

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5 نقاط)

يحتوي كيس على  $n$  كرة سوداء ( $n \geq 2$ ) وثلاث كرات بيضاء، لا نفرق بينها عند اللمس .  
(1) نسحب من الكيس عشوائيا كرتين في أن واحد .

(أ) أحسب احتمال الحوادث التالية "  $A$  الكرتين المسحوبتين من اللون الأبيض "  
"  $B$  سحب على الأقل كرة واحدة بيضاء " ، "  $C$  الكرتين المسحوبتين مختلفتي اللون "

(ب) عين قيمة العدد الطبيعي  $n$  بحيث  $P(C) = \frac{15}{28}$

(2) نعتبر  $n = 5$  ونسحب من الكيس كرتين على التوالي وبدون إرجاع . نفرض أنه عند سحب كرة بيضاء نحصل على  $(-10)$  نقطة وعند سحب كرة سوداء نحصل على  $(+5)$  نقطة .  
نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها.  
(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$   
(ب) عين الأمل الرياضي للمتغير  $X$  . ماذا تستنتج ؟

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :  $(\bar{Z} - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4) = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ..

نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $E$  لواحقها على الترتيب :

$Z_A = 1 - i$  ،  $Z_B = 1 + i\sqrt{3}$  ،  $Z_C = \bar{Z}_B$  و  $Z_E = 4 \times \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$

(1) (أ) أكتب كل من الأعداد  $Z_A, Z_B$  و  $Z_C$  على الشكل الأسّي .

(ب) بين أن العدد  $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{1962}$  عدد حقيقي .

(2) (أ) أكتب العدد المركب  $Z_E$  على الشكل الجبري و الشكل المثلثي

(ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$

(3) (أ) عين لاحقة النقطة  $G$  مرجح الجملة  $\{(A,1); (B,2); (C,-1)\}$

(ب) عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $Z$  بحيث  $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 4$

### التمرين الثالث: (4 نقاط)

$$\begin{cases} \ln U_5 - \ln U_3 = 6 \\ \ln U_2 + \ln U_4 = 14 \end{cases} : (U_n) \text{ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما بحيث}$$

(1) أ) بين أن أساس المتتالية  $(U_n)$  هو  $q = e^3$  وحدها الأول  $U_0 = e^{-2}$

ب) أكتب  $U_n$  بدلالة  $n$ .

(2) نضع :  $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$

أحسب بدلالة  $n$  الجداء  $P_n$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

(3) نضع  $V_n = \ln U_{n+1} + \ln U_n$

أ) برهن أن  $(V_n)$  متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول  $V_0$ .

ب) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = \ln U_0 + \ln U_1 + \dots + \ln U_n$

### التمرين الرابع: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجموعة  $D = ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم فسر النتائج بيانيا .

(2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجموعة  $D$  :  $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$

ب) أستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 2.

(5) الدالة المعرفة على المجال  $]1, +\infty[$  بالعلاقة  $g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

أ) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1, +\infty[$  :  $\frac{x+1}{x} > 1$

ب) أستنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]1, +\infty[$

(6) ليكن المنحنى  $(\delta)$  المنحنى الممثل للدالة  $x \mapsto \ln x$

أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$  ثم فسر النتيجة بيانيا

ب) حدد وضعية  $(\delta)$  و  $(C_f)$  على المجال  $]1, +\infty[$

(7) أرسم (T) ،  $(\delta)$  و  $(C_f)$ .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (4 نقط )

في كل من الأسئلة التالية ، اختر إجابة صحيحة من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل

(1)  $(U_n)$  متتالية هندسية حدودها موجبة تماما بحيث  $U_8 = 32$  و  $U_9 \times U_{10} \times U_{11} = 8$

أساسها هو : أ)  $q = \frac{1}{4}$  ب)  $q = \frac{1}{2}$  ج)  $q = 4$

(2) أعضاء الطاقم الصحي لمؤسسة استشفائية موزعين حسب الجدول المقابل  
نختار عشوائيا عضو من الطاقم.

|      | أطباء | ممرضون |
|------|-------|--------|
| ذكور | 12    | 24     |
| إناث | 8     | 16     |

احتمال أن يكون العضو المختار أنثى هو: أ)  $\frac{2}{5}$  ب)  $\frac{4}{30}$  ج)  $\frac{1}{2}$

(3)  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  ب :  $f(x) = e^{ax} + \frac{b}{x+1}$  ، قيمتا العددين  $a$  و  $b$  بحيث يكون

المماس لمنحنائها في النقطة  $A(0;2)$  موازيا لحامل محور الفواصل هما :

أ)  $a=1$  و  $b=2$  ب)  $a=2$  و  $b=1$  ج)  $a=1$  و  $b=1$

(4) العدد  $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2021} + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2021}$  يساوي : أ) 0 ب) 2021 ج)  $2021 \times \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

### التمرين الثاني: (4 نقاط )

يحتوي كيس على 9 قريصات متماثلة منها : ثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1،0،1- و أربعة قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1،1،0،1- وقريصتين خضراوين تحملان الرقمين 1-، 0 .  
نسحب من الكيس عشوائيا ثلاث قريصات في أن واحد .

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية :  $A$  " سحب ثلاث قريصات من نفس اللون "

$B$  " سحب ثلاث قريصات مجموع أرقامها معدوم " ،  $C$  " سحب ثلاث قريصات جداء أرقامها سالب "

(2) أحسب احتمال الحادث  $P(A \cap B)$  وأستنتج  $P(\overline{A \cup B})$

(3) نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحب الرقم الأصغر من بين الأرقام المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$

ب) عين الأمل الرياضي والتباين للمتغير  $X$  .

ج) أحسب  $P(e^X - 1 > 0)$

### التمرين الثالث: (5 نقاط )

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$

(1) أدرس اتجاه تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$

(2)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول  $u_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq 1$

بـ بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما .

(ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

(3) (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب) أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$

(ج) عين نهاية المتتالية  $(u_n)$

(4) نضع :  $(v_n)$  متتالية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي :  $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

(أ) بين أن المتتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحددها الأول

(ب) أكتب بدلالة  $n$  كل من  $v_n$  و  $u_n$  .

(ج) أكتب بدلالة  $n$  المجموع :  $s_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$

### التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 1 - xe^{1-x}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$

(2) أستنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$  .

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x + (x+1)e^{1-x}$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) (أ) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ، وأحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

بـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = g(x)$  ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها .

(ج) استنتج أن للمنحنى  $(C_f)$  نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

(2) (أ) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  المعروف بالمعادلة  $Y = X$  مقارب مائلا للمنحنى  $(C_f)$  .

(ب) ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  .

(3) (T) مستقيم معادلته  $y = x + e$  ، بين أن المستقيم (T) مماس للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة يطلب تحديدها .

(4) (أ) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $-0.9 < \alpha < -0.8$

(ب) أحسب  $f(-1.5)$  ثم أرسم  $(T)$  ،  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  .

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $(x+1)e^{1-x} = m$  .

انتهى الموضوع الثاني