

تمارين القسمة و اللوافقات في $\mathbb{Z}$

التمرين 01 :

1. أثبت أن العدد 251 أولي.
2. حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية و استنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008.
3. عين الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^3 + 35d^3 = 2008$ ، علما أن : $m = PPCM(a, b)$; $d = PGCD(a, b)$.

التمرين 02 :

1. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
2. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلا للقسمة على 7.

التمرين 03 :

1. عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 11.
2. عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث : $(6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7)$ يقبل القسمة على 11.

التمرين 04 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3)$ يقبل القسمة على 7.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n)$ قابلا للقسمة على 7.

التمرين 05 :

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث :

$$(1) \begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a, b) = 84 \end{cases} ; (2) \begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases} ; (3) \begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases} ; (4) \begin{cases} PPCM(a, b) = 90 \\ PGCD(a, b) = 18 \end{cases}$$

$$(5) a \leq b \text{ مع } PPCM(a, b) - 9PGCD(a, b) = 13$$

التمرين 06 :

a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = n^2 + 2$; $a = 5n^2 + 7$

1. بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 3
2. بين أن $PGCD(a, b) = 3$ إذا و فقط إذا $n^2 \equiv 1[3]$
3. استنتج حسب قيم n ، $PGCD(a, b)$.

التمرين 07 :

a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = 5n - 2$; $a = 2n + 3$

1. بين أنه إذا كان العددين a و b غير أوليين فيما بينهما فإن : $PGCD(a, b) = 19$
2. عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a, b) = 19$.

التمرين 08 :

- a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = 2n^2 + n ; a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$
1. بين أن العدد $(2n + 1)$ قاسم مشترك للعددين a و b
 2. باستعمال مبرهنة بيزو بين أن $PGCD(n, n + 1) = 1$ و $PGCD[n, (n + 1)^2] = 1$
 3. استنتج $PGCD(a, b)$.

التمرين 09 :

- n عدد طبيعي. نضع : $A = n^4 + n^2 + 1$
1. حلل A إلى جداء عاملين من الدرجة الثانية (لاحظ أن : $A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2$)
 2. نضع : $b = n^2 - n + 1 ; a = n^2 + n + 1$
 - أ. بين أن العددين a و b فردين
 - ب. بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم $2n$ و $2(n^2 + 1)$
 - ج. بين أن العددين n و $n^2 + 1$ أوليان فيما بينهما
 - د. استنتج أن العددين a و b أوليان فيما بينهما

التمرين 10 :

- a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = 13n - 1 ; a = 11n + 3$
1. بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50
 2. باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة : $50x - 11y = 1$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $50x - 11y = 3$
 3. استنتج قيم n التي يكون من أجلها : $PGCD(a, b) = 50$.
 4. ما هي قيم n التي يكون من أجلها : $PGCD(a, b) = 25$ ؟

التمرين 11 :

- نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $324x - 245y = 7 \dots (E)$
1. باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}$ هذه المعادلة
 2. بين أنه إذا كانت الثنائيات (x, y) حلا للمعادلة (E) ، فإن : $x \equiv 0[7]$
 3. نضع : $PGCD(x, y) = d$
 - أ. بين أن القيم الممكنة للعدد d هي 1 و 7
 - ب. عين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث $PGCD(x, y) = 7$

التمرين 12 :

1. عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994.
2. نعتبر المعادلة : (1) $2994x - 1497y = 1996$ حيث : x و y عدنان صحيحان.
 - أ. أثبت أن x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ، ثم حل المعادلة (1).
 - ب. عين الحلول (x, y) بحيث يكون : $xy = 1950$.

التمرين 13 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (I) $4x - 9y = 19$
2. ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x, y) حل للمعادلة (I)
 - أ. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
 - ب. عين حلول المعادلة بحيث يكون $d = 19$
3. عين الثنائيات (a, b) الصحيحة حلول المعادلة : $4a^2 - 9b^2 = 19$

التمرين 14 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x - 3y = 2$
2. A عدد طبيعي يُكتب 55 في النظام ذي الأساس x و يُكتب 37 في النظام ذي الأساس y حيث $x \leq 12$; $y \leq 20$ عيّن القيم الممكنة للعددين x و y ، ثم اكتب A في النظام العشري.

التمرين 15 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (I) $8x - 5y = 3$...
2. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية (p, q) من الأعداد الصحيحة تحقق : $m = 8p + 1$ و $m = 5q + 4$
 - أ- بيّن أنّ الثنائية (p, q) هي حل للمعادلة (I) ، ثم استنتج أنّ : $m \equiv 9[40]$
 - ب- عيّن أصغر عدد طبيعي m أكبر 2000
3. ليكن n عددا طبيعيا
 - أ- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $2^{3k} \equiv 1[7]$
 - ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟
4. ليكن a و b عدنان طبيعيين حيث : $0 < a \leq 9$ و $b \leq 9$ ، و نعتبر العدد N الذي يكتب في النظام العشري على الشكل : $N = \overline{a00b} = a \times 10^3 + b$. نريد تعيين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية N تلك التي تقبل القسمة على 7
 - أ- تحقق من أنّ : $10^3 \equiv -1[7]$
 - ب- استنتج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7

التمرين 16 :

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل :

1. في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$
 - (أ) لا تقبل حولا
 - (ب) حلولها زوجية
 - (ج) حلولها تحقق $x \equiv 2[5]$
 - (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$
2. حلول المعادلة $24x + 34y = 2$ هي :
 - (أ) $(17k - 7; 5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 - (ب) $(-7k; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 - (ج) $(34k - 7; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 - (د) المجموعة الخالية
3. N عدد طبيعي يُكتب في النظام ذي الأساس 5 : $\overline{421}$. كتابته في النظام ذي الأساس 6 هي :
 - (أ) $\overline{421}$
 - (ب) $\overline{111}$
 - (ج) $\overline{303}$
 - (د) $\overline{222}$
4. باقي القسمة الإقليدية للعدد 1432^{2011} على العدد 3 هو :
 - (أ) 0
 - (ب) 1
 - (ج) 2
 - (د) 3
5. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a = n(n + 2)$; $b = n + 1$. بما أنّ : $b^2 - a = 1$ فإنّ $PGCD(a, b)$ هو :
 - (أ) n
 - (ب) n + 1
 - (ج) 1
 - (د) 2

التمرين 17 :

- a , b عدنان طبيعيين و p عدد طبيعي أولي حيث : $PGCD(a + b ; ab) = p^2$
1. بيّن أنّ p^2 يقسم a^2 ، ثم استنتج أنّ p يقسم a
 - بطريقة مماثلة بيّن أنّ p يقسم b
 - أثبت أنّ : $PGCD(a ; b) = p^2$ أو $PGCD(a ; b) = p$
 2. نعتبر في $\mathbb{N}^2$ الجملة : $PGCD(a + b ; ab) = 49$ (E)
 - بيّن أنّ : $PGCD(a ; b) = 7$
 - عيّن كل الثنائيات (a , b) في $\mathbb{N}^2$ و التي تحقق (E).

التمرين 18 :

n عدد طبيعي ، نعتبر الأعداد : $a_n = 4 \times 10^n - 1$ ، $b_n = 2 \times 10^n - 1$ ، $c_n = 2 \times 10^n + 10$.
1. أحسب b_3 ، c_3 .

- بين أن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 ، و أن b_3 عدد أولي
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $a_{2n} = b_n \times (c_n - 9)$
- استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 11)$
- استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما

2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) $b_3x + c_3y = 1 \dots$

- بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$
- تحقق أن $(727, -731)$ حل للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة.

التمرين 19 :

ليكن n عددا طبيعيا

1. برهن أن العددين $n^2 + 5n + 4$ و $n^2 + 3n + 2$ يقبلان القسمة على $(n + 1)$
2. عيّن قيم n حتى يقبل العدد $3^2 + 15n + 19$ القسمة على $(n + 1)$
3. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : العدد $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على $n^2 + 3n + 2$.

التمرين 20 :

1. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584

2. عيّن العددين الطبيعيين a و b حيث $b > a$ اللذين يحققان : $\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$

التمرين 21 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 3^n على 10
2. استنتج باقي القسمة الإقليمية على 10 للعدد $7^{1422} - 9^{2001} \times 63$
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $[10] 3^{2n+1} \times (n - 1) \equiv 3n \times 9^n + 7^{2n+1}$
4. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $[10] 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0$

التمرين 22 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 4^n على 11
2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد الطبيعي k حيث : $k = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3}$ يقبل القسمة على 11
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\begin{cases} 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0 [11] \\ 8 \leq n \leq 50 \end{cases}$

التمرين 23 :

1. عيّن $PGCD(2688 ; 3024)$
2. أ. تحقق أن المعادلتين (1) $2688x + 3024y = -3360$ و (2) $8x + 9y = -10$ متكافئتان
ب. تحقق أن (1 ; -2) حل خاص للمعادلة (2)
3. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستويين (P) و (P') اللذين معادلتهما على الترتيب $(P): x + 2y - z = -2$ و $(P'): 3x - y + 5z = 0$
أ. بين أن المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d)
ب. بين أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2) ، ثم استنتج (E) مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

التمرين 24 :

- لتكن a, b, x, y أربعة أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $x = 2a + 3b$ و $y = 3a + 4b$
1. بيّن أنّ $PGCD(a; b) = PGCD(x; y)$ ، ثمّ استنتج أنه إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإنّ x و y أوليان فيما بينهما
 2. عيّّن الثنائيات $(\alpha; \beta)$ من الأعداد الطبيعية بحيث : $PGCD(\alpha; \beta) = 5$ و $(2\alpha + 3\beta)(3\alpha + 4\beta) = 2200$.

التمرين 25 :

- a و b عدنان طبيعيان يُكتبان على الترتيب 2310 ، 252 في نظام تعداد ذي الأساس n ، و ليكن $d = PGCD(a, b)$
1. برهن أنّ $(2n + 1)$ يقسم كلا من a و b و أنّ $d = 2n + 1$ أو $d = 2(2n + 1)$
 2. نأخذ $n = 6$. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $ax + by = -26$

التمرين 26 :

1. أ. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^{10} على 11؟ علل.
ب. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^4 على 5؟ علل.
ج. استنتج أنّ $1[11] \equiv 6^{40}$ و أنّ $1[5] \equiv 6^{40}$
د. بيّن أنّ $1 - 6^{40}$ يقبل القسمة على 55
2. x و y عدنان صحيحان
أ. بيّن أنّ المعادلة التالية ليس لها حلول : $(E) \dots 65x - 40y = 1$
ب. بيّن أنّ المعادلة التالية تقبل على الأقل حلا : $(E') \dots 17x - 40y = 1$
ج. عيّّن باستعمال خوارزمية إقليدس حلا خاصا للمعادلة (E')
د. حل المعادلة (E') و استنتج وجود عدد طبيعي وحيد x_0 أصغر من 40 حيث : $17x_0 \equiv 1[40]$
3. من أجل كل عدد طبيعي a ، بيّن أنّه إذا كان : $a^{17} \equiv b[55]$ و $a^{40} \equiv 1[55]$ فإنّ : $b^{33} \equiv 1[55]$.

التمرين 27 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليمية للعدد 3^n على 11
2. ما هو باقي قسمة $8 - 7 \times 58^{20n+13} + 4 \times 69^{10n+6}$ على 11 ؟
3. أوجد قيم n الطبيعية بحيث يكون $5 + 14^{5n+3} + 36^{5n} \times n + n^2$ قابلا للقسمة على 11
4. أوجد الأعداد الصحيحة β التي تحقق من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $80^{3n+2} \times \beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11]$ ، ثمّ استنتج قيم β الصحيحة بحيث : $|\beta| \leq 20$
5. أوجد الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ بحيث : $14^x + 25^y \equiv 8[11]$.

التمرين 28 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \dots 3x - 2y = 1$
2. ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم
أ. بيّن أنّ الثنائية $(4, 21n + 4)$ هي حل للمعادلة (E)
ب. استنتج أنّ العددين $4 + 21n$ و $3 + 14n$ أوليان فيما بينهما
3. ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين : $21n + 4$ و $2n + 1$
أ. بيّن أنّ $d = 1$ أو $d = 13$
ب. بيّن أنّه إذا كان $d = 13$ فإنّ $n \equiv 6[13]$
4. من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ نضع : $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$
أ. بيّن أنّ العددين A و B يقبلان القسمة على $(n - 1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$
ب. جد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين 29 :

1. نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة : (1) $11n - 24m = 1$...
 أ. برر أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا
 ب. عيّن مجموعة حلول المعادلة (1) علما أنّ الثنائية (5, 11) حل لها
 2. أ. بيّن أنّ 9 يقسم $10^{11} - 1$ و $10^{24} - 1$
 ب. بيّن أنّه مهما يكن الحل (n, m) فإنّ : $9 = (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1)$
 ج. بيّن أنّ : $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11n} - 1$ و أنّ : $10^{24} - 1$ يقسم $10^{24m} - 1$
 استنتج وجود عددين صحيحين N و M بحيث : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$
 د. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين $10^{24} - 1$ و $10^{11} - 1$ يقسم 9
 هـ. استنتج مما سبق $PGCD(10^{11} - 1; 10^{24} - 1)$.

التمرين 30 :

- x و y عدنان طبيعيان حيث $0 < x \leq y$ ، نضع $PGCD(x, y) = d$ و $PPCM(x, y) = m$
 نريد تعيين x و y حيث (*) $m^2 - 5d^2 = 2000$...
 1. برهن أنّه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (*) فإنّ d^2 يكون قاسما للعدد 2000
 2. حلل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية ، ثم استنتج القواسم المربعة التامة للعدد 2000
 3. برهن أنّ 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
 4. استنتج القيم الممكنة للعددين x و y.

التمرين 31 :

- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (1) $16x + 59y = 2006$...
 1. حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 2006 ، ثم استنتج أنّه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 59
 2. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
 3. عيّن الحلول (x, y) للمعادلة (1) التي تنتمي $\mathbb{N}^{*2}$
 4. عيّن الأعداد الطبيعية غير المدومة a و b التي تحقق $16m + 59d = 2006$ حيث $PGCD(x, y) = d$ و $PPCM(x, y) = m$

التمرين 32 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليمية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7
 2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7
 3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$
 أ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 ب. ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على 7.

التمرين 33 :

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (1) $91x + 10y = 1$...
 أ. عيّن حلا خاصا للمعادلة (1) ، ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (2) $91x + 10y = 412$...
 ب. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (2)
 2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد الطبيعي $n = 3^{2n} - 1$ قابلا للقسمة على 8
 3. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (3) $A_3x + A_2y = 3296$...
 أ. عيّن في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (3) ، ثم بيّن أنّ المعادلة (3) تقبل حلا وحيدا (α, β) من $\mathbb{N}^2$ يُطلب تعيينه
 ب. جد قيمة العدد الطبيعي $10 + A_2(\alpha)$.

التمرين 34 :

- 1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11
- 2- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $(2011)^{5n+1} + (1993)^{10n} + (1431)^n$ يقبل القسمة على 11
- 3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث :

$$\left. \begin{array}{l} (2011)^{5n+1} + 5n + (1431)^n \text{ يقبل القسمة على } 11 \\ 90 < n < 100 \end{array} \right\}$$

التمرين 36 :

a و b عدنان طبيعيان حيث :

$$\begin{cases} a = 5n + 3 \\ b = 2n + 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1. أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما
2. نضع : $x = 5m + 3$ ، $y = 2m - 1$ ، $m \in \mathbb{N}$
أ- عين علاقة بين x و y مستقلة عن العدد الطبيعي m
ب- نفرض أن $PGCD(x, y) = d$
• عين القيم الممكنة لـ d
• عين الثنائيات (x, y) حيث $d = 11$.

التمرين 37 :

- 1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 4^{2n} على 5
- 2- عيّن باقي قسمة 3^n على 5
- 3- ما هو باقي قسمة 1428^{2009} على 5 ؟
- 4- ليكن العدد الطبيعي A_n حيث : $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$
• عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث A_n يقبل القسمة على 5.

التمرين 38 :

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $23x - 17y = 6$
2. استنتج الأعداد الطبيعية A الأصغر من 1000 حيث باقي قسمة A على 23 هو 2 و باقي قسمة A على 17 هو 8
3. أكتب الأعداد A المحصّل عليها في النظام ذي الساس 7.

التمرين 39 :

- 1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10
• استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، يقبل العدد $7^{4k+3} + 7^{4k+2} + 7^{4k+1} + 7^{4k}$ القسمة على 10
- 2- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$
• أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4} \equiv S_n [10]$
• أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10.

التمرين 40 :

أرقام نظام التعداد ذو الأساس 12 هي : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta$

- 1- ليكن N_1 العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل $\overline{\beta 1 \alpha}^{12}$. أكتب N_1 في النظام العشري
- 2- ليكن N_2 العدد المكتوب في النظام العشري على الشكل 1131. أكتب N_2 في النظام ذي الأساس 12
- 3- ليكن N العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل $\overline{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0}^{12}$
- أ. بيّن أن $N \equiv a_0[3]$ ، ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12
- تأكد من ذلك باستعمال كتابة N_2 في النظام ذي الأساس 12
- ب. بيّن أن $N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0[11]$ ، ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12
- تأكد من ذلك باستعمال كتابة N_1 في النظام ذي الأساس 12
- 4- نُذكر أنّه إذا كان a و b أوليان فيما بينهما و كان N يقبل القسمة على a و b فإن N يقبل القسمة على الجداء ab
- نعتبر $N = \overline{x4y}^{12}$. عيّن قيم x و y التي من أجلها يكون N قابلا للقسمة على 33.

التمرين 41 :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x + 5y = 1 \dots (E)$

1. جد حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة
2. ليكن N عددا طبيعيا حيث يوجد عدنان طبيعيان a و b يحققان : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$
- أ. بيّن أن الثنائية $(a, -b)$ حل للمعادلة (E)
- ب. جد باقي القسمة الإقليدية للعدد N على 4
3. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x + 5y = 100$
4. للاشتراك في رحلة ، دفع مجموعة أشخاص من الجنسين 100 قطعة نقدية ، حيث دفع كل ذكر 8 قطع نقدية و دفعت كل أنثى 5 قطع نقدية.
- ما هو عدد الذكور و عدد الإناث في هذه المجموعة ؟

التمرين 42 :

1. n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.
1. بيّن أن العددين n و $2n + 1$ أوليان فيما بينهما
2. نضع : $\alpha = n + 3$ ، $\beta = 2n + 1$ و $PGCD(\alpha, \beta) = d$
- أ. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
- ب. بيّن أن α و β مضاعفان للعدد 5 إذا و فقط إذا كان $(n - 2)$ مضاعفا للعدد 5
3. نعتبر العددين a و b حيث : $a = n^3 + 2n^2 - 3n$; $b = 2n^2 - n - 1$
- بيّن أن العددين a و b يقبلان القسمة على $(n - 1)$
4. نضع : $PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] = d'$
- أ. بيّن أن $d = d'$
- ب. استنتج $PGCD(a, b)$
- ج. حدد $PGCD(, b)$ من أجل $n = 2001$ ثم من أجل $n = 2002$.

مواضيع القسمة و الموافقات في البكالوريا

التمرين 01 : بكالوريا 2012 ر

(1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : (1) $2011x + 1432y = 31 \dots$

أ. أثبت أن العدد 2011 أولي

ب. باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1)

(2) أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7

ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$

(3) N عدد طبيعي يُكتب $2\gamma\alpha$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α, β, γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1)
عيّن α, β, γ ، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين 02 : بكالوريا 2012 ر

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 16$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 6u_n - 9$

(1) أ. احسب بواقي قسمة كل من u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 على 7

ب. خمن قيمة للعدد a و قيمة للعدد b بحيث : $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$

(2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$ ، ثم استنتج أن : $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

أ. بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب. أحسب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 03 : بكالوريا 2012 ت ر

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11

2. ما هو باقي قسمة 2011^{2012} على 11 ؟

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11

4. عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11.

التمرين 04 : بكالوريا 2012 ت ر

نسمي (S) المجلة التالية : $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح ($x \in \mathbb{Z}$)

1. بيّن أنّ العدد 153 حل للجملة (S)
2. إذا كان x_0 حلا لـ (S) ، بيّن أنّ : (x حل لـ (S)) يكافئ $\begin{pmatrix} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{pmatrix}$
3. حل الجملة (S)
4. يُريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتاب بقي لديه 3 كتب ، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب. إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتاب ، ما هو عدد هذه الكتب ؟

التمرين 05 : بكالوريا 2011 ر

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث :} \quad \begin{cases} m = \text{PPCM}(u_3, u_5) \\ d = \text{PGCD}(u_3, u_5) \end{cases}$$

1. عيّن الحدين u_3 و u_5 ، ثم استنتج u_0
 2. أكتب (u_n) بدلالة n ، ثم بيّن أنّ : 2010 حد من حدود (u_n) و عيّن رتبته
 3. عيّن الحد الذي ابتداءً منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080
 4. n عدد طبيعي غير معدوم.
- أ- أحسب بدلالة n المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$
- ب- استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$
- $S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1}$

التمرين 06 : بكالوريا 2011 ر

1. نعتبر المعادلة : (E) $13x - 7y = -1$ حيث x و y عدنان صحيحان. حلّ المعادلة (E)

$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases} \quad \text{2. عيّن الأعداد الصحيحة النسبية } a \text{ بحيث :}$$

3. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13
4. ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي : $\alpha 00\beta 086$ حيث : α و β عدنان طبيعيان ، $\alpha \neq 0$. عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

التمرين 07 : بكالوريا 2011 ت ر

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1. المعادلة $21x + 14y = 40$ لا تقبل حولا في مجموعة الأعداد الصحيحة
2. في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون : $\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$
3. باقي القسمة الإقليدية للعدد : $3^{2011} + 3^2 + 1$ على 7 هو : 6

التمرين 08 : بكالوريا 2011 ت ر

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1. تحقّق أنّ : $4 \equiv -3[7]$ ، ثمّ بيّن أنّ : $A_3 \equiv 6[7]$
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7
3. بيّن أنّه إذا كان n فرديا فإنّ : $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 و استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7
4. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 ؟

التمرين 09 : بكالوريا 2010 ر

1. نعتبر المعادلة : (1) $7x + 65y = 2009$ ، حيث : x و y عددان صحيحان.
أ- بيّن أنّه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإنّ y مضاعف للعدد 7
ب- حل المعادلة (1)
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n على 9
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{6n} - 1$
أ- تحقّق أنّ u_n يقبل القسمة على 9
ب- حل المعادلة : (2) $(7u_1)x + (u_2)y = 126567$ ذات المجهول (x, y) ، حيث : x و y عددان صحيحان.
ت- عيّن الثنائية (x_0, y_0) حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيين مع $y_0 \geq 25$.

التمرين 10 : بكالوريا 2010 ر

1. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13
2. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13
3. عيّن حسب قيم n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{3n} على 13 ، و استنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$
أ. من أجل $p = 3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13
ب. برهن أنّه إذا كان $p = 3n + 1$ ، فإنّ A_p يقبل القسمة على 13
ج. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$
5. يكتب العددين الطبيعيين a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي :
 $a = 1001001000$ و $b = 1000100010000$
أ. تحقّق أنّ العددين الطبيعيين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري
ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13.

التمرين 11 : بكالوريا 2010 ت ر

- نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي : $n = 11\alpha 00$ حيث α عدد طبيعي
1. عيّن α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3
 2. عيّن العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5. استنتج قيمة α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15
 3. نأخذ $\alpha = 4$ ، أكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 12 : بكالوريا 2010 ت ر

1. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13
2. تحقّق أنّ : $[13] : 10^{2008} + 1 \equiv 0 \pmod{13}$
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $[13] : 10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0 \pmod{13}$.

التمرين 13 : بكالوريا 2009 ر

- x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي. A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A = \overline{5566}$
1. أ. أنشر العبارة $(x+1)(5x^2+6)$ ، ثمّ أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أنّ $A = (5x^2+6)(2+2y)$
 - ب. أحسب x و y إذا علمت أنّ x عدد أولي أصغر من 12 ، ثمّ اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري
 2. أ. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584
 - ب. عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق :
- $$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$$

التمرين 14 : بكالوريا 2009 ت ر

1. أ. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009
 - u_0 و a عدنان طبيعيان غير معدومين ، (u_n) متتالية هندسية أساسها a و حدها الأول u_0 بحيث :
- $$u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009$$
- ب. أحسب a و u_0
 2. نضع $a = 7$ و $u_0 = 2$ ، أحسب u_n بدلالة n
 3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - أ. عبّر عن S_n بدلالة n
 - ب. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 800$

التمرين 15 : بكالوريا 2009 ت ر

1. حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$
2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0) = 1$ ، عيّن عبارة $f(x)$
3. n عدد طبيعي.
- أ. أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n
- ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$
4. أ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$
- ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7

التمرين 16 : بكالوريا 2008 ر

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x - 21y = 78$
1. أ. بيّن أنّ (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$
 - ب. أثبت أنه إذا كانت الثنائيات (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 5 \pmod{7}$. استنتج حلول المعادلة (E)
 2. أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7
 - ب. عيّن الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $5^x + 5^y \equiv 3 \pmod{7}$.

التمرين 17 : بكالوريا 2008 ت ر

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1. a و b عددان طبيعيين حيث : $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$
 - أ. ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟
 - ب. بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7
 - ج. عين قيم n التي يكون من أجلها $\text{PGCD}(a; b) = 7$
2. نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$
 - أ. بين أن كل العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$
 - ب. عين تبعا لقيم n و بدلالة n ، $\text{PGCD}(p; q)$.

التمرين 18 : بكالوريا 2008 ت ر

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (I) $4x - 9y = 319 \dots \dots$

1. تأكد أن الثنائية (1, 82) حل للمعادلة (I)
 - أ. حل المعادلة (I)
2. عين الثنائيات (a, b) الصحيحة حلول المعادلة : (II) $4a^2 - 9b^2 = 319 \dots \dots$
3. استنتج الثنائيات (x_0, y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

التمرين 19 : بكالوريا 2007

n عدد طبيعي أكبر تماما من 2 ، و نعتبر الأعداد الطبيعية : $a = 2n + 1$ ، $b = 4n + 3$ و $c = 2n + 3$

1. أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما و استنتج أن الأعداد a ، b و c أولية فيما بينها
2. عين تبعا لقيم العدد n قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c
3. عين قيمة n بحيث يكون : $\text{PGCD}(b; c) = 7$ و $\text{PPCM}(b; c) = 1305$
4. أكتب العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a
5. نفرض أن $(a; b; c)$ هي إحداثيات نقطة ω في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
 - أ. بين أن النقطة ω تنتمي إلى مستقيم (Δ) يطلب تعيينه
 - ب. أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المبدأ O و يحوي المستقيم (Δ) .

التمرين 20 : بكالوريا 2005

n عدد طبيعي ، و نعتبر العددين الطبيعيين : $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$

1. برهن أن $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; n)$
2. استنتج القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(\alpha; \beta)$
3. a و b عددان طبيعيين يكتبان في نظام العد الذي أساسه n على الشكل : $a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$
 - أ. برهن أن العدد $3n + 2$ قاسم مشترك للعددين a و b
 - ب. استنتج تبعا لقيم n أن $\text{PGCD}(a; b)$ هو $3n + 2$ أو $2(3n + 2)$
 - ج. عين العددين α و β علما أن $\text{PGCD}(a; b) = 41$.

التمرين 21 : بكالوريا 2004

ليكن λ عددا صحيحا و نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $43x - 13y = \lambda \dots$

1. تحقق أن $(-3\lambda; -10\lambda)$ حل للمعادلة (1) و اعط مجموعة حلول هذه المعادلة
2. n عدد طبيعي يكتب في نظام العد الذي أساسه 6 على الشكل : $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ و يكتب في نظام العد الذي أساسه 5 على الشكل $\overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}$ ، حيث α و β و γ أعداد طبيعية
 - أ. تحقق أن $43\alpha - 13\beta = \gamma$
 - ب. عين الأعداد α و β و γ و اكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 22 : بكالوريا 2003

1. α و β عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما و $\alpha > \beta$. عَيِّن α و β بحيث يكون : $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$
2. (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 و أساسها q حيث u_0 و q عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما و $q > u_0$
أ. عَيِّن u_0 و q إذا علمت أنّ : $35u_0^2 + 19u_1 - u_0q^3 = 0$
ب. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
ج. عَيِّن قيم n بحيث يقبل العدد S_n القسمة على 30.

التمرين 23 : بكالوريا 2001

1. α و β عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما. عَيِّن α و β بحيث يكون : $\beta(\beta^3 - 1) = 28\alpha^2$
2. a, b, c, d, e أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها q
عَيِّن هذه الأعداد إذا علمت أن العددين a و q عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما و أنّ $28a^3 = e - b$.

التمرين 24 : بكالوريا 2001

1. عَيِّن $PGCD(225; 180)$
2. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $225x - 180y = 90$
3. عَيِّن مجموعة الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x - y + 1| < 2$
4. a و b عددان طبيعيين يُكتبان في نظام عدّ أساسه α على الشكل : $a = \overline{52}$ و $b = \overline{252}$ و يُكتبان في نظام عدّ أساسه β على الشكل : $a = \overline{44}$ و $b = \overline{206}$. عَيِّن α و β ثم a و b .

التمرين 25 : بكالوريا 2000

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $9x - 14y = 13$... (لاحظ أنّ (3;1) حلّ خاص)
2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (2) $45x - 28y = 130$
أ. بيِّن أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (2) فإنّ x مضاعف للعدد 2 و أنّ y مضاعف للعدد 5
ب. عَيِّن مجموعة حلول المعادلة (2)
3. n عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 9 على الشكل : $\overline{2\alpha\alpha3}$ و يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{5\beta\beta6}$ ، حيث α و β عددان طبيعيين
عَيِّن العددين α و β و اكتب العدد n في النظام العشري.

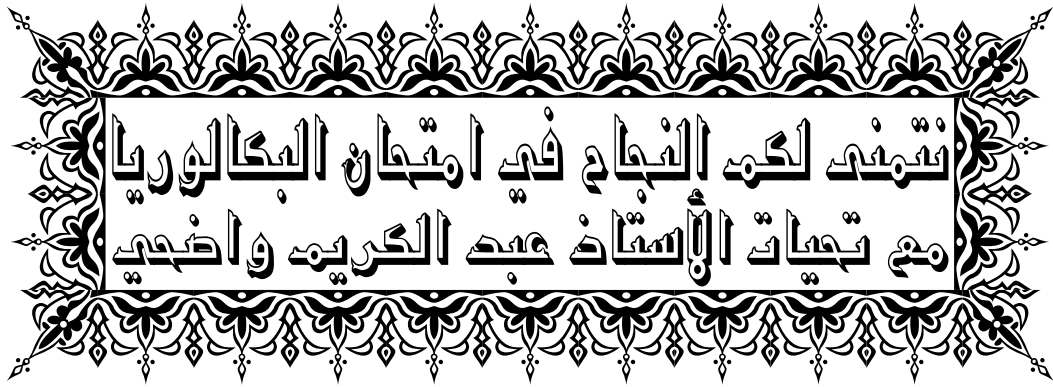
التمرين 26 : بكالوريا 1996

1. حل كلا من العددين 1995 و 105 إلى جداء عوامل أولية
2. α و β عددان طبيعيين حيث $\alpha < \beta$. حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة $\alpha\beta = 105$
3. a و b عددان طبيعيين غير معدومين و غير أوليين فيما بينهما بحيث $a < b$.
عَيِّن a و b بحيث يكون : $\begin{cases} 95d + 19m = 1995 \\ d < 7 \end{cases}$ حيث d هو $PGCD(a; b)$ و m هو $PPCM(a; b)$.

التمرين 27 : بكالوريا 1994

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 2^n على 10. استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414}
2. (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 2^n$
أ. تحقق أنّ (u_n) هندسية
ب. احسب بدلالة n العدد : $S_n = (5 + 2^1) + (5 + 2^2) + (5 + 2^3) + \dots + (5 + 2^n)$
ج. أوجد قيم العدد n بحيث يكون العدد S_n مضاعفا للعدد 10.

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $18x + 4y = 84$ و عيّن مجموعة الحلول $(x ; y)$ التي تحقق $xy > 0$.
2. n عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 5 على الشكل $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ و يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{55\alpha\beta}$ ، حيث α و β و γ أعداد طبيعية عيّن الأعداد α و β و γ و اكتب العدد n في النظام العشري.



حلول تمارين القسمة و الـلوافقات

التمرين 01:

1) $\sqrt{251} \approx 15,84$; بما أن العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 13 فهو إذن أولي ;

2) $2008 = 2^3 \times 251$; الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 هي 1 و 2 ;

3) $m^3 + 35d^3 = 2008$; $a = da'$, $b = db'$; $PGCD(a', b') = 1$

$$m \times d = a \times b \Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = \frac{da' \times db'}{d} = da'b'$$

$$m^3 + 35d^3 = 2008 \Rightarrow (da'b')^3 + 35d^3 = 2008 \Rightarrow d^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow d^3/2008 \Rightarrow d \in \{1, 2\}$$

$$d = 1: (a'b')^3 + 35 = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 1973 \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{1973} \approx 12,54 \text{ مستحيل لأن } a' \text{ و } b' \text{ عدنان صحيحان}$$

$$d = 2: 2^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 216 \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$(a', b') \in \{(1, 6); (6, 1); (2, 3); (3, 2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(2, 12); (12, 2); (4, 6); (6, 4)\}$$

التمرين 02:

$$1) 5^0 \equiv 1[7] ; 5^1 \equiv 5[7] ; 5^2 \equiv 4[7] ; 5^3 \equiv 6[7] ; 5^4 \equiv 2[7] ; 5^5 \equiv 3[7] ; 5^6 \equiv 1[7]$$

$$5^{6k} \equiv 1[7] ; 5^{6k+1} \equiv 5[7] ; 5^{6k+2} \equiv 4[7] ; 5^{6k+3} \equiv 6[7] ; 5^{6k+4} \equiv 2[7] ; 5^{6k+5} \equiv 3[7]$$

$$2) 6 \equiv -1[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv 1[7]$$

$$3) 5^n + 6^{2n} + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n + 1 + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n \equiv 3[7] \Rightarrow n = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$$

التمرين 03:

$$1) 4^0 \equiv 1[11] ; 4^1 \equiv 4[11] ; 4^2 \equiv 5[11] ; 4^3 \equiv 9[11] ; 4^4 \equiv 3[11] ; 4^5 \equiv 1[11]$$

$$4^{5k} \equiv 1[11] ; 4^{5k+1} \equiv 4[11] ; 4^{5k+2} \equiv 5[11] ; 4^{5k+3} \equiv 9[11] ; 4^{5k+4} \equiv 3[11]$$

$$2) 1995 \equiv 4[11] \Rightarrow 1995^n \equiv 4^n[11] ; 26 \equiv 4[11] \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 4^{10n+2}[11] \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 4^{5(2n)+2}[11] \\ \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 5[11]$$

$$6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow 6 \times 4^n + 5 + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow 6 \times 4^n + 1 \equiv 0[11] \\ \Rightarrow 6 \times 4^n \equiv 10[11]$$

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3	[11]
$6 \times 4^n \equiv$	6	2	8	10	7	[11]

$$6 \times 4^n \equiv 10[11] \Rightarrow n = 5k + 3 ; k \in \mathbb{N}$$

التمرين 04:

$$1) 5^0 \equiv 1[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^3 \equiv 6[7]; 5^4 \equiv 2[7]; 5^5 \equiv 3[7]; 5^6 \equiv 1[7]$$

$$5^{6k} \equiv 1[7]; 5^{6k+1} \equiv 5[7]; 5^{6k+2} \equiv 4[7]; 5^{6k+3} \equiv 6[7]; 5^{6k+4} \equiv 2[7]; 5^{6k+5} \equiv 3[7]$$

$$2) 26 \equiv 5[7] \Rightarrow 26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7] \Rightarrow 26^{6n+5} \equiv 3[7]$$

$$47 \equiv 5[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{6(2n)+2}[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 4[7] \Rightarrow 2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7]$$

$$26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 3 + 1 + 3[7] \Rightarrow 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$$

$$3) 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 0[7] \Rightarrow 3 + 1 + 5n \equiv 0[7] \Rightarrow 5n + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 5n \equiv 3[7]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$5n \equiv$	0	5	3	1	6	4	2	[7]

$$5n \equiv 3[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow n = 7k + 2; k \in \mathbb{N}$$

طريقة ثانية: لَمَّا يكون معامل المجهول في الطرف الأول للمعادلة (5) أولياً مع التردد (7)، نضيف التردد إلى الطرف الثاني للمعادلة (3) حتى نحصل على عدد قابل للقسمة على معامل المجهول، فيكون حل المعادلة كالتالي:

$$5n \equiv 3[7] \Rightarrow 5n \equiv 10[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow n = 7k + 2; k \in \mathbb{N}$$

التمرين 05:

$$PGCD(a, b) = d \Rightarrow a = da'; b = db'; PGCD(a', b') = 1$$

$$PGCD(a, b) = d; PPCM(a, b) = m \Rightarrow m \times d = a \times b \Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = \frac{da' \times db'}{d} = da'b'$$

$$1) \begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a, b) = 84 \end{cases} \Rightarrow 84a' + 84b' = 420 \Rightarrow 84(a' + b') = 420 \Rightarrow a' + b' = 5$$

$$(a', b') \in \{(1,4); (4,1); (2,3); (3,2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(84,336); (336,84); (168,252); (252,168)\}$$

$$2) \begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases} \Rightarrow 6a' \times 6b' = 360 \Rightarrow 36(a' \times b') = 360 \Rightarrow a' \times b' = 10$$

$$(a', b') \in \{(1,10); (10,1); (2,5); (5,2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(6,60); (60,6); (12,30); (30,12)\}$$

$$3) \begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases} \Rightarrow (5a')^2 - (5b')^2 = 825 \Rightarrow 25(a'^2 - b'^2) = 825 \Rightarrow a'^2 - b'^2 = 33 \\ \Rightarrow (a' - b')(a' + b') = 33$$

$$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 33 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 34 \Rightarrow a' = 17 \Rightarrow b' = 16 \Rightarrow (a, b) = (85, 80) \dots \text{الحالة الأولى} \dots$$

$$\begin{cases} a' - b' = 3 \\ a' + b' = 11 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 14 \Rightarrow a' = 7 \Rightarrow b' = 4 \Rightarrow (a, b) = (35, 20) \dots \text{الحالة الثانية} \dots$$

ملاحظة: الحالتان $\begin{cases} a' - b' = 11 \\ a' + b' = 3 \end{cases}$ و $\begin{cases} a' - b' = 33 \\ a' + b' = 1 \end{cases}$ مرفوضتان لأن $a' + b' > a' - b'$

$$4) \begin{cases} PPCM(a, b) = 90 \\ PGCD(a, b) = 18 \end{cases}; m = da'b' \Rightarrow a' \times b' = \frac{m}{d} = \frac{90}{18} = 5$$

$$(a', b') \in \{(1,5); (5,1)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(18,90); (90,18)\}$$

$$5) PPCM(a, b) - 9PGCD(a, b) = 13 \Rightarrow m - 9d = 13 \Rightarrow da'b' - 9d = 13 \Rightarrow d(a'b' - 9) = 13 \Rightarrow d/13 \Rightarrow d \in \{1,13\}$$

$$d = 1: a'b' - 9 = 13 \Rightarrow a'b' = 22 \Rightarrow (a', b') \in \{(1,22); (2,11)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(1,22); (2,11)\}$$

$$d = 13: a'b' - 9 = 1 \Rightarrow a'b' = 10 \Rightarrow (a', b') \in \{(1,10); (2,5)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(13,130); (26,65)\}$$

التمرين 06:

$$a = 5n^2 + 7; b = n^2 + 2; PGCD(a, b) = d$$

$$1) d/a, d/b \Rightarrow d/5b - a \Rightarrow d/5n^2 + 10 - 5n^2 - 7 \Rightarrow d/3$$

$$2) PGCD(a, b) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n^2 + 7 \equiv 0[3] \\ n^2 + 2 \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 + 1 \equiv 0[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 \equiv 2[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 \equiv 1[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases}$$

3)

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^2 \equiv$	0	1	1	[3]

$$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n \equiv 1[3] \vee n \equiv 2[3]$$

$$n = 3k : PGCD(a, b) = 1; n = 3k + 1 \vee n = 3k + 2 : PGCD(a, b) = 3$$

التمرين 07:

$$a = 2n + 3; b = 5n - 2; PGCD(a, b) = d$$

$$1) d/a, d/b \Rightarrow d/5a - 2b \Rightarrow d/10n + 15 - 10n + 4 \Rightarrow d/19 \Rightarrow d = 1 \vee d = 19$$

إذا كان العددان a و b غير أوليين فيما بينهما فإن $d \neq 1$ منه $d = 19$

$$2) PGCD(a, b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[19] \\ b \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n + 3 \equiv 0[19] \\ 5n - 2 \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 16[19] \\ 5n \equiv 2[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 8[19] \\ 5n \equiv 40[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 8[19] \\ n \equiv 8[19] \end{cases}$$

$$PGCD(a, b) = 19 \Rightarrow n = 19k + 8; k \in \mathbb{N}$$

التمرين 08:

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1; b = 2n^2 + n$$

$$1) a = (2n + 1)(n^2 + 2n + 1); b = n(2n + 1) \Rightarrow b \text{ و } a \text{ قاسم مشترك للعددين}$$

$$2) (n + 1) - (n) = 1 \Rightarrow PGCD(n, n + 1) = 1 \text{ (حسب نظرية بيزو)}$$

$$(n+1)^2 - n(n+2) = 1 \Rightarrow PGCD[n, (n+1)^2] = 1 \text{ (حسب نظرية بيزو)}$$

$$3) PGCD(a, b) = (2n+1)PGCD(n^2+2n+1, n) = (2n+1) \underbrace{PGCD[(n+1)^2, n]}_1 = 2n+1$$

التمرين 09:

$$A = n^4 + n^2 + 1$$

$$1) A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n) = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

$$2) a = n^2 + n + 1; b = n^2 - n + 1$$

- $a = n(n+1) + 1; b = n(n-1) + 1$

بما أن جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي ، فإن العددين $n(n+1)$ و $n(n-1)$ زوجيان ، و منه يكون العددين a و b فرديين

- d/a و $d/b \Rightarrow d/a - b \Rightarrow d/2n; d/a$ و $d/b \Rightarrow d/a + b \Rightarrow d/2n^2 + 2 \Rightarrow d/2(n^2 + 1)$
- $n^2 + 1 - n(n) = 1 \Rightarrow PGCD(n^2 + 1, n) = 1$ (حسب نظرية بيزو)
- d/a و $d/b \Rightarrow d/a - b$ و $d/a + b \Rightarrow d/PGCD(a-b, a+b) \Rightarrow d/PGCD(2n, 2(n^2 + 1))$
 $PGCD(2n, 2(n^2 + 1)) = 2 \times PGCD(n, n^2 + 1) = 2 \Rightarrow d/2 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2$

بما أن العددين a و b فرديان ، نستنتج أن $PGCD(a, b) = 1$ ، منه العددين أوليان فيما بينهما.

التمرين 10:

$$a = 11n + 3; b = 13n - 1$$

$$1) d/a$$
 و $d/b \Rightarrow d/13a - 11b \Rightarrow d/50$

$$2) 50x - 11y = 1$$

$$50 = 11(4) + 6 \Rightarrow 6 = 50 - 11(4)$$

$$11 = 6 + 5 \Rightarrow 5 = 11 - 6$$

$$6 = 5 + 1 \Rightarrow 1 = 6 - 5$$

$$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2(6) - 11 = 2[50 - 11(4)] - 11 = 50(2) - 11(9) \Rightarrow (x_0, y_0) = (2, 9)$$

$$50(2) - 11(9) = 1 \Rightarrow 50(6) - 11(27) = 3$$

$$\begin{cases} 50x - 11y = 3 \\ 50(6) - 11(27) = 3 \end{cases} \Rightarrow 50(x - 6) - 11(y - 27) = 0 \Rightarrow 50(x - 6) = 11(y - 27)$$

$$\begin{cases} 11/50(x - 6) \\ PGCD(11, 50) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11/(x - 6) \Rightarrow x - 6 = 11k \Rightarrow x = 11k + 6; k \in \mathbb{Z}$$

$$50(x - 6) = 11(y - 27) \Rightarrow 50(11k) = 11(y - 27) \Rightarrow y - 27 = 50k \Rightarrow y = 50k + 27; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(11k + 6; 50k + 27)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$3) PGCD(a, b) = 50 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[50] \\ b \equiv 0[50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[50] \\ 13n - 1 \equiv 0[50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 47[50] \\ 13n \equiv 1[50] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 27[50]$$

$$\Rightarrow n = 50k + 27 ; k \in \mathbb{N}$$

$$4) PGCD(a, b) = 25 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[25] \\ b \equiv 0[25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[25] \\ 13n - 1 \equiv 0[25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 22[25] \\ 13n \equiv 1[25] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 2[25]$$

$$\Rightarrow n = 25k + 2 ; k \in \mathbb{N} \text{ (زوجي } k)$$

التمرين 11:

$$324x - 245y = 7 \dots (E)$$

$$1) 324 = 245 + 79 \Rightarrow 79 = 324 - 245$$

$$245 = 79(3) + 8 \Rightarrow 8 = 245 - 79(3)$$

$$79 = 8(9) + 7 \Rightarrow 7 = 79 - 8(9)$$

$$7 = 79 - 8(9) = 79 - 9[245 - 79(3)] = 245(-9) + 79(28) = 245(-9) + 28[324 - 245]$$

$$7 = 324(28) - 245(37) \Rightarrow (x_0, y_0) = (28, 37)$$

$$\begin{cases} 324x - 245y = 7 \\ 324(28) - 245(37) = 7 \end{cases} \Rightarrow 324(x - 28) - 245(y - 37) = 0 \Rightarrow 324(x - 28) = 245(y - 37)$$

$$\begin{cases} 245/324(x - 28) \\ PGCD(245, 324) = 1 \end{cases} \Rightarrow 245/(x - 28) \Rightarrow x - 28 = 245k \Rightarrow x = 245k + 28 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$324(x - 28) = 245(y - 37) \Rightarrow 324(245k) = 245(y - 37) \Rightarrow y - 37 = 324k \Rightarrow y = 324k + 37 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(245k + 28, 324k + 37)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 324x - 245y = 7 \Rightarrow 324x = 245y + 7 \Rightarrow 324x = 7(35y + 1)$$

$$\begin{cases} 7/324x \\ PGCD(7, 324) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7/x \Rightarrow x \equiv 0[7]$$

$$3) PGCD(x, y) = d$$

- $d \mid x \text{ , } d \mid y \Rightarrow d \mid 324x - 245y \Rightarrow d \mid 7 \Rightarrow d = 1 \vee d = 7$
- $d = 7 \Rightarrow y \equiv 0[7] \Rightarrow 324k + 37 \equiv 0[7] \Rightarrow 2k + 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 2k \equiv 5[7] \Rightarrow k \equiv 6[7]$

$$\Rightarrow k = 7k' + 6 \Rightarrow x = 245(7k' + 6) + 28 = 1715k' + 1498 ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$y = 324(7k' + 6) + 37 = 2268k' + 1981 ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(1715k' + 1498, 2268k' + 1981)\} ; k' \in \mathbb{Z}$$

التمرين 12:

$$1) 1996 = 2^2 \times 499 ; 1497 = 3 \times 499 ; 2994 = 2 \times 3 \times 499 \Rightarrow PGCD(1996, 1497, 2994) = 499$$

$$2) 1996x - 1497y = 2994 \dots (1)$$

$$\bullet (1) \Rightarrow 4x - 3y = 6 \Rightarrow 4x = 3y + 6 \Rightarrow 4x = 3(y + 2) ; \left\{ \begin{array}{l} 3/4x \\ PGCD(3,4) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 3/x \Rightarrow x \equiv 0[3]$$

$$(1) \Rightarrow 4x - 3y = 6 \Rightarrow 3y = 4x - 6 \Rightarrow 3y = 2(2x - 3) ; \left\{ \begin{array}{l} 2/3y \\ PGCD(2,3) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 2/y \Rightarrow y \equiv 0[2]$$

$$\bullet 4x - 3y = 6 \Rightarrow 3y = 4x - 6 = 4(3k) - 6 = 12k - 6 = 3(4k - 2) \Rightarrow y = 4k - 2$$

$$S = \{(3k; 4k - 2)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet xy = 1950 \Rightarrow 3k(4k - 2) = 1950 ; 12k^2 - 6k - 1950 = 0 ; \Delta' = 9 + 12(1950) = 23409$$

$$k' = \frac{3 - 153}{12} = -12,5 \text{ (مرفوضة)} ; k'' = \frac{3 + 153}{12} = 13 ; (x; y) = (39; 50)$$

التمرين 13:

$$1) 4x - 9y = 19 \Rightarrow 4x = 9y + 19 \Rightarrow 9y + 19 \equiv 0[4] \Rightarrow y + 3 \equiv 0[4] \Rightarrow y \equiv 1[4] \Rightarrow y = 4k + 1$$

$$4x = 9(4k + 1) + 19 = 36k + 28 = 4(9k + 7) \Rightarrow x = 9k + 7 \Rightarrow S = \{(9k + 7; 4k + 1)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) d \mid x \text{ و } d \mid y \Rightarrow d \mid 4x - 9y \Rightarrow d \mid 19 \Rightarrow d = 1 \text{ و } d = 19$$

$$d = 19 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[19] \\ y \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k + 7 \equiv 0[19] \\ 4k + 1 \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k \equiv 12[19] \\ 4k \equiv 18[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \equiv 14[19] \\ k \equiv 14[19] \end{cases} \Rightarrow k = 19k' + 14$$

$$x = 9(19k' + 14) + 7 = 171k' + 133 ; y = 4(19k' + 14) + 1 = 76k' + 57 ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(171k' + 133 ; 76k' + 57)\} ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$3) 4a^2 - 9b^2 = 19 \Rightarrow (2a - 3b)(2a + 3b) = 19$$

نلاحظ أنه إذا كانت الثنائية $(a; b)$ حلاً للمعادلة ، فكل ذلك الثنائيات $(-a; b)$ ، $(a; -b)$ و $(-a; -b)$ ، لذا سنبحث عن الثنائية الموجبة فقط ، و بالتالي يكون $(2a - 3b) < (2a + 3b)$

$$(2a - 3b)(2a + 3b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 2a + 3b = 19 \end{cases} \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5 ; b = 3$$

$$S = \{(5; 3) ; (-5; 3) ; (5; -3) ; (-5; -3)\}$$

التمرين 14:

$$1) 5x - 3y = 2 \Rightarrow 5x - 2 = 3y \Rightarrow 5x - 2 \equiv 0[3] \Rightarrow 2x \equiv 2[3] \Rightarrow x \equiv 1[3] \Rightarrow x = 3k + 1$$

$$3y = 5x - 2 \Rightarrow 3y = 5(3k + 1) - 2 = 15k + 3 = 3(5k + 1) \Rightarrow y = 5k + 1$$

$$S = \{(3k + 1; 5k + 1)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} A = \overline{55}_x \\ A = \overline{37}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 + 5x \\ A = 7 + 3y \end{cases} \Rightarrow 5x + 5 = 3y + 7 \Rightarrow 5x - 3y = 2 \Rightarrow (x; y) = (3k + 1; 5k + 1)$$

$$\begin{cases} 5 < x \leq 12 \\ 7 < y \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 < 3k + 1 \leq 12 \\ 7 < 5k + 1 \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 < 3k \leq 11 \\ 6 < 5k \leq 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} < k \leq \frac{11}{3} \\ \frac{6}{5} < k \leq \frac{19}{5} \end{cases} \Rightarrow k = 2 \text{ أو } k = 3$$

- $k = 2 \Rightarrow (x; y) = (7; 11) \Rightarrow A = 5(7) + 5 = 40$
- $k = 3 \Rightarrow (x; y) = (10; 16) \Rightarrow A = 5(10) + 5 = 55$

التمرين 15:

$$1) 8x - 5y = 3$$

$$8(1) - 5(1) = 3 \Rightarrow 8(x - 1) - 5(y - 1) = 0 \Rightarrow 8(x - 1) = 5(y - 1)$$

$$\begin{cases} 5/8(x - 1) \\ PGCD(5; 8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5/(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 5k \Rightarrow x = 5k + 1$$

$$8(x - 1) = 5(y - 1) \Rightarrow 8(5k) = 5(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 8k \Rightarrow y = 8k + 1$$

$$S = \{(5k + 1; 8k + 1)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) m = 8p + 1 = 5q + 4 \Rightarrow 8p - 5q = 3 \Rightarrow (p; q) \in S$$

$$m = 8p + 1 = 8(5k + 1) + 1 = 40k + 9 \Rightarrow m \equiv 9[40]$$

$$m > 2000 \Rightarrow 40k + 9 > 2000 \Rightarrow 40k > 1991 \Rightarrow k > \frac{1991}{40} \Rightarrow k > 49,775 \Rightarrow k = 50 \Rightarrow m = 2009$$

$$3) 2^{3k} = (2^3)^k = 8^k; 8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^k \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1[7]$$

$$2^{2009} = 2^2 \times 2^{2007} = 4 \times 2^{3(669)} \Rightarrow 2^{2009} \equiv 4[7]$$

$$4) N = \overline{a00b} = 10^3a + b$$

$$10 \equiv 3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 3^3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 27[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 27 - 28[7] \Rightarrow 10^3 \equiv -1[7]$$

$$10^3 \equiv -1[7] \Rightarrow 10^3a + b \equiv -a + b[7] \Rightarrow N \equiv -a + b[7]$$

$$N \equiv 0[7] \Rightarrow -a + b \equiv 0[7] \Rightarrow a \equiv b[7]$$

$$(a, b) \in \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (7,7); (8,8); (9,9); (7,0); (1,8); (8,1); (2,9); (9,2)\}$$

$$N \in \{1001; 2002; 3003; 4004; 5005; 6006; 7007; 8008; 9009; 7000; 1008; 8001; 2009; 9002\}$$

التمرين 16:

$$1) x^2 + x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow x^2 + x + 3 - 5x \equiv 0[5] \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow (x - 1)(x - 3) \equiv 0[5]$$

$$\Rightarrow x \equiv 1[5] \text{ أو } x \equiv 3[5] \text{ (الجواب د)}$$

$$2) 24x + 34y = 2; 24(17k - 7) + 34(5 - 12k) = 408k - 168 + 170 - 408k = 2 \text{ (الجواب أ)}$$

3) $N = \overline{421}_5 = 1 + (2 \times 5) + (4 \times 5^2) = 111 = 18 \times 6 + 3 = (3 \times 6^2) + 3 = \overline{303}_6$ (الجواب ج)

4) $1432 \equiv 1[3] \Rightarrow 1432^{2011} \equiv 1[3]$ (الجواب ب)

5) $a = n(n+2); b = n+1; b^2 - a = 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 1$ (بيزو) (الجواب ج)

التمرين 17 :

1) $PGCD(a+b; ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 \mid a+b \\ p^2 \mid ab \end{cases} \Rightarrow p^2 \mid a(a+b) - ab \Rightarrow p^2 \mid a^2 \Rightarrow p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a$ (لأن p أولي)

$PGCD(a+b; ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 \mid a+b \\ p^2 \mid ab \end{cases} \Rightarrow p^2 \mid b(a+b) - ab \Rightarrow p^2 \mid b^2 \Rightarrow p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b$ (لأن p أولي)

$PGCD(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a+b \\ d \mid ab \end{cases} \Rightarrow d \mid p^2 \Rightarrow d \in \{1, p, p^2\}$

بما أن p يقسم a و b يقسم b و هو يختلف عن 1 لأنه أولي ، إذن $PGCD(a, b) \neq 1$ ، منه $PGCD(a, b) = p$ أو $PGCD(a, b) = p^2$

2) $\begin{cases} p^2 = 49 \\ m = 231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ m = 231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 7 \\ m = 231 \end{cases}$ أو $\begin{cases} d = 49 \\ m = 231 \end{cases}$ (مرفوض لأن 49 لا يقسم 231) $\Rightarrow d = 7$

$d = 7 \Rightarrow a = 7a'; b = 7b'; PGCD(a', b') = 1$

$m = 231 \Rightarrow d \cdot a' \cdot b' = 231 \Rightarrow a' \cdot b' = 33 \Rightarrow (a', b') \in \{(1, 33); (33, 1); (3, 11); (11, 3)\}$

$\Rightarrow (a, b) \in \{(7, 231); (231, 7); (21, 77); (77, 21)\}$

التمرين 18 :

$a_n = 4 \times 10^n - 1, b_n = 2 \times 10^n - 1, c_n = 2 \times 10^n + 10$

1) $b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 1999; c_3 = 2 \times 10^3 + 10 = 2010$

• $10 \equiv 1[3] \Rightarrow 10^n \equiv 1[3]; 4 \equiv 1[3] \Rightarrow 4 \times 10^n - 1 \equiv 0[3] \Rightarrow a_n \equiv 0[3]$

$10 \equiv 1[3] \Rightarrow 10^n \equiv 1[3]; 2 \equiv -1[3] \Rightarrow 2 \times 10^n + 10 \equiv 0[3] \Rightarrow c_n \equiv 0[3]$

$\sqrt{1999} \approx 44,7$

بما أن العدد 1999 لا يقبل القسمة على أي من الأعداد التالية $\{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43\}$ ، فهو إذن أولي.

• $b_n \times (c_n - 9) = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 10 - 9) = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1)$

$= 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$

$a_6 = a_{2(3)} = b_3 \times (c_3 - 9) = 1999 \times 2001 = 1999 \times 3 \times 23 \times 29$

$c_n = b_n + 11 \Rightarrow PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 11)$

$d = PGCD(b_n, c_n) \Rightarrow d = PGCD(b_n, 11) \Rightarrow d = 1$ أو $d = 11$

بما أن العدد b_3 أولي ، إذن $d \neq 11$ منه $d = 1$

$$2) 1999x + 2010y = 1 \dots (E)$$

بما أن العدد 1999 أولي ، فإن $PGCD(1999,2010) = 1$ ، منه المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$

$$\begin{cases} 1999x + 2010y = 1 \\ 1999(-731) + 2010(727) = 1 \end{cases} \Rightarrow 1999(x + 731) + 2010(y - 727) = 0 \Rightarrow 1999(x + 731) = 2010(-y + 727)$$

$$\begin{cases} 2010 \mid 1999(x + 731) \\ PGCD(1999,2010) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2010 \mid (x + 731) \Rightarrow x + 731 = 2010k \Rightarrow x = 2010k - 731$$

$$1999(2010k) = 2010(-y + 727) \Rightarrow -y + 727 = 1999k \Rightarrow y = -1999k + 727$$

$$S = \{(2010k - 731; -1999k + 727)\}; k \in \mathbb{Z}$$

التمرين 19 :

$$1) n^2 + 5n + 4 = (n + 1)(n + 4) \Rightarrow (n + 1) \text{ يقبل القسمة على } (n^2 + 5n + 4)$$

$$n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2) \Rightarrow (n + 1) \text{ يقبل القسمة على } (n^2 + 3n + 2)$$

$$2) 3n^2 + 15n + 19 = (n + 1)(3n + 12) + 7; (n + 1) \mid (3n^2 + 15n + 19) \Rightarrow (n + 1) \mid 7 \Rightarrow n = 0 \vee n = 6$$

$$3) n^2 + 3n + 2 \mid 3n^2 + 15n + 19 \Rightarrow n + 1 \mid 3n^2 + 15n + 19 \Rightarrow n = 0 \vee n = 6$$

- $n = 0 : 2/19$ (مستحيل)
- $n = 6 : 56/217$ (مستحيل)

نستنتج إذا أن العدد $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على العدد $n^2 + 3n + 2$

التمرين 20 :

$$1) 584 = 2^3 \times 73 \Rightarrow 2 \text{ و } 1 \text{ هي مربعاتها تقسم العدد } 584$$

$$2) PGCD(a, b) = d; a = da'; b = db'; PGCD(a', b') = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(a' + b') = 32 \\ d^2(a'^2 + b'^2) = 584 \end{cases}; d^2/584 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2$$

- $d = 1 : \begin{cases} a' + b' = 32 \\ a'^2 + b'^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 32 - a' \\ a'^2 + (32 - a')^2 = 584 \end{cases}$

$$a'^2 + (32 - a')^2 = 584 \Rightarrow 2a'^2 - 64a' + 1024 = 584 \Rightarrow 2a'^2 - 64a' + 440 = 0$$

$$\Rightarrow a'^2 - 32a' + 220 = 0; \Delta' = 36; a' = 10 \vee a' = 22$$

$$(a', b') \in \{(10, 22); (22, 10)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(10, 22); (22, 10)\}$$

- $d = 2 : \begin{cases} a' + b' = 16 \\ a'^2 + b'^2 = 146 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 16 - a' \\ a'^2 + (16 - a')^2 = 146 \end{cases}$

$$a'^2 + (16 - a')^2 = 146 \Rightarrow 2a'^2 - 32a' + 256 = 146 \Rightarrow 2a'^2 - 32a' + 110 = 0$$

$$\Rightarrow a'^2 - 16a' + 55 = 0; \Delta' = 9; a' = 5 \vee a' = 11$$

$$(a', b') \in \{(5, 11); (11, 5)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(10, 22); (22, 10)\}$$

التمرين 21 :

$$1) 3^0 \equiv 1[10]; 3^1 \equiv 3[10]; 3^2 \equiv 9[10]; 3^3 \equiv 7[10]; 3^4 \equiv 1[10]$$

$$3^{4k} \equiv 1[10]; 3^{4k+1} \equiv 3[10]; 3^{4k+2} \equiv 9[10]; 3^{4k+3} \equiv 7[10]$$

$$2) 63 \equiv 3[10]; 9 \equiv -1[10] \Rightarrow 9^{2002} \equiv 1[10]; 7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 3^{4(355)+2}[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 9[10]$$

$$\underbrace{63}_{\equiv 3[10]} \times \underbrace{9^{2002}}_{\equiv 1[10]} - \underbrace{7^{1422}}_{\equiv 9[10]} \equiv -6[10] \Rightarrow 63 \times 9^{2002} - 7^{1422} \equiv 4[10]$$

$$3) 3n \times 9^n = 3n \times 3^{2n} = 3^{2n+1} \times n; 7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$$

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \times n - 3^{2n+1}[10] \Rightarrow 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$$

$$4) 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10] \Rightarrow (n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$$

بما أن العدد $2n+1$ فردي ، فإن $3^{2n+1} \equiv 3[10]$ أو $3^{2n+1} \equiv 7[10]$ ، نستنتج أن الموافقة السابقة تتحقق لما $(n-1) \equiv 0[10]$ أي $n \equiv 1[10]$

التمرين 22 :

$$1) 4^0 \equiv 1[11]; 4^1 \equiv 4[11]; 4^2 \equiv 5[11]; 4^3 \equiv 9[11]; 4^4 \equiv 3[11]; 4^5 \equiv 1[11]$$

$$4^{5k} \equiv 1[11]; 4^{5k+1} \equiv 4[11]; 4^{5k+2} \equiv 5[11]; 4^{5k+3} \equiv 9[11]; 4^{5k+4} \equiv 3[11]$$

$$2) 15 \equiv 4[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4^{5n+1}[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4[11]$$

$$26 \equiv 4[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 4^{5n+2}[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 5[11] \Rightarrow 2 \times 26^{5n+2} \equiv 10[11]$$

$$125 \equiv 4[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 4^{5n+3}[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 9[11] \Rightarrow 3 \times 125^{5n+3} \equiv 5[11]$$

$$k = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3} + 1 \Rightarrow k \equiv 4 - 10 + 5 + 1[11] \Rightarrow k \equiv 0[11]$$

$$3) 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \Rightarrow 4 + 5 + 3n \equiv 0[11] \Rightarrow 3n + 9 \equiv 0[11] \Rightarrow 3n \equiv 2[11]$$

$$\Rightarrow 3n \equiv 24[11] \Rightarrow n \equiv 8[11] \Rightarrow n = 11k + 8$$

$$8 \leq n \leq 50 \Rightarrow 8 \leq 11k + 8 \leq 50 \Rightarrow 0 \leq 11k \leq 42 \Rightarrow 0 \leq k \leq 3,8 \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{8; 19; 30; 41\}$$

التمرين 23 :

$$1) 2688 = 2^7 \times 3 \times 7; 3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7; PGCD(2688; 3024) = 2^4 \times 3 \times 7 = 336$$

$$2) أ) 2688x + 3024y = -3360 \dots (1) \Rightarrow 8x + 9y = -10 \dots (2) \text{ (بعد القسمة على 336)}$$

$$\text{ب) الثنائية } (1; -2) \text{ حل خاص للمعادلة (2) } \Rightarrow 8(1) + 9(-2) = -10$$

$$3) (P) : x + 2y - z = -2; (P') : 3x - y + 5z = 0$$

$$\text{أ. } \vec{n}(1; 2; -1); \vec{n'}(3; -1; 5); \frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow \vec{n} \nparallel \vec{n'} \Rightarrow (P) \cap (P') = (d)$$

$$\text{ب. } M(x; y; z) \in (d) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 10y - 5z = -10 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x + 9y = -10$$

نستنتج أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2)

$$\begin{cases} 8x + 9y = -10 \\ 8(1) + 9(-2) = -10 \end{cases} \Rightarrow 8(x-1) + 9(y+2) = 0 \Rightarrow 8(x-1) = 9(-y-2)$$

$$\begin{cases} 9/8(x-1) \\ PGCD(8;9) = 1 \end{cases} \Rightarrow 9/(x-1) \Rightarrow x-1 = 9k \Rightarrow x = 9k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$8(9k) = 9(-y-2) \Rightarrow -y-2 = 8k \Rightarrow y = -8k - 2 ; k \in \mathbb{Z}$$

نستنتج أنَّ مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي : $(E) = \{M(9k + 1; -8k - 2; z)\}$ حيث $(k; z) \in \mathbb{Z}^2$

التمرين 24 :

$$1) PGCD(a; b) = d ; PGCD(x; y) = d'$$

$$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2a + 3b \\ d/3a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases} \Rightarrow d/d'$$

$$\begin{cases} d'/x \\ d'/y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/2a + 3b \\ d'/3a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/3(2a + 3b) - 2(3a + 4b) \\ d'/3(3a + 4b) - 4(2a + 3b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Rightarrow d'/d$$

$$d/d' , d'/d \Rightarrow d = d'$$

$$d = 1 \Rightarrow d' = 1$$

$$2) x = 2\alpha + 3\beta ; y = 3\alpha + 4\beta ; PGCD(x; y) = PGCD(\alpha; \beta) = 5 ; x = 5x' ; y = 5y' ; PGCD(x'; y') = 1$$

$$\begin{cases} xy = 2200 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow 25x'y' = 2200 \Rightarrow x'y' = 88 \Rightarrow (x', y') \in \{(1, 88); (8, 11)\}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \{(5, 440); (40, 55)\}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ 3\alpha + 4\beta = 440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1300 \\ \beta = -865 \end{cases} \text{ (مرفوض لأن العدد } \beta \text{ طبيعي)}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 40 \\ 3\alpha + 4\beta = 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 10 \end{cases} \Rightarrow (\alpha; \beta) = (5; 10)$$

التمرين 25 :

$$1) a = \overline{2310}_n = 2n^3 + 3n^2 + n ; b = \overline{252}_n = 2n^2 + 5n + 2$$

$$2n^3 + 3n^2 + n = (2n + 1)(n^2 + n) \Rightarrow (2n + 1)/a$$

$$2n^2 + 5n + 2 = (2n + 1)(n + 2) \Rightarrow (2n + 1)/b$$

$$d = PGCD(a; b) = (2n + 1) \times \underbrace{PGCD(n^2 + n; n + 2)}_{d'}$$

$$n^2 + n = (n + 2)(n - 1) + 2 \Rightarrow d' = PGCD(n + 2; 2) \Rightarrow d' = 1 \vee d' = 2$$

$$d = (2n + 1) \times d' \Rightarrow d = 2n + 1 \vee d = 2(2n + 1)$$

$$2) n = 6 : a = 546 ; b = 104 ; d = 26$$

نلاحظ أنَّ الثنائية $(-1; 5)$ حل خاص للمعادلة $ax + by = -26 \Rightarrow 546x + 104y = -26 \Rightarrow 21x + 4y = -1$;

$$\begin{cases} 21x + 4y = -1 \\ 21(-1) + 4(5) = -1 \end{cases} \Rightarrow 21(x + 1) + 4(y - 5) = 0 \Rightarrow 21(x + 1) = 4(-y + 5)$$

$$\begin{cases} 4/21(x + 1) \\ PGCD(4; 21) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4/(x + 1) \Rightarrow x + 1 = 4k \Rightarrow x = 4k - 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$21(4k) = 4(-y + 5) \Rightarrow -y + 5 = 21k \Rightarrow y = -21k + 5 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(4k - 1; -21k + 5)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

التمرين 26 :

1)

$$أ. \quad 6^{10} = (6^2)^5 = 36^5 ; 36 \equiv 3[11] \Rightarrow 36^5 \equiv 3^5[11] ; 3^5 = 243 \Rightarrow 3^5 \equiv 1[11] \Rightarrow 6^{10} \equiv 1[11]$$

$$ب. \quad 6 \equiv 1[5] \Rightarrow 6^4 \equiv 1[5]$$

$$ج. \quad 6^{10} \equiv 1[11] \Rightarrow (6^{10})^4 \equiv 1[11] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[11] ; 6^4 \equiv 1[5] \Rightarrow (6^4)^{10} \equiv 1[5] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[5]$$

$$د. \quad \begin{cases} 6^{40} \equiv 1[11] \\ 6^{40} \equiv 1[5] \end{cases} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[55] \Rightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0[55] \quad (PGCD(11, 5) = 1)$$

2)

$$أ. \quad 65x - 40y = 1 \dots (E) ; PGCD(65, 40) = 5 ; 5 \text{ لا يقسم } 1 ; S = \emptyset$$

$$ب. \quad 17x - 40y = 1 \dots (E') ; PGCD(17, 40) = 1 ; \text{المعادلة تقبل على الأقل حلا}$$

$$ج. \quad 40 = 17 \times 2 + 6 ; 6 = 40 - 17 \times 2$$

$$17 = 6 \times 2 + 5 ; 5 = 17 - 6 \times 2$$

$$6 = 5 + 1 ; 1 = 6 - 5$$

$$1 = 6 - 5 = 6 - (17 - 6 \times 2) = 17(-1) + 6(3) = 17(-1) + 3(40 - 17 \times 2)$$

$$= 17(-7) - 40(-3) \Rightarrow (x_0, y_0) = (-7, -3)$$

$$د. \quad \begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17(-7) - 40(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17(x + 7) - 40(y + 3) = 0 \Rightarrow 17(x + 7) = 40(y + 3)$$

$$\begin{cases} 40/17(x + 7) \\ PGCD(40; 17) = 1 \end{cases} \Rightarrow 40/(x + 7) \Rightarrow x + 7 = 40k \Rightarrow x = 40k - 7 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$17(40k) = 40(y + 3) \Rightarrow y + 3 = 17k \Rightarrow y = 17k - 3 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(40k - 7; 17k - 3)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$17x_0 \equiv 1[40] \Rightarrow 17x_0 = 40\alpha + 1 \Rightarrow 17x_0 - 40\alpha = 1 \Rightarrow x_0 = 40k - 7$$

$$0 \leq x_0 \leq 40 \Rightarrow 0 \leq 40k - 7 \leq 40 \Rightarrow 7 \leq 40k \leq 47 \Rightarrow 0,175 \leq k \leq 1,175 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x_0 = 33$$

$$3) \quad \begin{cases} a^{17} \equiv b[55] \\ a^{40} \equiv 1[55] \end{cases} \Rightarrow b^{33} \equiv (a^{17})^{33}[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a^{561}[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a^{560} \times a[55]$$

$$\Rightarrow b^{33} \equiv (a^{40})^{14} \times a[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a[55]$$

التمرين 27 :

$$1) \quad 3^0 \equiv 1[11] ; 3^1 \equiv 3[11] ; 3^2 \equiv 9[11] ; 3^3 \equiv 5[11] ; 3^4 \equiv 4[11] ; 3^5 \equiv 1[11]$$

$$3^{5k} \equiv 1[11] ; 3^{5k+1} \equiv 3[11] ; 3^{5k+2} \equiv 9[11] ; 3^{5k+3} \equiv 5[11] ; 3^{5k+4} \equiv 4[11]$$

$$2) 69 \equiv 3[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3^{10n+6}[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3^{5(2n+1)+1}[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3[11]$$

$$\Rightarrow 4 \times 69^{10n+6} \equiv 1[11]$$

$$58 \equiv 3[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 3^{20n+13}[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 3^{5(4n+2)+3}[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 5[11]$$

$$\Rightarrow 7 \times 58^{20n+13} \equiv 2[11]$$

$$4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 1 + 2 - 8[11] \Rightarrow 4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 6[11]$$

$$3) 36 \equiv 3[11] \Rightarrow 36^{5n} \equiv 3^{5n}[11] \Rightarrow 36^{5n} \equiv 1[11] \Rightarrow 36^{5n} \times n \equiv n[11]$$

$$14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^{5n+3} \equiv 3^{5n+3}[11] \Rightarrow 14^{5n+3} \equiv 5[11]$$

$$n^2 + 36^{5n} \times n + 14^{5n+3} + 5 \equiv 0[11] \Rightarrow n^2 + n + 10 \equiv 0[11]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[11]
$n^2 \equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1	[11]
$n^2 + n + 10 \equiv$	10	1	5	0	8	7	8	0	5	1	10	[11]

$$n^2 + n + 10 \equiv 0[11] \Rightarrow n \equiv 3[11] \text{ و } n \equiv 7[11] \Rightarrow n = 11k + 3 \text{ و } n = 11k + 7 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$4) 80 \equiv 3[11] \Rightarrow 80^{3n+2} \equiv 3^{3n+2}[11] ; 91 \equiv 3[11] \Rightarrow 91^{3n+1} \equiv 3^{3n+1}[11]$$

$$80^{3n+2} \times \beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3^{3n+2} \times \beta + 3^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3^{3n+1}(3\beta + 1) \equiv 0[11]$$

$$\Rightarrow 3\beta + 1 \equiv 0[11] \Rightarrow 3\beta \equiv 10[11] \Rightarrow \beta \equiv 7[11] \Rightarrow \beta = 11k + 7 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$|\beta| \leq 20 \Rightarrow -20 \leq \beta \leq 20 \Rightarrow -20 \leq 11k + 7 \leq 20 \Rightarrow -27 \leq 11k \leq 13 \Rightarrow -2,45 \leq k \leq 1,18$$

$$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow \beta \in \{-15; -4; 7; 18\}$$

$$5) 14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^x \equiv 3^x[11] ; 25 \equiv 3[11] \Rightarrow 25^y \equiv 3^y[11]$$

	$x =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$
$y =$	$\begin{matrix} 3^x \equiv \\ 3^y \equiv \end{matrix}$	1	3	9	5	4
$5k'$	1	2	4	10	6	5
$5k' + 1$	3	4	6	1	8	7
$5k' + 2$	9	10	1	7	3	2
$5k' + 3$	5	6	8	3	10	9
$5k' + 4$	4	5	1	2	9	8

$$3^x + 3^y \equiv 8[11] \Rightarrow (x, y) \in \{(5k + 1; 5k' + 3), (5k + 3; 5k' + 1), (5k + 4; 5k' + 4)\} ; (k, k') \in \mathbb{N}^2$$

: التمرين 28

$$1) \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3(x - 1) - 2(y - 1) = 0 \Rightarrow 3(x - 1) = 2(y - 1)$$

$$\begin{cases} 2/3(x - 1) \\ PGCD(2; 3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2/(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 2k \Rightarrow x = 2k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$3(2k) = 2(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 3k \Rightarrow y = 3k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(2k + 1; 3k + 1)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

2)

أ. $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1 \Rightarrow (14n + 3; 21n + 4) \in S$

ب. $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1 \Rightarrow PGCD(14n + 3; 21n + 4) = 1$ (بيزو)

3) $d = PGCD(2n + 1; 21n + 4)$

أ. $\begin{cases} d \mid 2n + 1 \\ d \mid 21n + 4 \end{cases} \Rightarrow d \mid 21(2n + 1) - 2(21n + 4) \Rightarrow d \mid 13 \Rightarrow d = 1 \text{ أو } d = 13$

ب. $d = 13 \Rightarrow \begin{cases} 2n + 1 \equiv 0[13] \\ 21n + 4 \equiv 0[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 12[13] \\ 8n \equiv 9[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 12[13] \\ 8n \equiv 48[13] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 6[13]$

4) $A = 21n^2 - 17n - 4; B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

أ. $21n^2 - 17n - 4 = (n - 1)(21n + 4); 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 = (n - 1)(28n^2 + 20n + 3)$

ب. $PGCD(A; B) = (n - 1) \times PGCD(21n + 4; 28n^2 + 20n + 3)$

$PGCD(A; B) = (n - 1) \times PGCD(21n + 4; (14n + 3)(2n + 1))$

بما أن العددين $21n + 4$ و $14n + 3$ أوليان فيما بينهما ، فإن :

$PGCD(A; B) = (n - 1) \times PGCD(21n + 4; 2n + 1)$

و منه نستنتج أن :

- $n = 13k + 6 : PGCD(21n + 4; 2n + 1) = 13 \Rightarrow PGCD(A; B) = 13(n - 1)$
- $n \neq 13k + 6 : PGCD(21n + 4; 2n + 1) = 1 \Rightarrow PGCD(A; B) = n - 1$

التمرين 29 :

1) $11n - 24m = 1 \dots (1)$

أ. $PGCD(11, 24) = 1 \Rightarrow$ المعادلة تقبل على الأقل حلا

ب. $\begin{cases} 11n - 24m = 1 \\ 11(11) - 24(5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11(n - 11) - 24(m - 5) = 0 \Rightarrow 11(n - 11) = 24(m - 5)$

$\begin{cases} 24 \mid 11(n - 11) \\ PGCD(24; 11) = 1 \end{cases} \Rightarrow 24 \mid (n - 11) \Rightarrow n - 11 = 24k \Rightarrow n = 24k + 11; k \in \mathbb{Z}$

$11(24k) = 24(m - 5) \Rightarrow m - 5 = 11k \Rightarrow m = 11k + 5; k \in \mathbb{Z}$

$S = \{(24k + 11; 11k + 5)\}; k \in \mathbb{Z}$

2)

أ. $10 \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11} \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11} - 1 \equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{11} - 1$

$10 \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24} \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24} - 1 \equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{24} - 1$

ب. $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = (10^{11(24k+11)} - 1) - 10(10^{24(11k+5)} - 1)$

$= 10^{264k+121} - 1 - 10^{264k+121} + 10 = 9$

طريقة ثانية :

$11n - 24m = 1 \Rightarrow 11n = 24m + 1 \Rightarrow (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 10^{11n} - 10^{24m+1} + 9 = 9$

$$\begin{aligned} \text{ج. } 10^{11n} - 1 &= (10^{11})^n - 1 = (10^{11} - 1)(10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \dots + 10^{11} + 1) \Rightarrow 10^{11} - 1 \mid 10^{11n} - 1 \\ 10^{24m} - 1 &= (10^{24})^m - 1 = (10^{24} - 1)(10^{24(m-1)} + 10^{24(m-2)} + \dots + 10^{24} + 1) \Rightarrow 10^{24} - 1 \mid 10^{24m} - 1 \\ (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) &= 9 \Rightarrow (10^{11} - 1)(10^{11(n-1)} + \dots + 1) - 10(10^{24} - 1)(10^{24(m-1)} + \dots + 1) = 9 \\ \Rightarrow N &= (10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \dots + 10^{11} + 1) \text{ و } M = (10^{24(m-1)} + 10^{24(m-2)} + \dots + 10^{24} + 1) \end{aligned}$$

$$\text{د. } \begin{cases} d \mid 10^{11} - 1 \\ d \mid 10^{24} - 1 \end{cases} \Rightarrow d \mid (10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M \Rightarrow d \mid 9$$

$$\text{هـ. } \begin{cases} d \mid 9 \\ 9 \mid 10^{11} - 1 \Rightarrow PGCD(10^{11} - 1; 10^{24} - 1) = 9 \\ 9 \mid 10^{24} - 1 \end{cases}$$

التمرين 30 :

$$1) PGCD(x, y) = d \Rightarrow x = dx'; y = dy'; PGCD(x', y') = 1$$

$$PPCM(x, y) = m \Rightarrow m.d = x.y \Rightarrow m.d = d^2.x'.y' \Rightarrow m = d.x'.y' \Rightarrow m^2 = d^2.x'^2.y'^2$$

$$m^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow d^2.x'^2.y'^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow d^2(x'^2.y'^2 - 5) = 2000 \Rightarrow d^2 \mid 2000$$

$$2) 2000 = 2^4 \times 5^3 \Rightarrow 20 - 10 - 5 - 4 - 2 - 1 : \text{ هي القواسم المربعة التامة للعدد 2000}$$

$$3) m^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow m^2 = 5d^2 + 2000$$

$$5 \mid 5d^2 + 2000 \Rightarrow 5 \mid m^2 \Rightarrow 5 \mid m \text{ (لأن 5 عدد أولي)} \Rightarrow m = 5k$$

$$5d^2 = m^2 - 2000 = (5k)^2 - 2000 = 5(5k^2 - 400) \Rightarrow d^2 = 5k^2 - 400 = 5(k^2 - 80) \Rightarrow 5 \mid d^2 \Rightarrow 5 \mid d$$

$$\begin{cases} 5 \mid d \\ d^2 \mid 2000 \end{cases} \Rightarrow d \in \{5; 10; 20\}$$

$$4) d = 5 : m^2 = 5(5)^2 + 2000 = 2125 \text{ (مرفوض لأن العدد 2125 ليس مربع تام)}$$

$$d = 10 : m^2 = 5(10)^2 + 2000 = 2500 \Rightarrow m = 50$$

$$d = 20 : m^2 = 5(20)^2 + 2000 = 4000 \text{ (مرفوض لأن العدد 4000 ليس مربع تام)}$$

$$m = d.x'.y' \Rightarrow x'.y' = \frac{m}{d} = 5 \Rightarrow (x', y') = (1, 5) \Rightarrow (x, y) = (10, 50)$$

التمرين 31 :

$$1) 2006 = 2 \times 17 \times 59$$

$$16x + 59y = 2006 \Rightarrow 16x = 2006 - 59y = 59(34 - y)$$

$$\begin{cases} 59 \mid 16x \\ PGCD(59; 16) = 1 \end{cases} \Rightarrow 59 \mid x \Rightarrow x = 59k ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 16x = 59(34 - y) \Rightarrow 16(59k) = 59(34 - y) \Rightarrow 34 - y = 16k \Rightarrow y = -16k + 34 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(59k ; -16k + 34)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 59k > 0 \\ -16k + 34 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{34}{16} \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 2,125 \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow (x, y) \in \{(59, 18); (118, 2)\}$$

$$4) 16m + 59d = 2006 \Rightarrow \begin{cases} m = 59 \\ d = 18 \end{cases} \text{ (مرفوض لأن 18 لا يقسم 59) } \text{ أو } \begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = m \cdot d = 236 \Rightarrow d^2 \cdot a' \cdot b' = 236 \Rightarrow a' \cdot b' = \frac{236}{4} = 59 \Rightarrow (a', b') \in \{(59, 1); (1, 59)\} \\ \Rightarrow (a, b) \in \{(118, 2); (2, 118)\}$$

التمرين 32 :

$$1) 3^0 \equiv 1[7]; 3^1 \equiv 3[7]; 3^2 \equiv 2[7]; 3^3 \equiv 6[7]; 3^4 \equiv 4[7]; 3^5 \equiv 5[7]; 3^6 \equiv 1[7]$$

$$3^{6k} \equiv 1[7]; 3^{6k+1} \equiv 3[7]; 3^{6k+2} \equiv 2[7]; 3^{6k+3} \equiv 6[7]; 3^{6k+4} \equiv 4[7]; 3^{6k+5} \equiv 5[7]$$

$$4^0 \equiv 1[7]; 4^1 \equiv 4[7]; 4^2 \equiv 2[7]; 4^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 4^{3k} \equiv 1[7]; 4^{3k+1} \equiv 4[7]; 4^{3k+2} \equiv 2[7]$$

$$2) 2006 \equiv 4[7]; 2006^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7] \Rightarrow 2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7]$$

$$1424 \equiv 3[7]; 1424^{6n+1} \equiv 3^{6n+1}[7] \Rightarrow 1424^{6n+1} \equiv 3[7] \Rightarrow 2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 0[7]$$

$$3) u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$$

$$أ. S_n = u_0 + \dots + u_n = (2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \dots + 2 \times 3^n) + (3 + 3 \times 4 + 3 \times 4^2 + \dots + 3 \times 4^n)$$

$$S_n = 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) + 3(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n) = 2\left(\frac{3^{n+1} - 1}{2}\right) + 3\left(\frac{4^{n+1} - 1}{3}\right)$$

$$S_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$$

$$ب. S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$$

$n + 1 =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$	
$3^{n+1} \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$4^{n+1} \equiv$	1	4	2	1	4	2	[7]
$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv$	2	0	4	0	1	0	[7]

$$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7] \Rightarrow n + 1 = 6k \Rightarrow n = 6k - 1; k \in \mathbb{N}^*$$

التمرين 33 :

$$1) 91x + 10y = 1 \dots (1); 91x + 10y = 412 \dots (2)$$

$$أ. 91(1) + 10(-9) = 1 \Rightarrow (1, -9) \text{ الثنائية حل خاص للمعادلة (1)}$$

$$91(412) + 10(-3708) = 412 \Rightarrow (412, -3708) \text{ الثنائية حل خاص للمعادلة (2)}$$

$$ب. \begin{cases} 91x + 10y = 412 \\ 91(412) + 10(-3708) = 412 \end{cases} \Rightarrow 91(x - 412) + 10(y + 3708) = 0 \Rightarrow 91(x - 412) = 10(-y - 3708)$$

$$\begin{cases} 10 \mid 91(x - 412) \\ PGCD(10; 91) = 1 \end{cases} \Rightarrow 10 \mid (x - 412) \Rightarrow x - 412 = 10k \Rightarrow x = 10k + 412; k \in \mathbb{Z}$$

$$91(10k) = 10(-y - 3708) \Rightarrow -y - 3708 = 91k \Rightarrow y = -91k - 3708; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(10k + 412; -91k - 3708)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) A_n = 3^{2n} - 1 = 9^n - 1 ; 9 \equiv 1[8] \Rightarrow 9^n \equiv 1[8] \Rightarrow 9^n - 1 \equiv 0[8] \Rightarrow A_n \equiv 0[8]$$

$$3) A_3x + A_2y = 3296 \Rightarrow 728x + 80y = 3296 \Rightarrow 91x + 10y = 412 \Rightarrow S = \{(10k + 412; -91k - 3708)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10k + 412 \geq 0 \\ -91k - 3708 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq -41,2 \\ k \leq -40,7 \end{cases} \Rightarrow k = -41 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (2, 23)$$

$$(\alpha + \beta)A_2 + 10 = 25 \times 80 + 10 = 2010$$

التمرين 34 :

$$1) 9^0 \equiv 1[11]; 9^1 \equiv 9[11]; 9^2 \equiv 4[11]; 9^3 \equiv 3[11]; 9^4 \equiv 5[11]; 9^5 \equiv 1[11]$$

$$9^{5k} \equiv 1[11]; 9^{5k+1} \equiv 9[11]; 9^{5k+2} \equiv 4[11]; 9^{5k+3} \equiv 3[11]; 9^{5k+4} \equiv 5[11]$$

$$2) 1431 \equiv 1[11] \Rightarrow 1431^n \equiv 1[11]; 1993 \equiv -9[11] \Rightarrow 1993^{10n} \equiv 9^{5(2n)}[11] \Rightarrow 1993^{10n} \equiv 1[11]$$

$$2011 \equiv 9[11] \Rightarrow 2011^{5n+1} \equiv 9^{5n+1}[11] \Rightarrow 2011^{5n+1} \equiv 9[11]$$

$$1431^n + 1993^{10n} + 2011^{5n+1} \equiv 0[11]$$

$$3) \begin{cases} 1431^n + 5n + 2011^{5n+1} \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n + 10 \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n \equiv 1[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 9[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 90 < 11k + 9 < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 7,36 < k < 8,27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ k = 8 \end{cases} \Rightarrow n = 97$$

التمرين 35 :

$$1) B(1; 3; 5); \vec{n}(-2; 1; 1); (Q): x - 2y + 4z - 9 = 0$$

$$\vec{n}(-2; 1; 1); \vec{n'}(1; -2; 4); \vec{n} \cdot \vec{n'} = -2 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

$$2) d(B; (\Delta)) = d(B; (Q)) = \frac{|1 - 2(3) + 4(5) - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

$$3) M(x; y; z) \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow -2(x - 1) + (y - 3) + (z - 5) = 0 \Rightarrow -2x + y + z - 6 = 0$$

$$4) (\Delta): \begin{cases} x = 2k - 5 \\ y = 3k - 5 \\ z = k + 1 \end{cases}; k \in \mathbb{R}; A(-9; -4; -1)$$

$$أ. -2(-9) - 4 - 1 - 6 = 7 \Rightarrow A \notin (P); -9 - 2(-4) + 4(-1) - 9 = -14 \Rightarrow A \notin (Q)$$

$$ب. AM^2 = (2k - 5 + 9)^2 + (3k - 5 + 4)^2 + (k + 1 + 1)^2 = (2k + 4)^2 + (3k - 1)^2 + (k + 2)^2 \\ = 4k^2 + 16k + 16 + 9k^2 - 6k + 1 + k^2 + 4k + 4 = 14k^2 + 14k + 21 = 7(2k^2 + 2k + 3)$$

$$ج. f(k) = 2k^2 + 2k + 3$$

$$\bullet f'(k) = 4k + 2 = 2(2k + 1)$$

$$k < -\frac{1}{2}: f'(k) < 0 \Rightarrow f(k) \text{ متناقصة}; k \geq -\frac{1}{2}: f'(k) \geq 0 \Rightarrow f(k) \text{ متزايدة}$$

$$\bullet AM \text{ أصغرية} \Rightarrow f'(k) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$د. PGCD(2k - 5; 3k - 5) = d$$

- $d \mid 2k - 5$ و $d \mid 3k - 5 \Rightarrow d \mid 2(3k - 5) - 3(2k - 5) \Rightarrow d \mid 5$
- $d = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2k - 5 \equiv 0[5] \\ 3k - 5 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k \equiv 5[5] \\ 3k \equiv 5[5] \end{cases} \Rightarrow k \equiv 0[5] \Rightarrow k = 5\alpha ; \alpha \in \mathbb{N}$

مجموعة النقط M من المستقيم (Δ) التي تكون إحداثياتها أعدادا طبيعية هي : $M(10\alpha - 5; 15\alpha - 5; 5\alpha + 1)$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$
أول حل طبيعي هو : $M_0(5; 10; 6)$.

التمرين 36 :

$$\begin{cases} a = 5n + 3 \\ b = 2n + 1 \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

1) $2a - 5b = 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 1$ (ببزو)

2) $x = 5m + 3 ; y = 2m - 1 ; m \in \mathbb{N}$

أ. $2x - 5y = 11$

ب. $PGCD(x, y) = d$

- $d \mid x$ و $d \mid y \Rightarrow d \mid 2x - 5y \Rightarrow d \mid 11 \Rightarrow d = 1$ أو $d = 11$
- $d = 11 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[11] \\ y \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m + 3 \equiv 0[11] \\ 2m - 1 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m \equiv 8[11] \\ 2m \equiv 1[11] \end{cases} \Rightarrow m \equiv 6[11] \Rightarrow m = 11k + 6$
 $\Rightarrow x = 5(11k + 6) + 3 = 55k + 33 ; y = 2(11k + 6) - 1 = 22k + 11 ; k \in \mathbb{N}$

التمرين 37 :

1) $4 \equiv -1[5] \Rightarrow 4^{2n} \equiv 1[5]$

2) $3^0 \equiv 1[5] ; 3^1 \equiv 3[5] ; 3^2 \equiv 4[5] ; 3^3 \equiv 2[5] ; 3^4 \equiv 1[5]$

$3^{4k} \equiv 1[5] ; 3^{4k+1} \equiv 3[5] ; 3^{4k+2} \equiv 4[5] ; 3^{4k+3} \equiv 2[5]$

3) $1428 \equiv 3[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{2009}[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{4(502)+1}[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3[5]$

4) $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$

$A_n \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n \equiv 2[5] \Rightarrow n = 4k + 3 ; k \in \mathbb{N}$

التمرين 38 :

1) $23x - 17y = 6$

$23(1) - 17(1) = 6 \Rightarrow 23(x - 1) - 17(y - 1) = 0 \Rightarrow 23(x - 1) = 17(y - 1)$

$\begin{cases} 17 \mid 23(x - 1) \\ PGCD(17; 23) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17 \mid (x - 1) \Rightarrow x - 1 = 17k \Rightarrow x = 17k + 1$

$23(x - 1) = 17(y - 1) \Rightarrow 23(17k) = 17(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 23k \Rightarrow y = 23k + 1$

$S = \{(17k + 1 ; 23k + 1)\} ; k \in \mathbb{Z}$

2) $A = 23x + 2 = 17y + 8 \Rightarrow 23x - 17y = 6 \Rightarrow (x; y) = (17k + 1 ; 23k + 1)$

- $k = 0 : (x; y) = (1; 1); A = 25 = \overline{34}_7$
- $k = 1 : (x; y) = (18; 24); A = 416 = \overline{1133}_7$
- $k = 2 : (x; y) = (35; 47); A = 807 = \overline{2232}_7$

التمرين 39 :

$$1) 7^0 \equiv 1[10]; 7^1 \equiv 7[10]; 7^2 \equiv 9[10]; 7^3 \equiv 3[10]; 7^4 \equiv 1[10];$$

$$7^{4k} \equiv 1[10]; 7^{4k+1} \equiv 7[10]; 7^{4k+2} \equiv 9[10]; 7^{4k+3} \equiv 3[10]$$

$$7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10] \Rightarrow 7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]$$

$$2) S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$$

- $S_{n+4} - S_n = 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4} \Rightarrow S_{n+4} - S_n \equiv 0[10] \Rightarrow S_{n+4} \equiv S_n[10]$
- $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$
 - ✓ $n = 4k : S_n \equiv 1[10]$
 - ✓ $n = 4k + 1 : S_n \equiv 8[10]$
 - ✓ $n = 4k + 2 : S_n \equiv 7[10]$
 - ✓ $n = 4k + 3 : S_n \equiv 0[10]$

التمرين 40 :

$$1) N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12} = 10 + 12 + 11 \times 12^2 = 1606$$

$$2) N_2 = 1131 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3 = \overline{7 \alpha 3}^{12}$$

$$3) \text{أ)} N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{12} = a_0 + \underbrace{a_1 \times 12}_{\equiv 0[12]} + \dots + \underbrace{a_n \times 12^n}_{\equiv 0[12]} \Rightarrow N \equiv a_0[12]$$

$$\Rightarrow N = 12k + a_0 = 3(4k) + a_0 = 3k' + a_0 \Rightarrow N \equiv a_0[3]$$

نتيجة : يقبل عدد القسمة على 3 إذا كان رقم أحاده في النظام ذي الأساس 12 مضاعفا لـ 3

$$N_2 = \overline{7 \alpha 3}^{12} \Rightarrow N_2 \equiv 3[3] \Rightarrow N_2 \equiv 0[3] \quad (1131 = 3 \times 377)$$

$$\text{ب)} 12 \equiv 1[11] \Rightarrow 12^p \equiv 1[11] \Rightarrow a_p 12^p \equiv a_p[11]$$

$$N = a_0 + a_1 \times 12 + \dots + a_n \times 12^n \Rightarrow N \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n[11]$$

نتيجة : يقبل عدد القسمة على 11 إذا كان مجموع أرقامه في النظام ذي الأساس 12 مضاعفا لـ 11

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}; \beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22 = 2 \times 11 \Rightarrow N_1 \equiv 0[11] \quad (1606 = 11 \times 146)$$

$$4) N = \overline{x 4 y}^{12}; N \equiv 0[33] \Rightarrow \begin{cases} N \equiv 0[3] \\ N \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \equiv 0[3] \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in \{0; 3; 6; 9\} \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases}$$

- $y = 0: x + 4 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 7[11] \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (x; y) = (7; 0)$
- $y = 3: x + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 4[11] \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (x; y) = (4; 3)$
- $y = 6: x + 10 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 1[11] \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (x; y) = (1; 6)$
- $y = 9: x + 2 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 9[11] \Rightarrow x = 9 \Rightarrow (x; y) = (9; 9)$

$$8x + 5y = 1 \dots (E)$$

1) $8(2) + 5(-3) = 1 \Rightarrow (E)$ الثنائية حل خاص للمعادلة

$$8(x - 2) + 5(y + 3) = 0 \Rightarrow 8(x - 2) = 5(-y - 3)$$

$$\begin{cases} 5/8(x - 2) \\ PGCD(5; 8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5/(x - 2) \Rightarrow x - 2 = 5k \Rightarrow x = 5k + 2$$

$$8(5k) = 5(-y - 3) \Rightarrow -y - 3 = 8k \Rightarrow y = -8k - 3$$

$$S = \{(5k + 2; -8k - 3)\}; k \in \mathbb{Z}$$

2) $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

أ. $8a = N - 1; 5b = N - 2; 8a - 5b = N - 1 - N + 2 = 1 \Rightarrow (E)$ الثنائية حل للمعادلة

ب. $a = 5k + 2 \Rightarrow N = 8(5k + 2) + 1 = 40k + 17 \Rightarrow N \equiv 17[40]$

3) $8x + 5y = 100; 8(200) + 5(-300) = 100 \Rightarrow S = \{(5k + 200; -8k - 300)\}; k \in \mathbb{Z}$

4) $\begin{cases} 8x + 5y = 100 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k + 200 > 0 \\ -8k - 300 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -40 \\ k < -37,5 \end{cases} \Rightarrow k \in \{-38, -39\} \Rightarrow (x, y) \in \{(10, 4); (5, 12)\}$

1) $(2n + 1) - 2(n) = 1 \Rightarrow PGCD(n, 2n + 1) = 1$ (بيزو)

2) $\alpha = n + 3; \beta = 2n + 1; PGCD(\alpha, \beta) = d$

أ. $d/\alpha, d/\beta \Rightarrow d/2\alpha - \beta \Rightarrow d/5$

ب. $\begin{cases} \alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 3 \equiv 0[5] \\ 2n + 1 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 2[5] \\ 2n \equiv 4[5] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 2[5] \Rightarrow n - 2 \equiv 0[5]$

3) $a = n^3 + 2n^2 - 3n = (n - 1)(n^2 + 3n); b = 2n^2 - n - 1 = (n - 1)(2n + 1)$

4) $PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] = d'$

أ. $d/n + 3, d/2n + 1 \Rightarrow d/n(n + 3) \text{ و } d/2n + 1 \Rightarrow d/PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] \Rightarrow d/d'$
 $d'|n(n + 3) \text{ و } d'|2n + 1 \Rightarrow d'|n + 3 \text{ و } d'|2n + 1 \Rightarrow d'|PGCD(n + 3, 2n + 1) \Rightarrow d'|d$
 $d/d' \text{ و } d'/d \Rightarrow d = d'$

ب. $PGCD(a, b) = (n - 1)PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] = (n - 1)d' = (n - 1)d$

• $n = 5k + 2 : d = 5 \Rightarrow PGCD(a, b) = 5(n - 1)$

• $n \neq 5k + 2 : d = 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = n - 1$

ج. $n = 2001 = 5(400) + 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 2001 - 1 = 2000$

$n = 2002 = 5(400) + 2 \Rightarrow PGCD(a, b) = 5(2002 - 1) = 5 \times 2001 = 10005$