

ملخص شامل في

المتتاليات العددية

للسنة 3 ثانوي

إعداد :

الأستاذ مسعود



الأستاذ مسعود بن منصور



الأستاذ مسعود للرياضيات



Proff_Messaoud



المتتاليات العددية

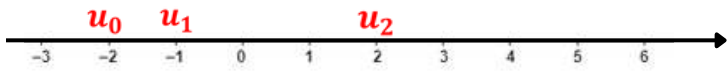
التمثيل البياني لمتتالية

01/متتالية معرفة بحددها العام

يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحددها العام على محور

مثال: لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحددها العام

$$U_n = n^2 - 2 \text{ على } N \text{ كمايلي:}$$



يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحددها العام

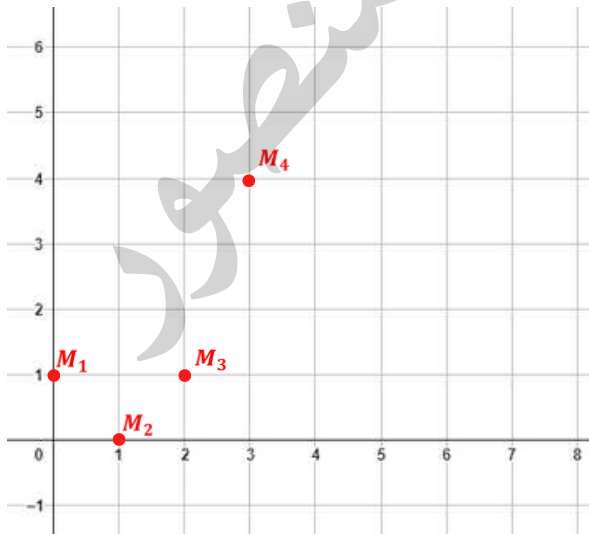
على المعلم المتعامد و المتجانس (O, I, J)

بحيث يكون تمثيلها البياني هو مجموعة النقط

$$U_n = f(n) \text{ مع } M(U_n; f(U_n))$$

مثال: لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحددها العام

$$U_n = n^2 - 2n + 1 \text{ على } N \text{ كمايلي:}$$



تعريف وتوليد متتالية

تعريف:

متتالية عددية حقيقية U هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي n_0 معطى ، العدد $U(n)$

ترميز:

نرمز إلى صورة n بالمتتالية U بـ U_n بدلا من $U(n)$ هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل

02/توليد متتالية عددية:

(أ) توليد متتالية معرفة بحددها العام :

(V_n) متتالية معرفة بحددها العام $V_n = 2n - 3$ هكذا يمكننا حساب الحد الأول V_0 أو أي حد

$$\begin{array}{l|l} V_0 = 2(0) - 3 & V_{10} = 2(10) - 3 \\ V_0 = -3 & V_{10} = 17 \end{array}$$

(ب) توليد متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي $U_0 = 2$ و من أجل

كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n + 1$ هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية .

ومنه نحسب الحد U_2 U_1

$$\begin{array}{l|l} U_1 = U_0 + 1 & U_2 = U_1 + 1 \\ U_1 = 2 + 1 = 3 & U_2 = 3 + 1 = 4 \end{array}$$

02/ المتتالية المتناقصة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N
نقول عن (U_n) أنها **متناقصة** إذا وفقط إذا كان

$$U_{n+1} \leq U_n \quad : n \text{ أي: عدد طبيعي}$$

$$U_{n+1} - U_n \leq 0$$

03/ المتتالية الثابتة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N
نقول عن (U_n) أنها **ثابتة** إذا وفقط إذا كان من

$$U_{n+1} = U_n \quad : n \text{ أي: عدد طبيعي}$$

$$U_{n+1} - U_n = 0$$

ملاحظة

نقول عن (U_n) أنها **رتيبة** إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

02/متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

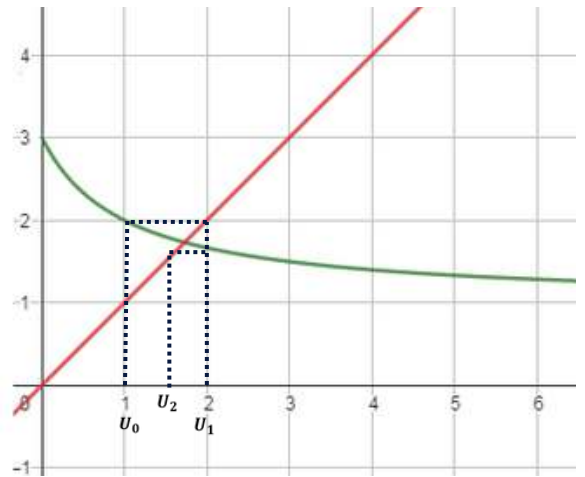
◀ لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحددها الأول U_0
و العلاقة التراجعية $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث f دالة معرفة على R

مجموعة النقط ($M(n; f(U_n))$) هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية

مثال: لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحددها الأول

$$U_0 = 1 \text{ والعلاقة التراجعية } U_{n+1} = \frac{U_n + 3}{U_n + 1}$$

مثل بيانيا حدود المتتالية (U_n)



إتجاه تغير المتتالية

01/ المتتالية المتزايدة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N
نقول عن (U_n) أنها **متزايدة** إذا وفقط إذا كان من

$$U_{n+1} \geq U_n \quad : n \text{ أي: عدد طبيعي}$$

$$U_{n+1} - U_n \geq 0$$

المتتالية الحسابية

تعريف

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **حسابية** إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r حيث : $U_{n+1} = U_n + r$ يسمى r أساس المتتالية

ملاحظات:

- ◀ نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **حسابية** إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. هذا الأخير هو الأساس r
- ◀ نقول إن المتتالية (U_n) **حسابية** إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. هذا الأخير هو الأساس r
- ◀ لإثبات أن المتتالية (U_n) **حسابية** نحسب الفرق

$$U_{n+1} - U_n = r$$

02/ عبارة الحد العام

لتكن المتتالية (U_n) حسابية أساسها r و حدها الأول U_0 تكتب عبارة الحد العام على الشكل :

$$U_n = U_0 + nr$$

ملاحظة

◀ إذا كان الحد الأول هو U_1 فإن الحد العام هو:

$$U_n = U_1 + (n - 1)r$$

◀ بصفة عامة إذا كان U_p و U_n حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن :

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

مع $n > p$

03/ الوسط الحسابي

a , b و c حدود متتابعة من متتالية حسابية ومنه حسب خاصية الوسط الحسابي فإن :

$$2b = a + c \quad \text{و منه :} \quad b = \frac{a + c}{2}$$

04/ مجموع متتالية حسابية

(U_n) متتالية حسابية معرفة على N أساسها r

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n \quad \text{و}$$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (U_0 + U_n) \quad \text{فإن :}$$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

05/ اتجاه تغير متتالية حسابية

اتجاه تغير متتالية حسابية (U_n) حسب إشارة الأساس r

◀ إذا كان : $r < 0$

فإن (U_n) **متناقصة** تماما

◀ إذا كان : $r > 0$

فإن (U_n) **متزايدة** تماما

◀ إذا كان : $r = 0$

فإن (U_n) **ثابتة**

المتتالية الهندسية

تعريف

نقول إن المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **هندسية** إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث :

$$V_{n+1} = V_n \times q$$

q يسمى أساس المتتالية $(V_n)_i$

02/ عبارة الحد العام

لتكن المتتالية $(V_n)_i$ هندسية أساسها q و حدها الأول V_0

تكتب عبارة الحد العام على الشكل :

$$V_n = V_0 \times q^n$$

ملاحظات:

إذا كان الحد الأول هو V_1 فإن الحد العام هو:

$$V_n = V_1 \times q^{n-1}$$

بصفة عامة إذا كان V_n و V_p حدين من متتالية

هندسية أساسها q فإن :

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$

مع $n > p$

03/ الوسط الهندسي

a , b و c حدود متتابعة من متتالية هندسية

ومنه حسب خاصية الوسط الهندسي فإن :

$$b^2 = a \times c \quad \text{و منه : } b = \sqrt{a \times c}$$

04/ مجموع متتالية هندسية

$(V_n)_i$ متتالية هندسية معرفة على N أساسها q

$$P_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n \quad : 9$$

فإن :

$$P_n = V_0 \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

05/ إتجاه تغير متتالية هندسية

إتجاه تغير متتالية حسابية (V_n) حسب إشارة الأساس q

و الحد الأول V_0

في حالة : $V_0 > 0$

إذا كان : $q > 1$ <

فإن $(V_n)_i$ **متزايدة** تماما

إذا كان : $0 < q < 1$ <

فإن $(V_n)_i$ **متناقصة** تماما

في حالة : $V_0 < 0$

إذا كان : $q > 1$ <

فإن $(V_n)_i$ **متناقصة** تماما

إذا كان : $0 < q < 1$ <

فإن $(V_n)_i$ **متزايدة** تماما

ملاحظة :

إذا كان $q < 0$ فإن المتتالية غير رتيبة

إذا كان : $q = 1$ فإن $(V_n)_i$ **ثابتة**

نهاية متتالية

01/ نهاية متتالية معرفة بحددها العام

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N كمايلي:

$$U_n = f(n)$$

◀ إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l$$

◀ إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \infty$$

02/ نهاية متتالية هندسية

(V_n) لمتتالية هندسية معرفة على N أساسها q

و حدها الأول V_0

◀ إذا كان : $q > 1$ فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \infty$$

◀ إذا كان : $-1 < q < 1$ فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

◀ إذا كان : $q < -1$ فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \text{غير موجودة}$$

البرهان بالتراجع

مُسَلِّمة

($P(n)$) خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n . لإثبات

صحة ($P(n)$) من أجل كل عدد طبيعي n_0 ،

يكفي أن :

◀ نتأكد من صحة ($P(n_0)$)

◀ نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي كافي

أكبر من أو يساوي n_0 ، أي " $P(n)$ صحيحة " ونثبت

صحتها من أجل $n + 1$ ، أي صحة ($P(n + 1)$)

المتتالية المحدودة

01/ المتتالية المحدودة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N

نقول عن (U_n) أنها **محدودة** يعني أنها إما محدودة من الأعلى أو من الأسفل بعدد حقيقي a

◀ إذا كان : $U_n \leq a$ نقول (U_n) محدودة من الأعلى

◀ إذا كان : $U_n \geq a$ نقول (U_n) محدودة من الأسفل

◀ إذا كان : $b \geq U_n \geq a$ نقول (U_n) **محدودة**

(أي محدودة من الأسفل و من الأعلى)

تقارب المتتالية

01/ المتتالية المتقاربة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N

نقول عن (U_n) أنها **متقاربة** إذا كان:

◀ (U_n) **متزايدة** و محدودة من الأعلى

◀ (U_n) **متناقصة** و محدودة من الأسفل

أو :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l \quad (l \in \mathbb{R})$$

02/ المتتالية المتباعدة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N

نقول عن (U_n) أنها **متباعدة** إذا كان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty$$

أو نهايتها غير موجودة

المتتاليتان المتجاورتان

01/ المتتاليتان المتجاورتان

(U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على N

نقول عن (U_n) و (V_n) أنهما **متجاورتان** إذا كان:

◀ (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة أو العكس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - V_n) = 0 \quad \text{مع}$$

مبرهنة:

إذا كانت متتاليتان متجاورتان فإنهما متقاربتان و
لهما نفس النهاية