزالتها نقوم بالإختزال :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$$



التمرين:

عين تبعا لقيم العدد الحقيقي m ما يلي :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - m\sqrt{x^2 + 2} \cdot 3$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx - 2}{x - 1} \cdot 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3 - 2x^2 + x - 2) \cdot 1$
---	---	--

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3 - 2x^2 + x - 2) \cdot 1$$

❖ إذا كان $m = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3 - 2x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2) = -\infty$

❖ إذا كان $m \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3 - 2x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3)$ ونميز حالتين حسب إشارة m :

↪ إذا كان $m > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3 - 2x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3) = +\infty$

↪ إذا كان $m < 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3 - 2x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx^3) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx - 2}{x - 1} \cdot 2$$

❖ إذا كان $m = 2$: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x - 1} = \frac{0}{0}$ هي حالة عدم التعيين ، ونزيلها بالاختزال :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

❖ إذا كان $m \neq 2$: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m - 2}{0}$ ونميز حالتين :

↪ إذا كان $m > 2$ فإن $m - 2 > 0$ ومنه :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{mx - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{m - 2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{mx - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{m - 2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

↪ إذا كان $m < 2$ فإن $m - 2 < 0$ ومنه :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{mx - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{m - 2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{mx - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{m - 2}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - m\sqrt{x^2 + 2} \bullet 3$$

❖ إذا كان $m = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - m\sqrt{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$

❖ إذا كان $m < 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - m\sqrt{x^2 + 2} = +\infty + \infty = +\infty$

❖ إذا كان $m = 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - m\sqrt{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} = +\infty - \infty$ هي ح.ع.ت ، ونزيلها بالمرافق :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2})}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - 2}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2})} = 0$$

❖ إذا كان $m \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - m\sqrt{x^2 + 2}$ هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty - \infty$ ، ونزيلها بالتحليل :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - m\sqrt{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - mx\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - m\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}\right) = +\infty \times (1 - m)$$

⇐ إذا كان $m \in]0; 1[$ فإن $1 - m > 0$ و منه :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - m\sqrt{x^2 + 2} = +\infty$$

⇐ إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن $1 - m < 0$ و منه :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - m\sqrt{x^2 + 2} = -\infty$$

الأستاذ : بلجودي حمو



1. حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 3} - 2x$

هي حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$ نستعمل المرافق .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 3} - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 3} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 3} + 2x)}{(\sqrt{4x^2 - 3} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3}^2 - (2x)^2}{(\sqrt{4x^2 - 3} + 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3 - 4x^2}{(\sqrt{4x^2 - 3} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{(\sqrt{4x^2 - 3} + 2x)} = 0 \end{aligned}$$

2. حساب : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نستعمل المرافق .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ملاحظة : يمكن استعمال تعريف المشتق للدالة $x \mapsto \sqrt{x}$.

3. حساب : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نستعمل المرافق .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x-1} - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{2x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x-1}^2 - 1^2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x}^2 - 1^2)(\sqrt{2x-1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 1 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{2x-1} + 1)} = \frac{2(\sqrt{1} + 1)}{(\sqrt{2(1)-1} + 1)} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$



حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x + 2$:

حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$ لإزالتها نستعمل **التحليل**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x + 2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x + 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2 + \frac{2}{x} \right) = +\infty(1 - 2) = -\infty \end{aligned}$$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x - \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+2}}}{\sqrt{4x-1}}$:

هي **حالة عدم التعيين** من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x - \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+2}}}{\sqrt{4x-1}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x - \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \sqrt{3 + \frac{2}{x}}}}{\sqrt{4x-1}} &= \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x - \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \sqrt{3 + \frac{2}{x}}}}{\sqrt{4x-1}} &= \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{16 - \frac{\sqrt{x}}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \sqrt{3 + \frac{2}{x}}}}{\sqrt{x} \sqrt{4 - \frac{1}{x}}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16 - \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{3 + \frac{2}{x}}}}{\sqrt{4 - \frac{1}{x}}} &= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$



بكالوريا 2022

تمارين محلولة - المستقيم المقارب المائل.

1 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ تمثيلها البياني .

عبر عن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

عبر عن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$

بين أن C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) معادلته $y = x - 2$. حدد وضعية C_f بالنسبة لـ (d) .

حل التمرين:

عبر عن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

عبر عن الأعداد الحقيقية a ، b و c : من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2} &= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + cx + d}{(x-1)^2} = \frac{(ax+b)(x^2 - 2x + 1) + cx + d}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + cx + d}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 + (-2a+b)x^2 + (a-2b+c)x + b+d}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} : \mathbb{R} - \{1\} \text{ من أجل كل عدد حقيقي } x \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \\ d=-2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-4 \\ a-2b+c=8 \\ b+d=-4 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد :}$$

بين أن C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) معادلته $y = x - 2$.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-2)) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} - (x-2) \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{(x-1)^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

إذن C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) معادلته $y = x - 2$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

حدد وضعية C_f بالنسبة لـ (d) : ندرس إشارة $\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ وإشارته من إشارة $3x-2$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$(f(x) - (x-2))$	-	0	+	+
الوضع النسبي	C_f تحت (d)	C_f يقطع (d) في $(\frac{2}{3}, \frac{-4}{3})$	C_f فوق (d)	C_f فوق (d)



تمرين : أحسب : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2022} - 1}{x^{1011} - 1}$

الحل :

هي حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

1. إزالة حالة عدم التعيين بالاختزال :

التحليل بالمتطابقات الشهيرة :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2022} - 1}{x^{1011} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{1011})^2 - 1}{x^{1011} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{1011} - 1)(x^{1011} + 1)}{x^{1011} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{1011} + 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

التحليل بالقسمة الاقليدية :

$x^{2022} - 1$	$x^{1011} - 1$
$-x^{2022} + x^{1011}$	$x^{1011} + 1$
$x^{1011} - 1$	
$-x^{1011} + 1$	
0	

2. إزالة حالة عدم التعيين بتبديل المتغير :

نضع $x^{1011} = X$ و منه $x^{2022} = X^2$ و عندما $x \rightarrow 1$ فإن $X \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2022} - 1}{x^{1011} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(X^2 - 1)}{(X - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(X - 1)(X + 1)}{X - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (X + 1) = 1 + 1 = 2$$

3. إزالة حالة عدم التعيين بالعدد المشتق :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2022} - 1}{x^{1011} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^{2022} - 1}{x - 1}}{\frac{x^{1011} - 1}{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}} = \frac{f'(1)}{g'(1)}$$

مع $f(x) = x^{2022}$ و منه $f'(x) = 2022 x^{2021}$ و منه $f'(1) = 2022$
و $g(x) = x^{1011}$ و منه $g'(x) = 1011 x^{1010}$ و منه $g'(1) = 1011$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2022} - 1}{x^{1011} - 1} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{2022}{1011} = 2 \quad \text{إن :}$$

حساب $\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0}$ هي حالة عدم التعيين .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x} - 1} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

أولا : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$

ثانيا : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \times \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1 \times \sqrt{x} - 1 \times (\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \times \sqrt{x} - 1}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = 0$

نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x} - 1} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) = \sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$

حساب $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sqrt{1 - \cos x}}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}}}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{(1 + \cos x)}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{1 \times \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$$

أتمنى لكم التوفيق و النجاح في بكالوريا 2022

دعواتكم