

للسنورات النهائية

التمرين الأول

✓ نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \{-1\}$ حيث: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم $O; \vec{i}; \vec{j}$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

(2) عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -1$ ، من $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$

(3) احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة f ثم أدرس إشارة $f'(x)$.

(4) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(5) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(6) بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر لـ (C_f) .

(7) ارسم كلا من (C_f) و (Δ) .

(8) m عدد حقيقي ناقش بيانها عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

✓ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بالشكل: $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{|x + 1|}$

(أ) اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

(ب) بين كيف يمكن رسم (C_g) المنحنى الممثل للدالة g إنطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه.

التمرين الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{2 - x^3}{(x - 1)^2}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(1) تحقق أن الدالة f تكتب على الشكل: $f(x) = -(x + 2) + \frac{4 - 3x}{(x - 1)^2}$.

(2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، فسّر النتائج هندسياً.

(3) تحقق أن: $f'(x) = \frac{(x - 2)^2(x + 1)}{(1 - x)^3}$ ، شكل جدول تغيرات الدالة f .

(أ) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -(x + 2)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$.

(ب) أدرس الوضع النسبي بين المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(4) ارسم بدقة المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

يُعطى: $f(0) = 2$ ، $f(1, 26) = 0$ ، $f(2) = -6$ و $f(-1) = \frac{3}{4}$.

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a=1 \\ a+b=2 \\ b+c=2 \end{cases}$$

أي

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$$

③ مستطاب في تم دراسة بشارته:

الدالة في قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$
ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1) - 1(x^2+2x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x+2x+2 - x^2-2x-2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

بشارة f' : (ما اشارت البسط لأن المقام موجباً دائماً)

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
x	-	-	-	0	+
x+2	-	0	+	+	+
f'	+	0	-	-	+

اتجاه التغير

لما $x \in]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ الدالة

f' موجبة لأن في متزايدة مكاناً

تتسا $x \in [-2; -1[\cup]-1; 0]$ الدالة

سالبة لأن في متناقصة مكاناً

①

حله التقويم الشعبة

رقم 03

حله المقررات الأدل

$$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}; D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

1) نهايات الدالة عند حدود مجموعة

$$\text{تقريباً: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x+2}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{1}{0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

$x = -1$ مستقيم مقارب عمودي للدالة

2) تبيان أن f تكتب على الشكل:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

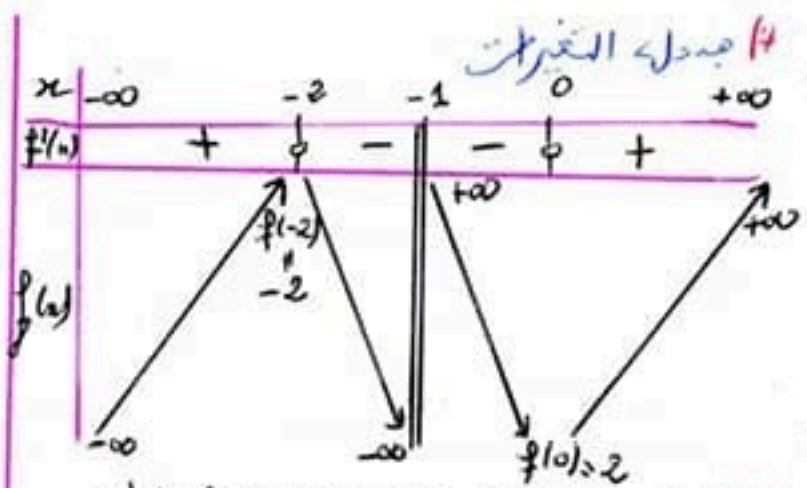
(هناك طار يقتان إما تو صيد المقامات

ثم المطابقة أو القسمة الاقليدسية)

$$f(x) = \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

بالمطابقة نجد:



5- تبين ان المستقيم (D) ازالمعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow \infty} x + 1 + \frac{1}{x+1} - (x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

اذن (D): $y = x + 1$ م.م.م. (D) للمنحنى (C)

بحسب الرسم و $(-\infty, 1)$ الوضع السليم بين (C) و (D) م.م.م. و إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{1}{x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
1	+	+	+
$x+1$	-	0	+
$\frac{1}{x+1}$	-	+	+
الوضع	فوق	تحت	فوق
الرمز	(D)	(D)	(D)

6 تبين ان نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحنى (C).
أدلاً بحد النقطة التقاطع:

$$\begin{cases} x = -1 & \text{المقارب العمودي} \\ y = x + 1 & \text{المقارب المائل} \end{cases}$$

أي $y = -1 + 1 = 0$ ومنه $W(-1; 0)$ نقطة تقاطع المستقيمين

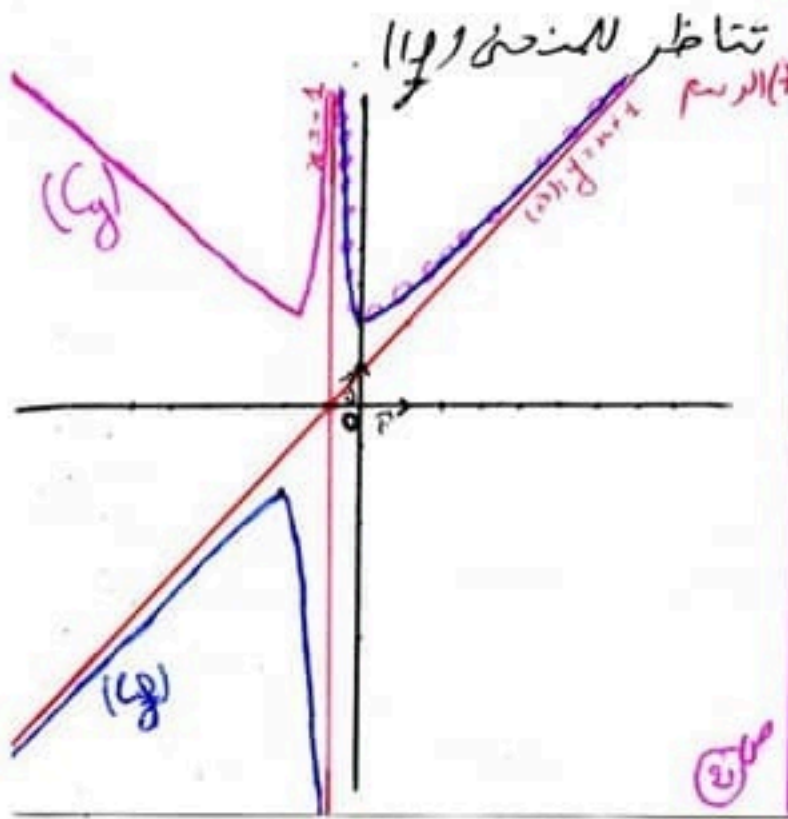
المقاربين. ثبات أن W مركز تناظر للمنحنى (C)

تذكير: أمثلة W مركز تناظر (C) بين $f(2a-x) + f(x) = 2p$ مع كون $x \in D_f$ فإن $(2a-x) \in D_f$

أي $x \neq -1$ أي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ أي $-x \neq 1$ أي $-2-x \neq -1$ أي $(-2-x) \in D_f$ أي $x \in D_f$ ومنه $f(-2-x) + f(x) = 0$

$$-x - x + x + \frac{1}{-2-x+1} + x + x + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 0$$

ومنه فالنقطة $W(-1; 0)$ مركز تناظر



حل التمرين الثاني :

$$f(x) = \frac{2-x^3}{(x-1)^2} ; D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

1) التحقق مما إذا كانت تنتمي على الشكل :

$$f(x) = -(x+2) + \frac{4-3x}{(x-1)^2}$$

(هناك طريقتان إما سوية المقامات أو القسمة (أقلية) :

حل 1) سوية المقامات :

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - x - 2x^2 + 4x - 2 + 4 - 3x}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \left[\frac{2-x^3}{(x-1)^2} \right] \quad \text{✓}$$

حل 2) القسمة الأقلية :

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 2 & x^2 - 2x + 1 \\ -x^3 + 2x^2 - x & -x - 2 \\ \hline -2x^2 + x + 2 & \\ -2x^2 + x + 2 & \\ \hline -3x + 4 & \end{array}$$

$$f(x) = -(x+2) + \frac{-3x+4}{(x-1)^2}$$

✓

ج) عدد دالة حوله للمعادلة $f(x) = m$

لما $m \in]-\infty; -2[$ حلاين مختلفين سالبان

$m = -2$ حل مفرد سالب.

$m \in]-2; 2[$ لا يوجد حلول.

$m = 2$ حل مفرد معدوم.

$m \in]2; +\infty[$ حلاين مختلفين في الإشارة

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} ; D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

2) كتابة الدالة g دون رمز الدالة

المطلقة :

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & ; x > -1 \\ -(x+1) & ; x < -1 \end{cases} \quad \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = f(x) & ; x > -1 \\ -\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = -f(x) & ; x < -1 \end{cases}$$

ب. كبريتك رسم (f) لا يتقاطع مع (g)

لما $x > 1$ له بنا : $g(x) = f(x)$

يعني (g) مستطبة مع (f) .

لما $x < 1$ له بنا : $g(x) = -f(x)$

أي (g) هو نظير (f) بالنسبة

لمحور التوازي.

الرسم انظر الشكل السابق

ص 3

$$= \frac{3x^2(x-1) + 2(2-x^3)}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 + 4 - 2x^3}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{(1-x)^3}$$

الآن يكفي أن نثبت أن

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1)$$

③ من خلال التحليل نجد أن العدد 2 هو جذر $x^3 - 3x^2 + 4$.

② من خلال النشر

$$\begin{aligned} (x-2)^2(x+1) &= (x^2 - 4x + 4)(x+1) \\ &= x^3 + x^2 - 4x^2 - 4x + 4x + 4 \\ &= x^3 - 3x^2 + 4 \end{aligned}$$

الآن

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)}{(1-x)^3}$$

بإشارة f' من إشارة البسط والمقام معًا.

40

② صفات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x^3}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = (+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x^3}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = (-\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = (+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = (+\infty)$$

$$\begin{array}{c} x \rightarrow -\infty \quad 1 \quad +\infty \\ x^2-2x+1 \quad + \quad + \end{array}$$

$x=1$ مستقيم مقارب عمودي

لكن $f(x) \rightarrow +\infty$ ، $(+\infty)$.

③ نبيان أن $f'(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)}{(1-x)^3}$

الدالة f' قابلة للاستقابة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ،
دالتها المشتقة هي

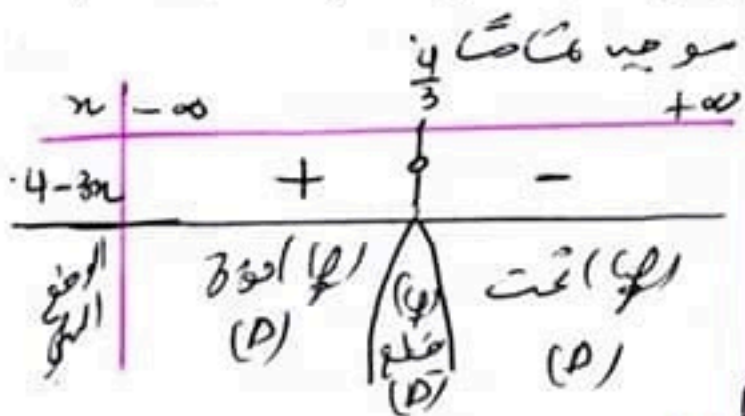
$$f'(x) = \frac{-3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)(2-x^3)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)[-3x^2(x-1) - 2(2-x^3)]}{(x-1)^4}$$

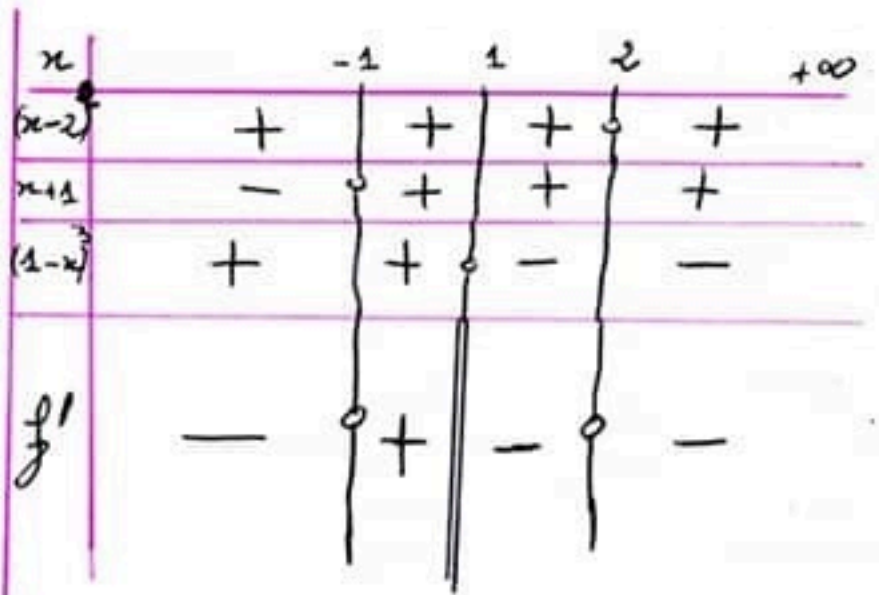
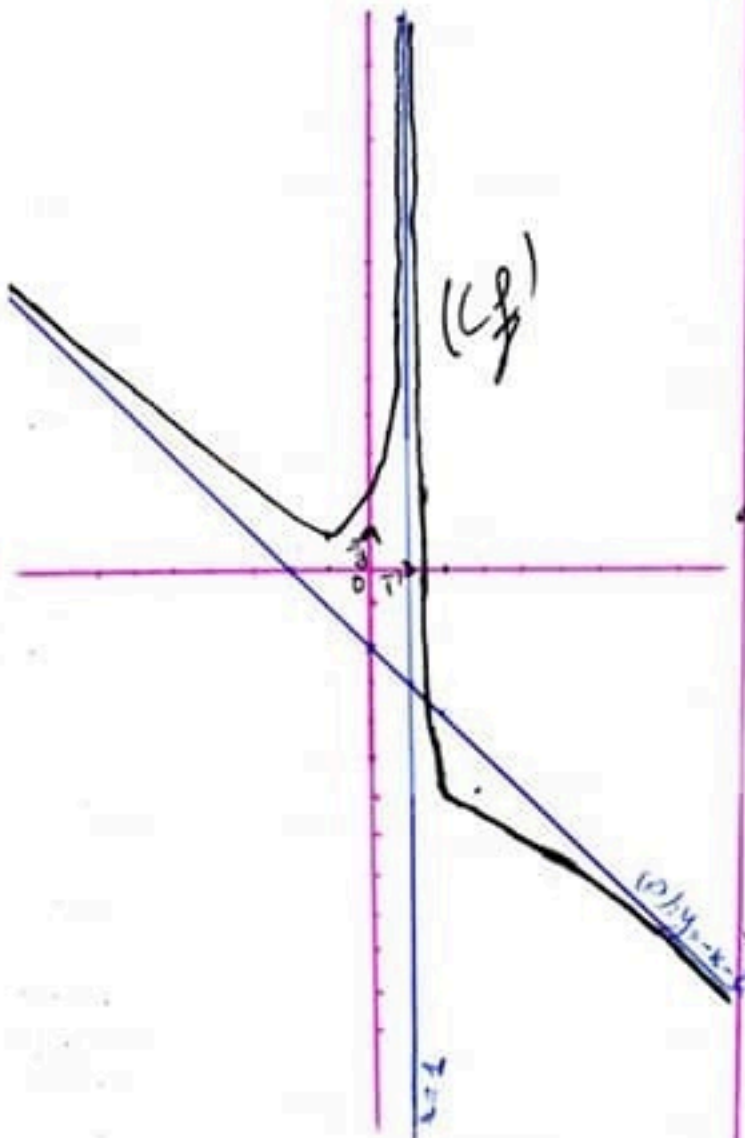
الوضع السليم بيننا (د)

$$f(x) - y = \frac{4-3x}{(x-1)^2}$$

التي، من إشارة أسبق لا الحلق



الرسم

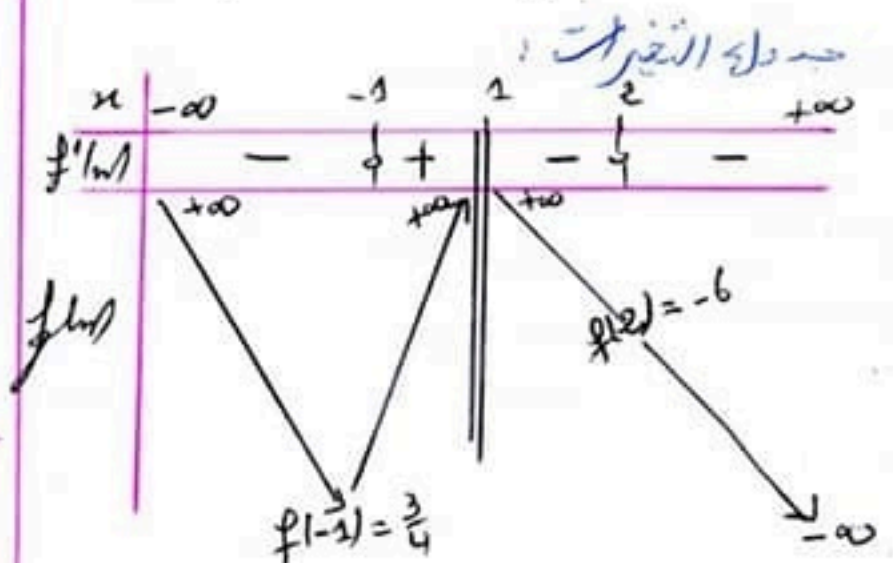


$$x \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$$

الدالة f' سالبة لأن في متناقصة تمامًا

$$x \in [-1; 1]$$

الدالة f' موجبة لأن في متزايدة تمامًا



$$y = -1(x+2) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-3x}{x^2-2x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$y = -1(x+2)$$

(-∞; +∞), عموماً

50