

الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية

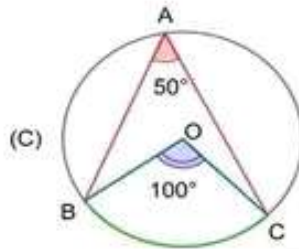
الزاوية المركزية: هي زاوية رأسها هو مركز الدائرة.
الزاوية المحيطية: هي زاوية رأسها نقطة من محيط الدائرة و ضلعاها وتران للدائرة.

خاصية:

إذا كانت الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية في دائرة تحصران نفس القوس فإن:
قيس الزاوية المحيطية = نصف قيس الزاوية المركزية.

مثال:

الزاوية المحيطية $\hat{BAC}$ و الزاوية المركزية $\hat{BOC}$ تحصران نفس القوس BC



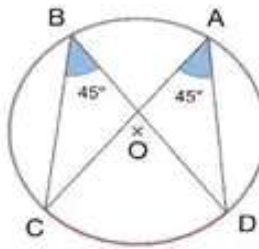
$$\hat{BAC} = \frac{1}{2} \hat{BOC} \quad \text{إذن:}$$

خاصية:

إذا كانت زاويتان محيطيتان في دائرة تحصران نفس القوس فإن: لهما نفس القيس.

مثال:

الزاويتان المحيطيتان $\hat{CAD}$ و $\hat{CBD}$ تحصران نفس القوس CD



$$\hat{CAD} = \hat{CBD} \quad \text{إذن:}$$

ملاحظة: تلخيص الأستاذ بركان عبد الإله.

النسبة المئوية

❖ تحديد عبارة الدالة الخطية المنمذجة للوضعية التناسبية:

- نحسب معامل الدالة الخطية a حسب الوضعية المعطاة.
- $a = P\%$ في حالة الأخذ:
 - $a = 1 + P\%$ في حالة الزيادة:
 - $a = 1 - P\%$ في حالة التخفيض:
 - $a = \frac{\text{الجديد}}{\text{القديم}}$ بدلالة الجديد و القديم:

❖ حساب المقدار الجديد أو القديم:

1. تعطى لنا النسبة المئوية.
2. نحسب المعامل a باختيار أحد القوانين الثلاثة:
3. ثم نطبق القانون: القديم $\times a =$ الجديد

مثال 1:

سعر حذاء 1500DA زاد سعره بـ 20%.

1. أوجد عبارة الدالة الخطية f المنمذجة لهذه الوضعية.
2. أوجد سعر الحذاء بعد الزيادة.

الحل:

إيجاد عبارة الدالة الخطية:

$$a = 1 + P\% = 1 + 0.2 = 1.2$$

عبارة الدالة الخطية هي: $f(x) = 1.2x$

إيجاد سعر الحذاء بعد الزيادة:

$$1.2 \times 1500 = 1800 \text{DA}$$

❖ حساب النسبة المئوية:

1. نحسب المعامل a عبر القانون: $a = \frac{\text{الجديد}}{\text{القديم}}$
2. نقارن a بالعدد 1.

مثال 1:

سعر حاسوب 45000DA أصبح سعره بعد الزيادة 54000DA.

- أحسب نسبة الزيادة في سعره.

الحل:

$$a = \frac{\text{الجديد}}{\text{القديم}} = \frac{54000}{45000} = 1.2$$

$$P\% = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$$

مثال 2:

سعر كتاب 2000DA أصبح سعره بعد الزيادة 1800DA.

- أحسب نسبة التخفيض في سعره.

الحل:

$$a = \frac{\text{الجديد}}{\text{القديم}} = \frac{1800}{2000} = 0.9$$

$$P\% = 1 - 0.9 = 0.1 = 10\%$$

❖ المتطابقات الشهيرة (جداء مجموع حدين و فرقهما):

نجد طرفين بينهما عملية طرح (-) .

أمثلة:

$B = 25x^2 - 3$ $B = (5x)^2 - (\sqrt{3})^2$ $B = (5x + \sqrt{3})(5x - \sqrt{3})$	$A = 9x^2 - 16$ $A = (3x)^2 - 4^2$ $A = (3x + 4)(3x - 4)$
$C = 9 - (4x + 5)^2$ $C = (3)^2 - (4x + 5)^2$ $C = [3 + (4x + 5)][3 - (4x + 5)]$ $C = [3 + 4x + 5][3 - 4x - 5]$ $C = [4x + 3 + 5][-4x + 3 - 5]$ $C = (4x + 8)(-4x - 2)$	$D = (3x - 1)^2 - (7x + 2)^2$ $D = [(3x - 1) + (7x + 2)][(3x - 1) - (7x + 2)]$ $D = [3x - 1 + 7x + 2][3x - 1 - 7x - 2]$ $D = [3x + 7x - 1 + 2][3x - 7x - 1 - 2]$ $D = (10x + 1)(-4x - 3)$

❖ معادلة الجداء المعلوم:

إذا كان: $(ax + b)(cx + d) = 0$ فإن: $ax + b = 0$ أو $cx + d = 0$

أمثلة:

$8(3x - 1) = 0$ $3x - 1 = 0$ $3x = 1$ $x = \frac{1}{3}$ للمعادلة حل وحيد $\frac{1}{3}$	$9x(-4x + 12) = 0$ $9x = 0$ أو $x - 4 + 12 = 0$ $x = 0$ أو $x - 4 = -12$ $x = 0$ أو $x = -12 + 4 = -8$ للمعادلة حلان هما 0 و -8	$(5x - 1)(2x + 3) = 0$ $5x - 1 = 0$ أو $x + 2 + 3 = 0$ $5x = 1$ أو $x + 2 = -3$ $x = \frac{1}{5}$ أو $x = -3 - 2 = -5$ للمعادلة حلان هما $\frac{1}{5}$ و -5
--	---	---

تحليل عبارة جبرية

❖ العامل المشترك:

استخراج العامل المشترك (إشارة، عدد، حرف) و كتابة ما تبقى بين قوسين.

مثال:

$$-18x - 27 = -9 \times 2 \times x - 9 \times 3 = -9(2x + 3)$$

$$-35x^2 - 50x = -5 \times 7x^2 - 5 \times 10x = -5x(7x + 10)$$

$$42x^3 - 24x^2 + 12x = 6 \times 7 \times x^3 - 6 \times 4 \times x^2 + 6 \times 2 \times x = 6x(7x^2 - 4x + 2)$$

❖ قوس مشتركة:

1. استخراج القوس المشتركة و الإبقاء على بقية الأقواس أو الأطراف بين عارضتين.
2. تبسيط ما بداخل العارضتين.

أمثلة:

$C = (3x + 5)(4x + 7) + (3x + 5)$ $C = (3x + 5)[(4x + 7) + 1]$ $C = (3x + 5)[4x + 7 + 1]$ $C = (3x + 5)(4x + 8)$	$B = 8x(6x - 10) + 5(6x - 10)$ $B = (6x - 10)(8x + 5)$	$A = (2x + 1)(x + 3) - (2x + 1)(7x - 5)$ $A = (2x + 1)[(x + 3) - (7x - 5)]$ $A = (2x + 1)[x + 3 - 7x - 5]$ $A = (2x + 1)[x - 7x + 3 - 5]$ $A = (2x + 1)(-6x - 2)$
	$E = (28x - 20)(x + 3) - (7x - 5)(3x + 18)$ $E = 4(7x - 5)(x + 3) - (7x - 5)(3x + 18)$ $E = (7x - 5)[4(x + 3) - (3x + 18)]$ $E = (7x - 5)[4x + 12 - 3x - 18]$ $E = (7x - 5)[4x - 3x + 12 - 18]$ $E = (7x - 5)(x - 6)$	$D = (4x + 9)^2 + (4x + 9)(3x - 1)$ $D = (4x + 9)(4x + 9) + (4x + 9)(3x - 1)$ $D = (4x + 9)[(4x + 9) + (3x - 1)]$ $D = (4x + 9)[4x + 9 + 3x - 1]$ $D = (4x + 9)[4x + 3x + 9 - 1]$ $D = (4x + 9)(7x + 8)$

❖ المتطابقات الشهيرة (مربع مجموع - مربع فرق):

نجد ثلاث أطراف (درجة ثانية - درجة أولى - عدد طبيعي).

أمثلة:

$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ $F = 25x^2 - 40x + 16$ $F = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 4 + 4^2$ $F = (5x - 4)^2$	$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$ $E = 9x^2 + 12x + 4$ $E = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + (2)^2$ $E = (3x + 2)^2$
--	--

الحل:

$$\begin{aligned}187 &= 119 \times 1 + 68 \\119 &= 68 \times 1 + 51 \\68 &= 51 \times 1 + 17 \\51 &= 17 \times 3 + 0\end{aligned}$$

$$\text{PGCD}(187; 119) = 17$$

$$\frac{187 \div 17}{119 \div 17} = \frac{11}{7}$$

- الاختزال:

2. حساب عدد الأشجار أو عدد الأعمدة:

مثال:

يملك فلاح مزرعة مستطيلة الشكل بعدها 112m و 98m .
يريد الفلاح غرس أشجار صنوبر حول المزرعة على أن يغرس شجرة في كل ركن و تكون المسافة الفاصلة بين شجرتين متتاليتين ثابتة.
- ما هو أقل عدد من الأشجار التي يجب على الفلاح غرسها ؟

الحل:

$$\text{عدد الأشجار} = \frac{\text{المحيط الكلي}}{\text{المسافة بين كل شجرتين}}$$

$$\text{PGCD}(112; 98) = 14$$

المسافة بين كل شجرتين هي 14m.

$$P = 112 + 98 + 112 + 98 = 420m$$

* حساب المحيط الكلي:

* حساب عدد الأشجار:

$$n = \frac{420}{14} = 30 \quad \text{نرمز لعدد الأشجار بـ } n \quad \text{عدد الأشجار هو 30 شجرة.}$$

3. حساب عدد المربعات أو البلاطات:

مثال:

يريد عمر تبليط حجرة طولها 4,5m و 3m باستعمال بلاطات مربعة متماثلة.
- احسب عدد البلاطات المستعملة.

الحل:

$$\text{عدد البلاطات} = \frac{\text{المساحة الكلية}}{\text{مساحة البلاطة الواحدة}}$$

* التحويل:

$$\begin{aligned}4,5 \text{ m} &= 45 \text{ dm} \\3 \text{ m} &= 30 \text{ dm}\end{aligned}$$

* حساب مساحة البلاطة الواحدة:

$$\text{PGCD}(45; 30) = 15 \text{ dm}$$

$$S = 15 \times 15 = 225 \text{ dm}^2$$

طول ضلع البلاطة الواحدة هو 15 dm.

مساحة البلاطة الواحدة هي 225 dm².

* حساب مساحة الحجرة:

$$S = 30 \times 45 = 1350 \text{ dm}^2$$

مساحة الحجرة هي 1350 dm².

* حساب عدد البلاطات:

$$n = \frac{1350}{225} = 6 \quad \text{نرمز لعدد البلاطات بـ } n \quad \text{عدد البلاطات هو 6 بلاطات.}$$

القاسم المشترك الأكبر

تعريف:

القاسم المشترك الأكبر (بالإنجليزية: Greatest common divisor) لعددين هو أكبر عدد يقسم في نفس الوقت العددين معاً بدون أي باقي قسمة.

طرق حساب القاسم المشترك الأكبر: إثبات أن العددين ليسا أوليان فيما بينهما:

حالة 1: نثبت أن العددين يقبلان القسمة على 2 أو 3 أو 5. (دون حساب)
حالة 2: نحسب القاسم المشترك الأكبر و نجده مختلف عن 1. (حساب)

1. القواسم المشتركة.
2. عملية الطرح المتتالي.
3. القسمة الإقليدية.

<u>القسمة الإقليدية:</u>	<u>عملية الطرح المتتالي:</u>	<u>القواسم المشتركة:</u>
حساب القاسم المشترك للعددين 468 و 528:	حساب القاسم المشترك للعددين 1575 و 3465:	حساب القاسم المشترك للعددين 48 و 60:
$528 = 468 \times 1 + 60$ $468 = 60 \times 7 + 48$ $60 = 48 \times 1 + 12$ $48 = 12 \times 4 + 0$	$3465 - 1575 = 1890$ $1890 - 1575 = 315$ $1575 - 315 = 945$ $945 - 315 = 630$ $630 - 315 = 315$ $315 - 315 = 0$	$48 = 1 \times 48$ $48 = 2 \times 24$ $48 = 3 \times 16$ $48 = 4 \times 12$ $48 = 6 \times 8$ قواسم العدد 48 هي: 1، 2، 3، 4، 6، 8، 12، 16، 24، 48.
PGCD (468; 528) = 12	PGCD (3465; 1575) = 315	$60 = 1 \times 60$ $60 = 2 \times 30$ $60 = 3 \times 20$ $60 = 4 \times 15$ $60 = 5 \times 12$ $60 = 6 \times 10$ قواسم العدد 60 هي: 1، 2، 3، 4، 5، 6، 10، 12، 15، 20، 30، 60.
		PGCD (48; 60) = 12

طرق استعمال القاسم المشترك الأكبر:

1. اختزال الكسور و حساب عبارات جبرية:

مثال:

- اكتب العدد $\frac{187}{119}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

- احسب العبارة A حيث: $A = \frac{20}{7} - \frac{187}{119}$

قوانين تربط بين النسب المثلثية:

- بمعرفة $\cos \alpha$ يمكن إيجاد $\sin \alpha$ (أو العكس). $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- بمعرفة كل من $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$ يمكن إيجاد $\tan \alpha$. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

مثال:

ABC مثلث قائم حيث: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- احسب كل من $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$.

الحل:

- حساب $\sin \alpha$:

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

$$(\sin \alpha)^2 = 1 - (\cos \alpha)^2$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{3}{4}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{1}{2}}$$

- حساب $\tan \alpha$:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

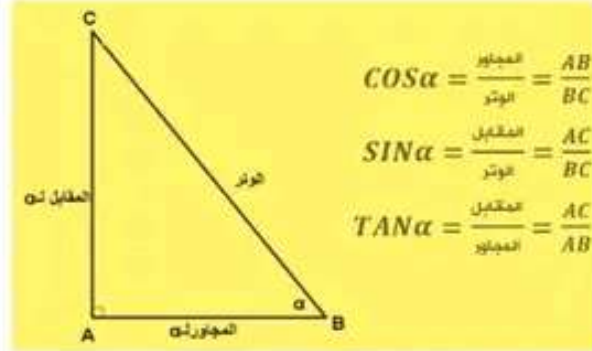
$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

النسب المثلثية

القوانين:



جيب تمام زاوية حادة = $\frac{\text{طول المجاور}}{\text{طول الوتر}}$ و نرمز له بـ Cos

جيب زاوية حادة = $\frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول الوتر}}$ و نرمز له بـ Sin

ظل زاوية حادة = $\frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول المجاور}}$ و نرمز له بـ Tan

شرطها:

- أن يكون المثلث المعطى قائماً.

هدفها:

- حساب قيس زاوية. (يجب توفر ضلعين)
- حساب طول أحد أضلاع المثلث القائم. (يجب توفر زاوية + ضلع)

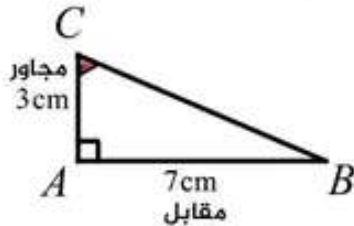
خطوات الحل:

1. نحدد الزاوية و الضلعين المقصودين.
2. نضع القانون المناسب ثم نعوض عددياً.

حساب قيس زاوية:

ABC مثلث قائم في A حيث: AC=3cm ، AB=7cm
- اوجد $\hat{ACB}$.

الحل:



$$\tan \hat{ACB} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan \hat{ACB} = \frac{7}{3}$$

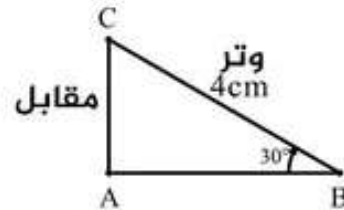
$$\tan \hat{ACB} = 2,33$$

$$\text{shift} \rightarrow \tan \rightarrow 2,33 \rightarrow \hat{ACB} = 67$$

حساب طول ضلع:

ABC مثلث قائم في A حيث: $\hat{ABC} = 30^\circ$ و BC=4cm
- احسب الطول AC.

الحل:



$$\sin \hat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AC}{4}$$

$$AC = \frac{4 \times \sin 30^\circ}{1}$$

$$\boxed{AC = 2cm}$$

خاصية طالس العكسية

تعريف :

المستقيمان (d) و (d') متقاطعان في النقطة A .
و B' و C' نقطتان من (d') و B و C نقطتان من (d) .

إذا كان:

1- النقط A, B, B', C, C', A على استقامة واحدة وبنفس الترتيب.

$$-2 \quad \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

فإن: $(B'C') \parallel (BC)$

هدفها:

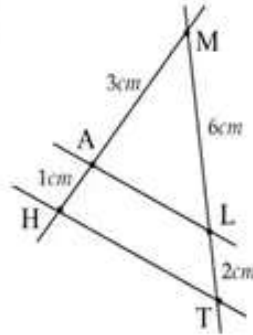
إثبات التوازي.

شرطها:

إستقامة النقط و اتباعها نفس الترتيب.

مثال:

هل $(AL) \parallel (HT)$ ؟



الحل:

لدينا: النقط M, L, T و النقط H, A, M على استقامة واحدة و بنفس الترتيب.

بتطبيق خاصية طالس العكسية نجد:

$$\frac{MA}{MH} = \frac{ML}{MT} \quad \text{فإن:} \quad \begin{cases} \frac{MA}{MH} = \frac{3}{4} \\ \frac{ML}{MT} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

نستنتج أن: $(AL) \parallel (HT)$

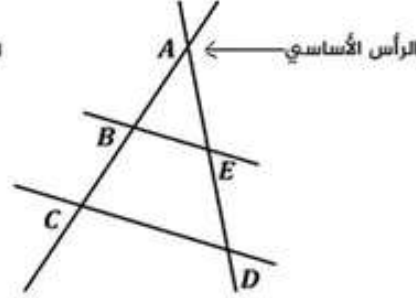
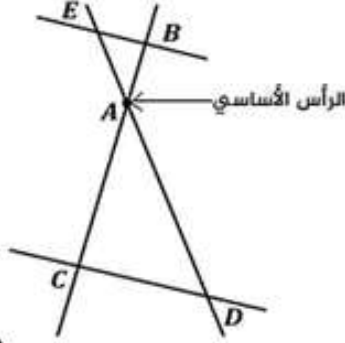
خاصية طالس

تعريف :

المستقيمان (BC) و (ED) متقاطعان في النقطة A .

إذا كان المستقيمان $(BE) \parallel (CD)$

فإن : $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$



هدفها:

- حساب طول أحد الأضلاع.
- حساب أحد النسب المثلثية (كسر من الكسور).

شرطها:

التوازي. (إذا لم يعط في نص التمرين، نثبتته بإحدى طرق إثبات التوازي).

مثال:

$(BE) \parallel (CD)$

- بين أن $\frac{BE}{CD} = \frac{1}{3}$

الحل:

لدينا: $(BE) \parallel (CD)$

بتطبيق خاصية طالس نجد:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD} \\ \frac{5}{15} &= \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD} \\ \frac{5}{15} &= \frac{BE}{CD} \\ \frac{BE}{CD} &= \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

مثال:

$(AB) \parallel (DC)$

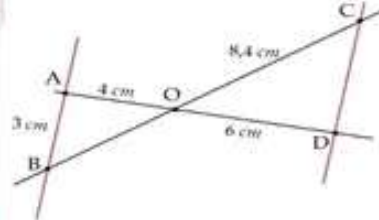
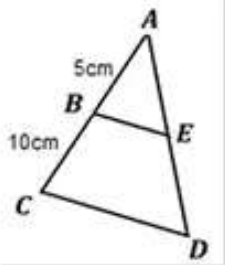
- احسب الطول OB .

الحل:

لدينا: $(AB) \parallel (DC)$

بتطبيق خاصية طالس نجد:

$$\begin{aligned} \frac{OA}{OD} &= \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC} \\ \frac{4}{6} &= \frac{OB}{8.4} = \frac{3}{DC} \\ OB &= \frac{4 \times 8.4}{6} \\ OB &= 5.6 \text{ cm} \end{aligned}$$



خاصية فيثاغورس العكسية

تعريف :

إذا كان في مثلث مربع الضلع الأكبر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين فإن المثلث قائم.

هدفها:

إثبات أن المثلث قائم.

شرطها:

أن يكون عندك مثلث + معرفة جميع أطوال أضلاعه.

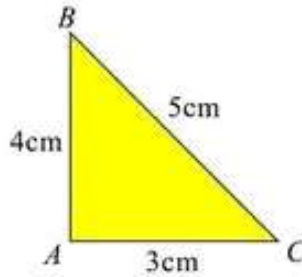
خطواتها:

1. نربع الضلع الأكبر (وحده).
2. نربع الضلعين الصغيرين (معاً) ثم نجمعهما.
3. نقارن النتيجتين فإذا كانتا متساويتين فالمثلث قائم.

مثال:

ABC مثلث حيث: $BC=5\text{ cm}$ ، $AC=3\text{ cm}$ ، $AB=4\text{ cm}$

- بيّن أن المثلث ABC قائم في A.



الحل:

لدينا: ABC مثلث.

بتطبيق خاصية فيثاغورس العكسية نجد:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{فإن} \quad \begin{cases} BC^2 = 5^2 = 25 \\ AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \end{cases}$$

نستنتج أن المثلث ABC مثلث قائم في A.

خاصية فيثاغورس

تعريف :

إذا كان مثلث قائما، فإن مربع طول وتره يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه الآخرين.

هدفها:

حساب طول الوتر أو طول أحد الضلعين القائمين.

شرطها:

أن يكون المثلث المعطى قائما.

ملاحظة:

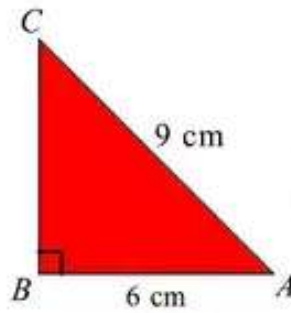
$$^2\text{طول الوتر} = ^2\text{الضلع القائم} + ^2\text{الضلع القائم}$$

$$^2\text{ضلع القائم} = ^2\text{الوتر} - ^2\text{الضلع القائم}$$

مثال:

ABC مثلث قائم في B حيث: AB=6 cm ، AC= 9cm

▪ احسب طول الضلع BC.



الحل:

لدينا : ABC مثلث قائم في B.

بتطبيق خاصية فيثاغورس نجد:

$$BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$BC^2 = 9^2 - 6^2$$

$$BC^2 = 81 - 36$$

$$BC^2 = 45$$

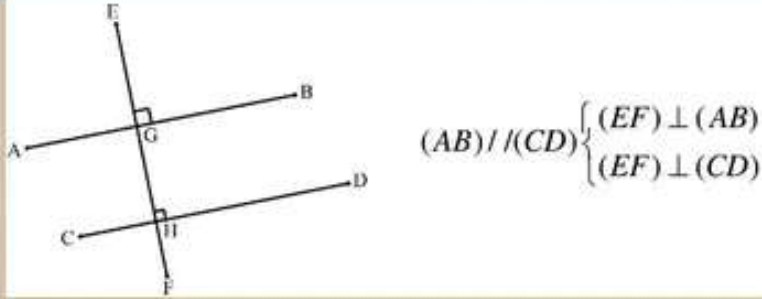
$$BC = \sqrt{45}$$

$$BC = 6.71cm$$

طرق إثبات التوازي

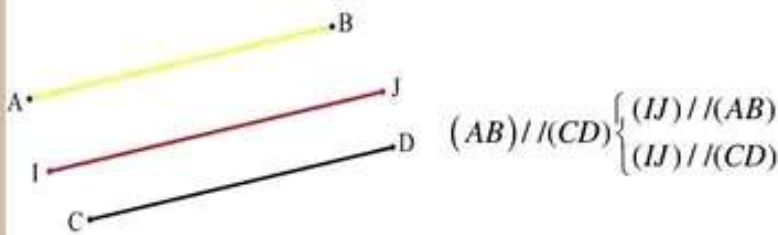
طريقة 1:

المستقيمان العموديان على نفس المستقيم هما مستقيمان متوازيان .



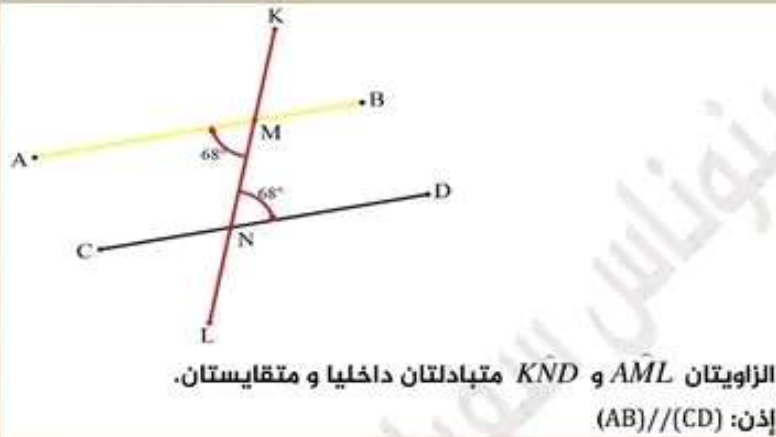
طريقة 2:

إذا كان مستقيمان متوازيان، فإن كل مستقيم يوازي أحدهما فهو يوازي الآخر.



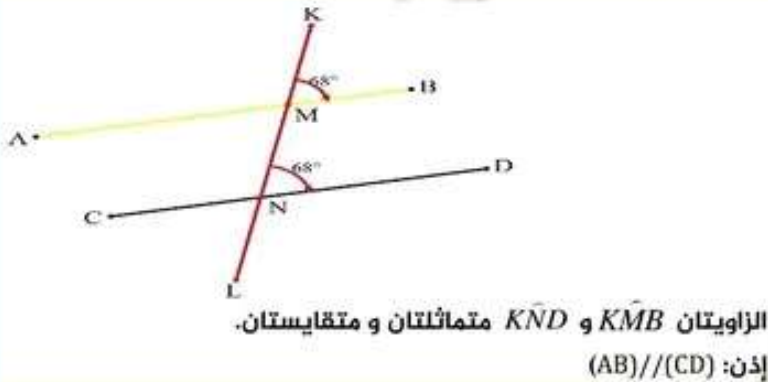
طريقة 3:

حتى يتوازي مستقيمان، يكفي أن يشكل معهما قاطع زاويتين متبادلتين داخليا متقايسيتين.



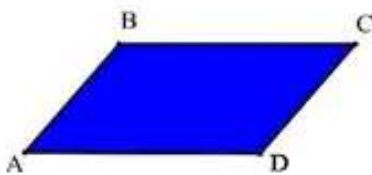
طريقة 3:

حتى يتوازي مستقيمان، يكفي أن يشكل معهما قاطع زاويتين متماثلتين متقايسيتين.



طريقة 4:

في متوازي الأضلاع (كفي، مستطيل، مربع) كل ضلعين متقابلين حاملهما متوازيان.



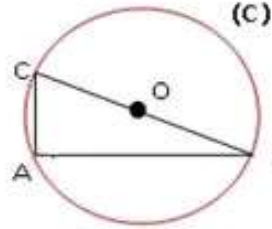
طرق إثبات أن المثلث قائم

الدائرة المحيطة بمثلث قائم:

إذا كان أحد أضلاع مثلث قطرا للدائرة المحيطة به و جميع نقاطه تنتمي إلى محيط الدائرة فإن المثلث قائم.

الحل:

بما أن $[CB]$ قطر للدائرة و النقط A, B, C تنتمي إلى محيط الدائرة (C) ، فإن ABC مثلث قائم في A.



مثال:

- بين أن ABC مثلث قائم في A.

المتوسط المتعلق بوتر في مثلث قائم:

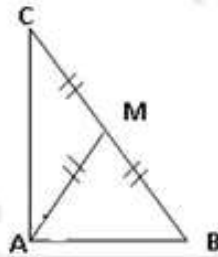
إذا كان في مثلث طول المتوسط يساوي نصف طول الضلع المتعلق به فإن هذا المثلث قائم و نعتبر الضلع وترًا.

الحل:

AM متوسط متعلق بالضلع $[BC]$.

$$AM = \frac{BC}{2} \text{ و}$$

وعليه: ABC مثلث قائم في A.



مثال:

AM=2cm و BC=4cm.

- بين أن ABC مثلث قائم في A.

المماس في الدائرة:

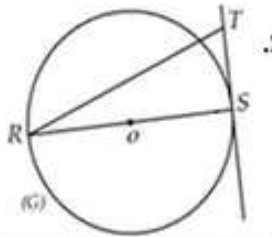
إذا تقاطع مماس الدائرة مع قطرها في نقطة ما، فإنهما يشكلان زاوية قائمة.

الحل:

المماس (ST) يتقاطع مع القطر $[SR]$ في النقطة S.

و منه: $(ST) \perp (SR)$

نستنتج أن RST مثلث قائم في S.



مثال:

- بين أن RST مثلث قائم في S.

مستقيم عمودي على مستقيمين متوازيين:

إذا عامد مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه حتما سوف يعامد المستقيم الآخر.

الحل:

مثال: لديك: $(AD) \parallel (BC)$

- بين أن ABC مثلث قائم في B.

$$(AB) \perp (BC) \left\{ \begin{array}{l} (AD) \parallel (BC) \\ (AD) \perp (AB) \end{array} \right.$$

نستنتج أن ABC مثلث قائم في B.

