

طول تهازين الدوال الأساسية

لشعبة علوم تجريبية
معداد : خالربخاخشة

أكتوبر 2019

التمارين

التمرين 1) باك 2008 مر 1 7,5 ن

(I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1 cm .

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

(II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$.

(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$)

(2) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

(3) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثيها.

(4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

(5) أرسم (C_g).

(6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان

- عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto g(x) - 1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 .

(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 2) باك 2010 مر 2 7 ن

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أـ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب: $y = x + 1$ و $y = x$.

بـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

(4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

(5) أـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

بـ هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f).

دـ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m - 1)e^{-x} = m$

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x - ex - 1$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- بـ أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.
- جـ شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (2) أـ بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.
- بـ أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
- جـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75; 1,76[$ حلا وحيدا α .
- دـ أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 2]$.
- (3) أـ أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادليهما: $x = \alpha$ ، $x = 0$.
- بـ أثبت أن: $ua = \left(\frac{1}{2} e \alpha^2 - e \alpha + \alpha \right) ua$ (حيث ua هي وحدة المساحات)

- (I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) أـ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$.
- بـ تحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.
- استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (3) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).
- (4) أـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
- بـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
- (5) أـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.
- بـ أنشئ (Δ) و (C_f) .
- (6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$.
- أـ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $xe^x \mapsto x$ على $\mathbb{R}$.
- بـ استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

(I) f الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

(2) أحسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

(4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ : $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

(1) أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ- تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن : $2f'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$.

ب- استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج- تحقق من أن : $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن : $0,36 < \alpha < 0,37$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.

ب- استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\alpha[$ ومتزايدة تماما على $]-\alpha; +\infty[$.

(2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.

(5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، نأخذ $f(-\alpha) \approx 0,1$.

(6) أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.
ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = -g(x)$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.38$)

د- عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج- بين أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما.

د- أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

هـ- ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$ على المجال $[-2; +\infty[$.

(III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = x + f(x)$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

(1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

(2) أ- أحسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماماً وفسر النتيجة هندسياً.

ب- أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

(1) أ- أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب- بين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.

ج- أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $-1.37 < \alpha < -1.38$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ (حيث f' هي مشتق الدالة f).

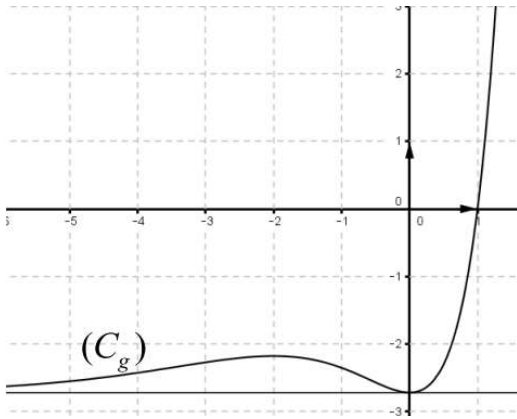
ج- أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

- (2) أـ بين أن : $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة ببياناً .
 جـ أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha) \approx 0,29$)

التفريغ 9) باك 2017 - الدورة العادية - 2مر 7

- (I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.
 و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيراً هندسياً للنتيجة ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 (2) أـ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 بـ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
 (3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
 (II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.
 (1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .
 (2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.
 (3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.
 (4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.
 - تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادليهما : $x = 0$ و $x = 1$.

التفريغ 10) باك 2017 - الدورة الإستثنائية - 1مر 7



- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$.
 (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الشكل)
 • أحسب $g(1)$.
 • بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.
 حسب قيم العدد الحقيقي x .
 (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) أحسب النهايات الآتية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 (2) بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار ، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) .
 (3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.
 (4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $]0; +\infty[$ متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 (5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقاً من منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ ، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم .
 (6) ليكن n عدداً طبيعياً و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادليهما :
 $x = -e^{n+1}$ و $x = -e^n$.
 أحسب العدد الحقيقي l حيث : $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$.

I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم $(\Delta): y = 2x + 1$ حيث :

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,8$) .

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^x$.

6) أـ باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

بـ أحسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتهما : $x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_g) و (C_f) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

1) أـ أدرس اتجاه تغير الدالة g .

بـ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

3) أحسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) أرسم على المجال $[0; 2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$) .

6) أحسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

7) الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أـ بين أن الدالة h زوجية .

بـ من أجل $x \in [0; 2]$ أحسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

- (I) $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ كما يلي: $[-2; +\infty[$ معرفة على f الدالة العددية المعروفة على $[-2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$.
 تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجييه المماس عند A يساوي $(-e)$.
 $A \in (C_f)$ معناه: $f(-1) = 1$ أي: $(-a + b)e + 1 = 1$ ومنه: $a = b$.
 معامل توجييه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه: $f'(-1) = -e$.
 الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-2; +\infty[$ و: $f'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) = (-ax - b + a)e^{-x}$.
 ومنه $f'(-1) = (2a - b)e$ ومما سبق $f'(-1) = -e$.
 بالمطابقة لدينا $2a - b = -1$ و $a = b$ ومنه نجد: $a = b = -1$.
 (II) الدالة g معرفة على المجال $[-2; +\infty[$ ب: $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$.

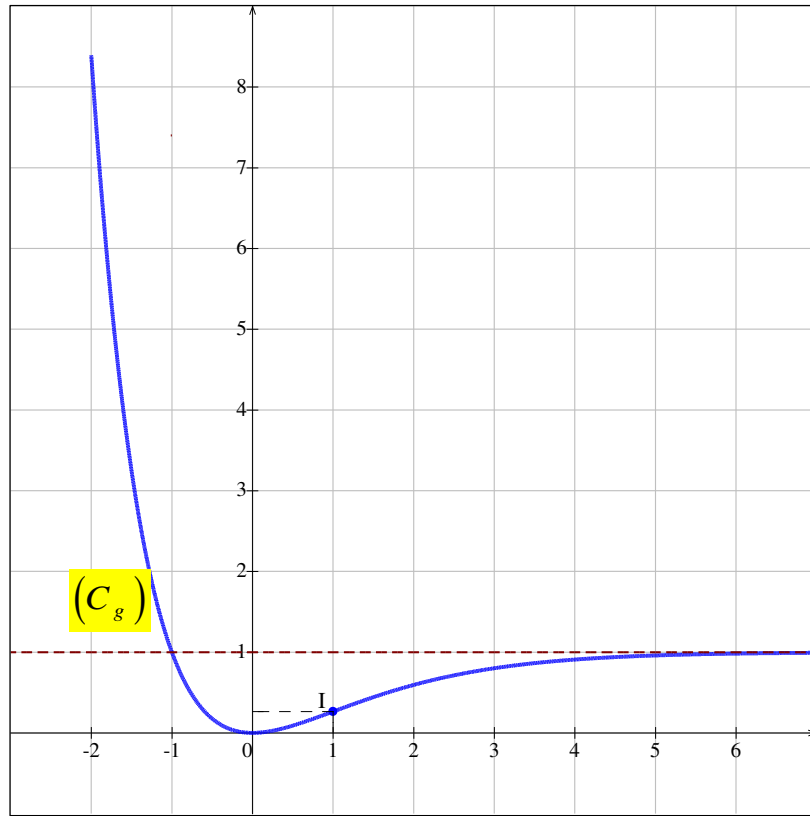
- (1) تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.
 $\lim_{u \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} ue^u = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) = 1$.
 التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.
 (2) دراسة تغيرات الدالة g :

- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ ، و $g'(x) = -e^{-x} + (-e^{-x})(-x - 1) = xe^{-x}$.
 - اتجاه تغير الدالة g :
 إشارة $g'(x)$ من إشارة x .
 ومنه: من أجل $x \in [-2; 0]$ ، يكون $g'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-2; 0]$.
 من أجل $x \in [0; +\infty[$ ، يكون $g'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.
 جدول تغيرات الدالة g :

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$e^2 + 1$	0	1

- (3) تبين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثيها .
 الدالة g' قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ ، و $g''(x) = (1 - x)e^{-x}$.
 إشارة $g''(x)$ من إشارة $1 - x$ وبالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيرا إشارته، ومنه $I(1; 1 - \frac{2}{e})$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g) .
 (4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

لدينا: $(T): y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ ومنه $(T): y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$.



(6) الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان .

- تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$:

الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ ، و $H'(x) = \alpha e^{-x} + (-e^{-x})(\alpha x + \beta) = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$ ،

H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$ معناه : $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$ ومنه نجد : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$.

لدينا : $G(x) = H(x) + x + c$: من الشكل : $G(x) = H(x) + x + c$ ومنه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل :

الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند 0 هي : $G(x) = (x + 2)e^{-x} + x + 2$.

(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي : $k(x) = g(x^2)$

الدالة k قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ،

$$k'(x) = 2xg'(x^2) = 2x(x^2e^{-x^2}) = 2x^3e^{-x^2}$$

إتجاه تغير الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x .

ومنه : من أجل $x \in [-2; 0]$ ، يكون $k'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة k متناقصة على المجال $[-2; 0]$.

من أجل $x \in [0; +\infty[$ ، يكون $k'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة k متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة k :

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$	-	0	+
$k(x)$	$1 - 5e^{-4}$	0	1

$f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ كما يلي: $\mathbb{R}^*$ المعرفة على

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$$

$$\text{بـ} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = 1 - \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

والدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من

المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$$(3) \quad \text{أـ لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} \right] = 0 \quad \text{ومنه المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = x \text{ مقارب للمنحنى } (C_f) \text{ عند } +\infty.$$

$$\text{ولدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} - 1 \right] = 0 \quad \text{ومنه المستقيم } (\Delta') \text{ ذو المعادلة } y = x + 1 \text{ مقارب مائل}$$

للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

$$\text{لدينا: } f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^x} \quad \text{ومنه إشارة الفرق من إشارة } 1 - e^x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	-	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

• دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

$$\text{لدينا: } f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = \frac{e^x}{1 - e^x} \quad \text{ومنه إشارة الفرق من إشارة } 1 - e^x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	-	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) تحت (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

(4) إثبات أن النقطة $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

$$f(-x) + f(x) = -\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^{-x} - 1} = -\frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2} \text{ و } -x \in \mathbb{R}^*, x \in \mathbb{R}^* \text{ كل}$$

ومنه النقطة $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) أتبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $]\ln 2; 1[\subset]0; +\infty[$ أي $f(1) \times f(\ln 2) < 0$ $\begin{cases} f(1) \approx 0,41 \\ f(\ln 2) \approx -0,31 \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α ، حيث $\ln 2 < \alpha < 1$.

• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و $]-1,4; -1,3[\subset]-\infty; 0[$ أي $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$ $\begin{cases} f(-1,3) \approx 0,07 \\ f(-1,4) \approx -0,07 \end{cases}$

أي $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 0[$ حلا وحيدا β ، حيث $-1.4 < \beta < -1.3$.

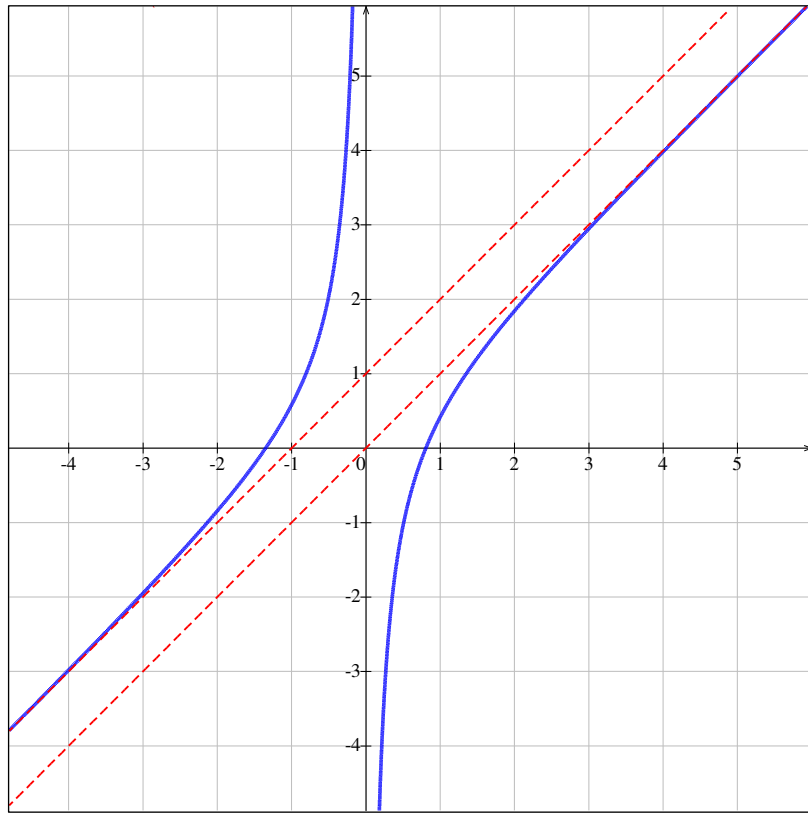
بـ دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f'(x) = 1$.

لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 1$ تكافئ $1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$ أي $e^x = 0$ وهذا مستحيل و بالتالي المعادلة ليس لها

حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

جـ- الرسم :



$$\text{لدينا : } (m-1)e^{-x} = m \text{ تكافئ } m-1 = me^x \text{ تكافئ } m = -\frac{1}{e^x-1} \text{ تكافئ } m+x = x - \frac{1}{e^x-1}$$

تكافئ $f(x) = x + m$ ، ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$.
إذا كان $m \in]-\infty; 0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان $m \in [0; 1[$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب .

حل مقترح للتمرين 3 باك 2011

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - ex - 1$.
(1) أ - حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - ex - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - ex - 1) = +\infty$$

ب - حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - e$

$f'(x) = 0$ تكافئ $e^x - e = 0$ تكافئ $e^x = e$ تكافئ $x = 1$.

من أجل $x \in]-\infty; 1[$ ، يكون $e^x \leq e$ أي $f'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $] -\infty; 1[$.

من أجل $x \in [1; +\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

ج - جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-1	$+\infty$

$$(2) \text{ أ - لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - ex - 1 - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب - كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

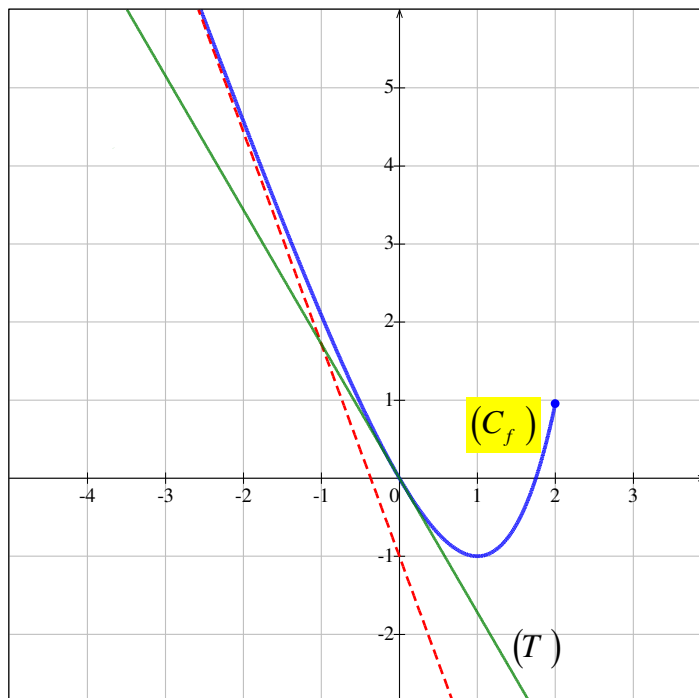
لدينا : $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ و منه $(T) : y = (1 - e)x$.

ج - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[1, 75; 1, 76]$ حلا وحيدا α .

$$\begin{cases} f(1.75) \approx -0,002 \\ f(1.76) \approx 0,02 \end{cases} \text{ و } [1, 75; 1, 76] \subset [1; +\infty[\text{ و } [1; +\infty[\text{ المجال } f \text{ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال } [1; +\infty[$$

أي $f(1,75) \times f(1,76) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75 < \alpha < 1.76$.

د- الرسم :



(3) أ- حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = 0$.

$$A(\alpha) = -\int_0^{\alpha} f(x) dx = -\int_0^{\alpha} (e^x - ex - 1) dx = -\left[e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x \right]_0^{\alpha} = 1 - \left(e^{\alpha} - \frac{1}{2}e\alpha^2 - \alpha \right)$$

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua \quad \text{ب- إثبات أن :}$$

لدينا : $f(\alpha) = 0$ ومنه $e^{\alpha} - e\alpha - 1 = 0$ أي $e^{\alpha} = e\alpha + 1$ وبالتالي :

$$A(\alpha) = -e^{\alpha} + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = -(e\alpha + 1) + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$$

(ua هي وحدة المساحات)

2. ملقترح للتمرين 4 (باك 2012)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - xe^x$.

(1) حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^x) = -\infty$.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = -1 \times e^x + (-x)e^x = -(x+1)e^x$: بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ ، ومنه :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-1; +\infty[$ ومتزايدة على المجال $]-\infty; -1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1	$1 + e^{-1}$	$-\infty$

(3) أـ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$:

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و $\begin{cases} g(-1) = 1 + e^{-1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$.
ب ـ التحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$:

لدينا : $]-1; +\infty[\supset]0.5; 0.6[$ و $\begin{cases} g(0.5) \approx 0.18 \\ g(0.6) \approx -0.09 \end{cases}$ ومنه $0.5 < \alpha < 0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي : $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x - x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x - e^x - x - 1] = +\infty$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن : $f'(x) = -g(x)$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 2]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 2]$:

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x - 1 = e^x + xe^x - e^x - 1 = xe^x - 1 = -(1 - xe^x) = -g(x)$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$		-	+

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$e^2 - 3$

(3) تبين أن : $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$.

لدينا : $f(\alpha) = (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1$ ، ولدينا من جهة $g(\alpha) = 0$ يكافئ $1 - \alpha e^\alpha = 0$ يكافئ $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

$$\text{ومنّه } f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) \text{ أي : } f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{(\alpha-1) - \alpha^2 - \alpha}{\alpha} = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha}$$

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$$\frac{1.25}{0.6} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < \frac{1.36}{0.5} \text{ يكافئ } \begin{cases} \frac{1}{0.6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0.5} \\ 1.25 < \alpha^2 + 1 < 1.36 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } -\frac{1.36}{0.5} < -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) < -\frac{1.25}{0.6} \text{ أي : } -2.72 < f(\alpha) < -2.08$$

$$(4) \text{ أـ لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0$$

ومنّه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا : $f(x) - y = (x-1)e^x$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty; 2]$.

x	$-\infty$	1	2
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; -2)$ (C_f) تحت (Δ)		

(5) أـتبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.

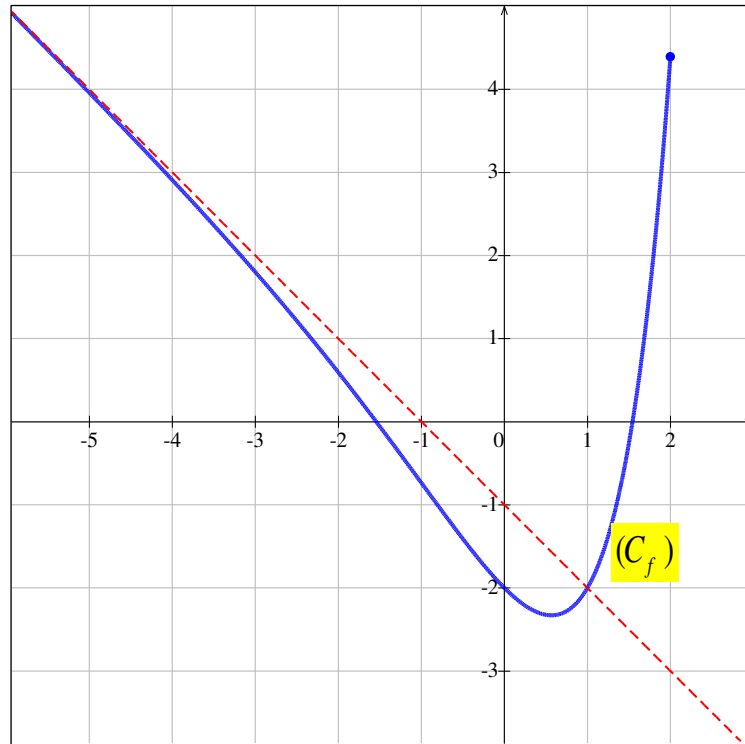
• الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و $]-\infty; \alpha]$ و $]-1.6; -1.5[$ و $f(-1.5) \approx -0,05$
 $f(-1.6) \approx 0,07$

أي $f(-1,6) \times f(-1,5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و يحقق $f(x_1) = 0$.

• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha; 2]$ و $[\alpha; 2]$ و $]1,5; 1,6[$ و $f(1.5) \approx -0,26$
 $f(1.6) \approx 0,37$

أي $f(1,5) \times f(1,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5 < x_2 < 1.6$ و يحقق $f(x_2) = 0$.

بـالرسم :



(6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = (ax + b)e^x$.

أـتعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$ ،

الدالة h أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ يعني : $h'(x) = xe^x$ ، ومنه بالمطابقة نجد : $a = 1$ و $b = -1$. أي $h(x) = (x-1)e^x$.

بـإستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا : $g(x) = 1 - xe^x$ ومنه دالة أصلية للدالة g من الشكل : $G(x) = x - (x-1)e^x$.

$$(I) \text{ الدالة المعرفة على }]-\infty; 1[\text{ بـ : } f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}.$$

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 1 \end{cases} \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = 2$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C).

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 0 \end{cases} \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

(2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $] -\infty; 1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $] -\infty; 1[$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1 \times x}{(x-1)^2} + \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right) e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

بما أن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \in] -\infty; 1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $] -\infty; 1[$.
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$-\infty$	2

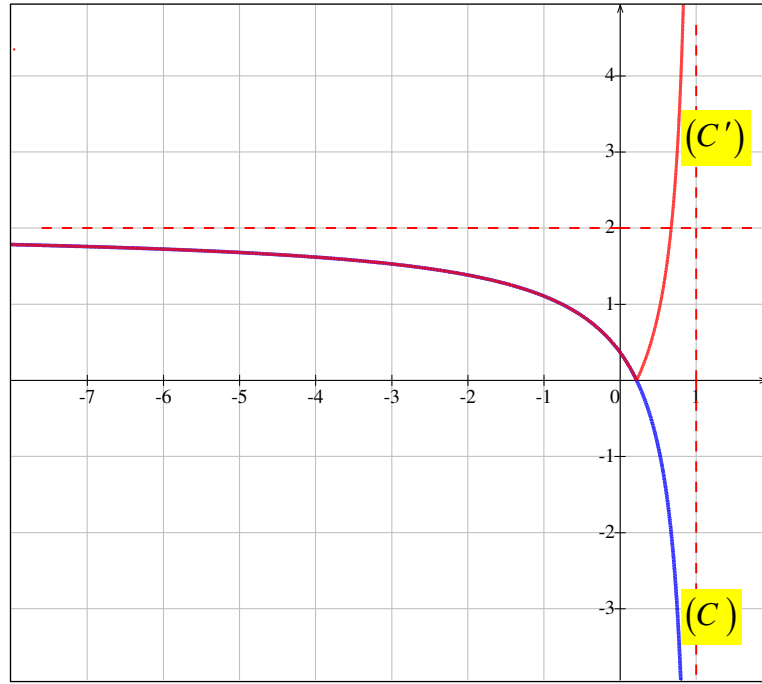
(3) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $] -\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

$$\text{الدالة } f \text{ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال }] -\infty; 1[\text{ و } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \end{cases} \text{ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة}$$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $] -\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

حسب جدول القيم : $0,21 < \alpha < 0,22$.

(4) الرسم :



(5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلل المعادلة $|f(x)| = m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y = m$.

من أجل $m \in \left[\frac{1}{e}; 2 \right]$ المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

(II) الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x - 1)$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(2x - 1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x - 1) = 2$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 1[$: $g'(x) = 2f'(2x - 1)$.

بما أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$, $(2x - 1) \in]-\infty; 1[$ فإن $f'(2x - 1) < 0$ ، وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1
$g'(x)$		-
$g(x)$	2	$-\infty$

(2) أ- التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$:

$$\text{لدينا: } g(x) = f(2x - 1) \text{ ومنه } g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = f(\alpha) = 0$$

$$\text{تبيان أن: } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$$

$$\text{لدينا: } g'(x) = 2f'(2x - 1) \text{ ومنه } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = 2f'(\alpha)$$

بـ. إستنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا: $(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ومنه $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$.

جـ. التحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

لدينا: $f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$ ومنه $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$ وهذا يعني $f(\alpha) = 0$ ، لكن $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$.

إذن: $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ أي $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$.

حل مقترح للتمرين 6 باك 2015

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

(1) دراسة إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + 2e^{2x-2})$.

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) < 0$ ، وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) \left(\frac{1-2x}{2x-2} - \frac{e^{2x-2}}{2x-2} \right) = -\infty$ الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.

لدينا: $\begin{cases} g(0,36) \approx 0,002 \\ g(0,37) \approx -0,02 \end{cases}$ أي: $g(0,36) \times g(0,37) < 0$ ومنه $0,36 < \alpha < 0,37$.

(3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

(1) أ. تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2}) = e^{2x+2}(1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}) = e^{2x+2}g(-x)$$

بـ. إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $[-\alpha; +\infty[$ و متزايدة على $]-\infty; -\alpha]$.

(2) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\alpha)$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \quad (3)$$

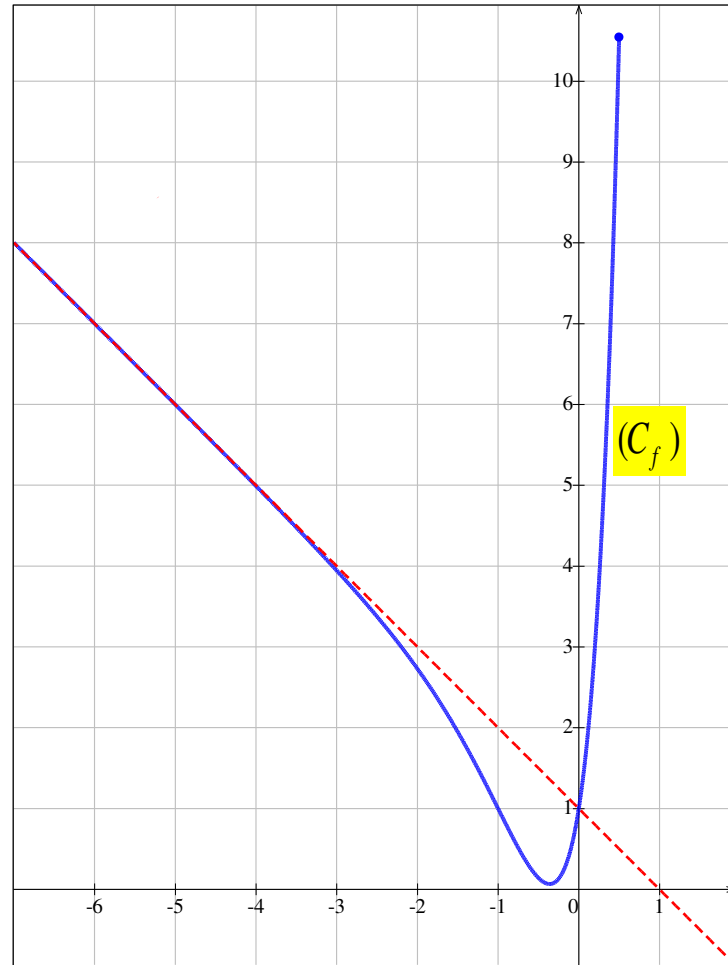
التفسير الهندسي: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x) - (-x + 1) = xe^{2x+2}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)

(5) الرسم :



(6) أ. التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - (4x + 4)e^{2x+2} = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

ب. إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$ ،

$$f(x) = -\frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2} - x - \frac{3}{2}e^{2x+2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[-f(x) + f'(x) + x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2} \right] + c$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x+2} - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 + c$$

حل مقترح للتمرين 7 - بابك 2016 - الدورة الأولى

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = +\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x - 1)e^{-x} = (-x^2 + x + 2)e^{-x} = (2 - x)(x + 1)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2 - x)(x + 1)$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

الدالة g متزايدة على المجال $[-1; 2]$ ومتناقصة على كل من المجالين $]-\infty; -1]$ و $[2; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$1-e$	$1+5e^{-2}$	1	

(3) أ- تبيان أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث $-1.52 < \alpha < -1.51$.

$$g(0) = 1 + (0^2 + 0 - 1)e^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} g(-1,52) \approx 0,041 \\ g(-1,51) \approx -0,040 \end{cases}$$

أي $g(-1,52) \times g(-1,51) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; -1]$ حلا وحيدا α حيث $-1.52 < \alpha < -1.51$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	$+$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

(1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = +\infty$$

ب- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = -1 + (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = -1 - (x^2 + x - 1)e^{-x} = -g(x)$$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	2	$-\infty$

$$\text{د- } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha) = 0$$

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم . (يوازي لحامل محور الفواصل).

$$(2) \text{ أ- } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0 \text{ ومنه المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = -x \text{ مقارب مائل}$$

للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - (-x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = (x + 1)(x + 2)e^{-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x + 1)(x + 2)$.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-	+
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	
	(C_f) يقطع (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)	
	في النقطة $B(-2; 2)$		في النقطة $A(-1; 1)$	

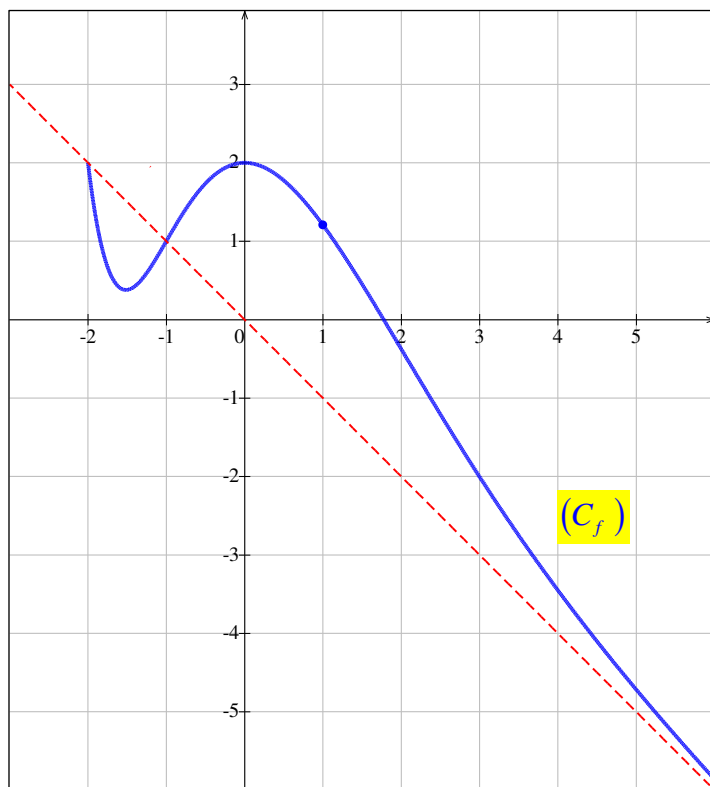
ج- تبين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف :

لدينا : الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -g'(x) = (x - 2)(x + 1)e^{-x}$ ،

إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

ومن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $A(-1; 1)$ و $C(2; -2 + 12e^{-2})$.



هـ - المناقشة البيانية :

المعادلة $(x^2 + 3x + 2)e^x + (m - x)e^x = 0$ تكافئ $f(x) = -m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -m$.

لما $m \in]-f(\alpha); +\infty[$ يكون $f(\alpha) \in]-\infty; -m]$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m = -f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر سالب .

لما $m \in]-2; -f(\alpha)[$ يكون $f(\alpha) \in]-m; 2]$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان والآخر موجب .

لما $m = -2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر معدوم .

(III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = x + f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

(1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني : من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x) = h(x)$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

ومنه بالمطابقة نجد : $a = -1$ ، $b = -5$ ، $c = -7$ أي $H(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$.

(2) أ - حساب التكامل : $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ ، حيث $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx = [H(x)]_0^\lambda = (-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = \lambda$ و $x = 0$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

ب - $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7] = 7$.

(I) $g(x) = 2e^x - x^2 - x$: الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

(1) أ. الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 2e^x - 2x - 1$ ، دراسة اتجاه تغير الدالة g' :

الدالة g' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$ ، إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

بـ. تبيان أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$ ،

الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0) = 1$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$ ،

جـ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - x^2 - x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - x) = -\infty$ ،

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38 < \alpha < -1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1,38) \approx -0,02 \\ g(-1,37) \approx 0,001 \end{cases}$ أي $g(-1,38) \times g(-1,37) < 0$ و منه حسب مبرهنة

القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38 < \alpha < -1,37$.

(3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$: الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

(1) أ. حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty \end{cases} \text{ لأن ، } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = 0$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1 - x e^{-x}} \right) = +\infty$$

بـ. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{(2xe^x + x^2 e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)x^2 e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x [(2+x)(e^x - x) - x(e^x - 1)]}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

جـ. دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; 0]$ ومتزايدة على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $]-\infty; \alpha]$.
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0	$+\infty$	

(2) أتبين أن: $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ أي $e^\alpha = \frac{\alpha^2 - \alpha}{2}$ ومنه $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} \right)}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \alpha} = \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{\alpha - 1}$

أي: $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

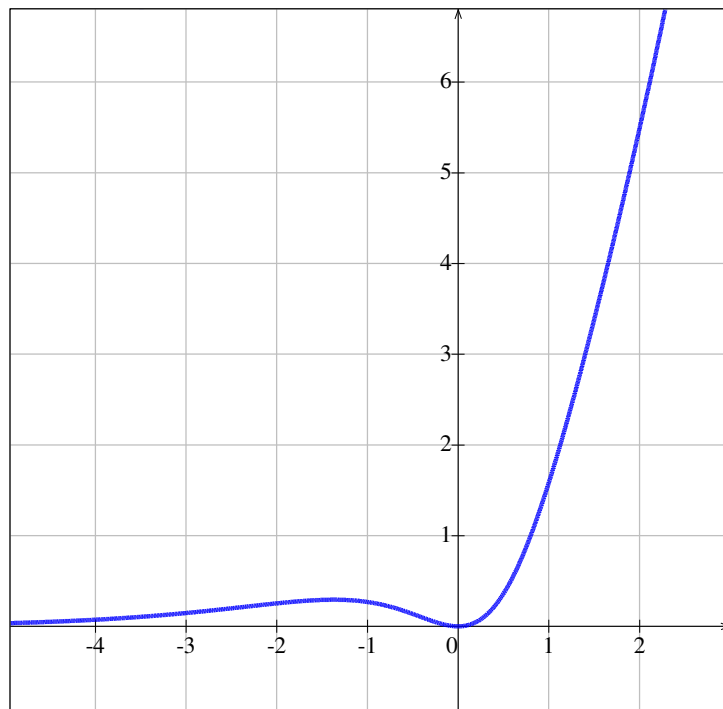
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا: $-1,38 < \alpha < -1,37$ يكافئ $\begin{cases} -0,76 < 2\alpha + 2 < -0,74 \\ (-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2 \\ -2,38 < \alpha - 1 < -2,37 \\ -\frac{2}{2,37} < \frac{2}{\alpha - 1} < -\frac{2}{2,38} \end{cases}$ ومنه $0,27 < f(\alpha) < 0,32$

بـ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^2}} \right) = 0$

التفسير البياني: المنحنى (C_f) والمنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x \mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ- الرسم:



(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.

(1) تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e \times x^2 e^{-x}) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = 2$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = -\infty$$

(2) أ الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x) = -2xe^{1-x} + x^2 e^{1-x} = (x^2 - 2x) e^{1-x} = x(x-2) e^{1-x}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -	0 +

الدالة f متناقصة على المجال $[0; 2]$ و متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[2; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -	0 +
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow 2 - 4e^{-1}$	$\nearrow 2$

(3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $(T) : y = -x + 2$.

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - x e^{1-x}$.

(1) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = -e^{1-x} + x e^{1-x} = (x-1) e^{1-x}$ ،

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$		-	0 +

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ و متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $h(1) = 0$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$.

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) :

لدينا : $f(x) - y = 2 - x^2 e^{1-x} + x - 2 = x(1-x) e^{1-x} = x h(x)$:

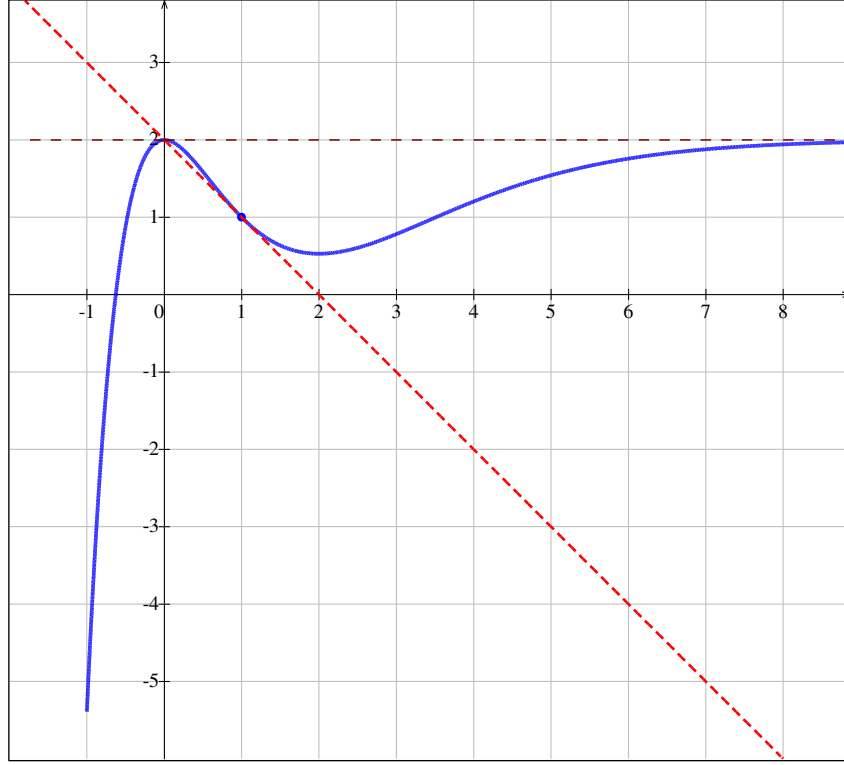
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		-	0 +	0 +
الوضع النسبي	(C_f) تحت (T)		(C_f) فوق (T)	(C_f) فوق (T)
	(C_f) يقطع (T)		(C_f) يقطع (T)	

(2) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و $]-\infty; 0[\subset]-0,7; -0,6[$ و $f(-0,7) \approx -0,7$
 $f(-0,6) \approx 0,2$

أي $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

(3) الرسم :



(4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x) = 2 + (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = 2 - x^2 e^{1-x} = f(x)$$

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 0$ و $x = 1$.

$$S = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (7 - 2e) u a$$

حل مقترح للتمرين 10 - باك 2017 - الدورة الإستثنائية -

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$.

$$\bullet g(1) = e^1 - e = 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

• إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	-

• إشارة $g(-x)$:

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$.

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

(2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e}{x} \right) = 0$ ومنه (C_f) والمنحنى (γ) ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$ متقاربان عند $-\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) :

لدينا : $f(x) - y = -\frac{e}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	-	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (γ)	(C_f) تحت (γ)	

(3) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ومن أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2} = \frac{-x^2 e^{-x} + e}{x^2} = \frac{-(x^2 e^{-x} - e)}{x^2} = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغير f الدالة :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+

ومنه الدالة f متزايدة على كل من المجالين $[-1; 0[$ و $]0; +\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty; -1]$.

جدول تغيرات الدالة f :

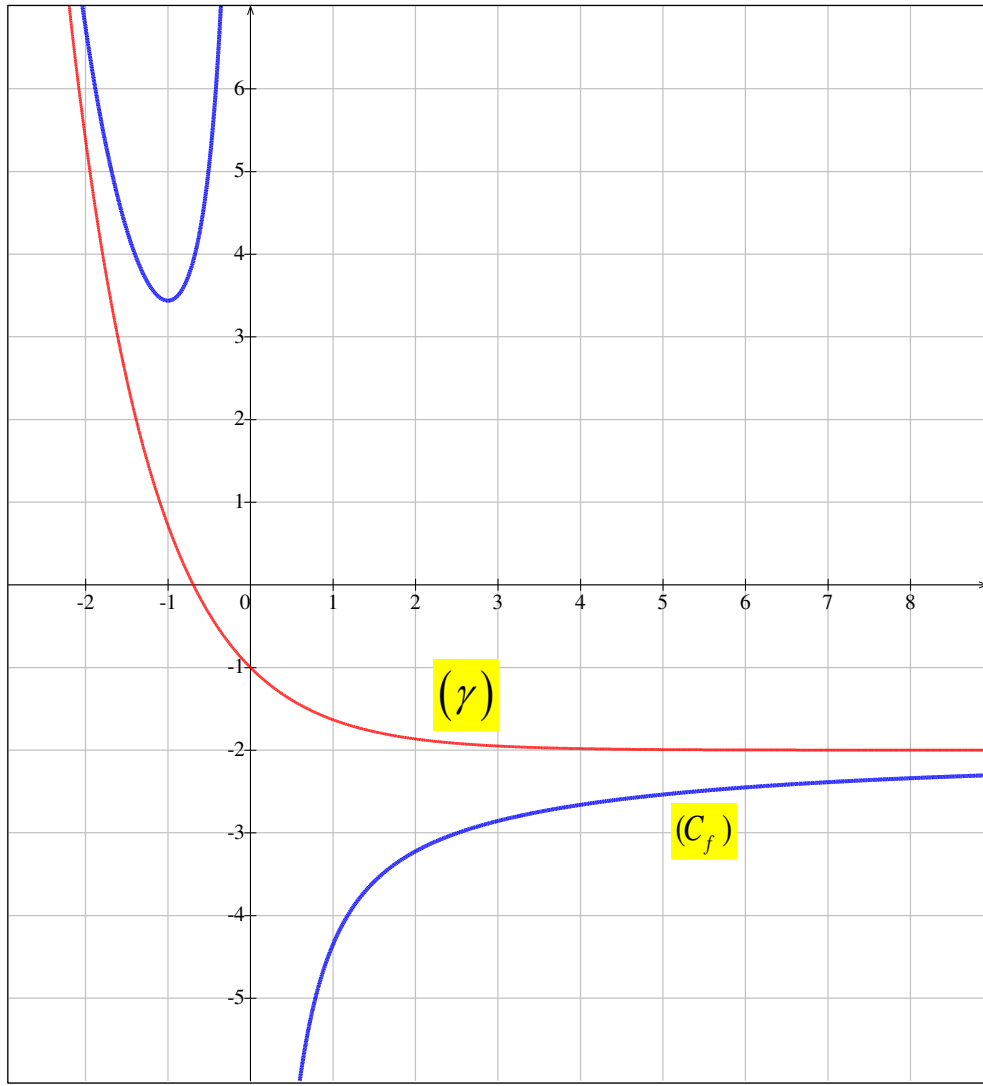
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$	$2e - 2$	$+\infty$	$+\infty$

(4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقاً من منحنى الدالة $e^x : x \mapsto e^x$:

لدينا : (γ) المنحنى ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$

ومن (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; -2)$ ، علماً أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة

$x \mapsto e^x$ بالنسبة لحامل محاور الترتيب .



(5) عدد طبيعي n ومساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:
 $x = -e^{n+1}$ و $x = -e^n$.

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} [f(x) - e^{-x} + 2] dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(-\frac{e}{x}\right) dx = -e \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(\frac{1}{x}\right) dx = -e [\ln|x|]_{-e^{n+1}}^{-e^n} = e$$

حساب العدد الحقيقي $l : l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016) = 2017e$.

حل مقترح للتمرين 11 (باك 2018)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$: حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty : \text{ لأن } , \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 : \text{ لأن } , \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + xe^{-x} - e^{-x}) = 2$$

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x-1) = (2-x)e^{-x}$:

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} > 0$ وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

الدالة g متناقصة على المجال $[2; +\infty[$ ومتزايدة على المجال $]-\infty; 2]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$2 + e^{-2}$	2

(3) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2[$ و $]-\infty; 2[\subset]-0.38; -0.37[$ و $g(-0.38) \approx -0.017$
 $g(-0.37) \approx 0.016$

أي $g(-0.38) \times g(-0.37) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$
 (1) أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0 \text{ ب-}$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) بحيث: $y = 2x + 1$: (Δ) .

لدينا: $f(x) - y = f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) / (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$ / (C_f) تحت (Δ)		

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = g(x)$ ،

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = 2 + (-1)e^{-x} + (-e^{-x})(-x) = 2 + (x - 1)e^{-x} = g(x)$$

- اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، ومنه نستنتج أن:

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; \alpha]$ ومتزايدة على المجال $[\alpha; +\infty[$.

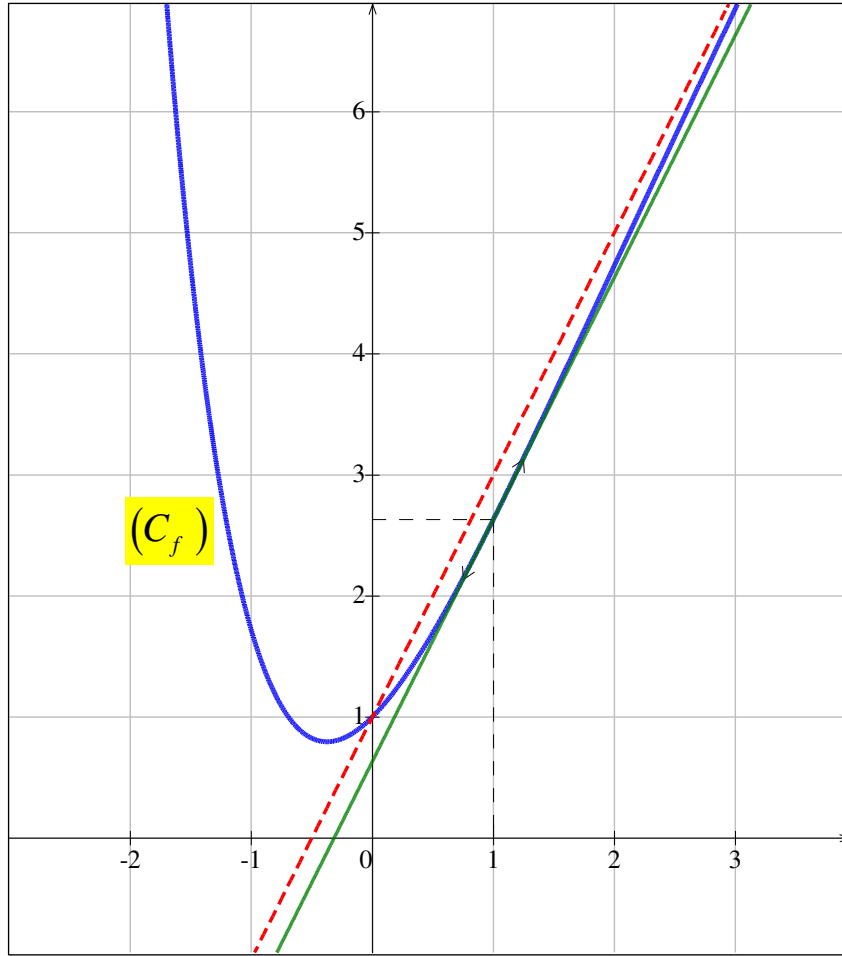
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ و منه $y = 2x + 1 - \frac{1}{e}$ هي معادلة (T) .

(4) الرسم :



(5) المناقشة البيانية :

$$x = (1-m)e^{-x} \text{ تكافئ } xe^{-x} = (1-m) \text{ تكافئ } -xe^{-x} = m-1 \text{ تكافئ } 2x+1-m-1 = 2x+1-xe^{-x}$$

أي $2x+1-xe^{-x} = 2x+m$ أي : $f(x) = 2x+m$ ← مناقشة ماثلة .

إذا كان $m \in \left[-\infty; 1 - \frac{1}{e}\right]$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m = 1 - \frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان $m \in \left]1 - \frac{1}{e}; 1\right]$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .

إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما .

(6) أ. تعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

الدالة $x \mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي فداالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = \int_1^x te^{-t} dt$

نضع $u(t) = t$ ، $v'(t) = e^{-t}$ و منه $u'(t) = 1$ ، $v(t) = -e^{-t}$ بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$F(x) = \left[-te^{-t}\right]_1^x - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} = (-x-1)e^{-x} + 2e^{-1}$$

ومنه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$ هي : $F(x) = (-x-1)e^{-x} + 2e^{-1}$.

بـ حساب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$

$$A = \int_1^3 ((2x + 1) - f(x)) dx = \int_1^3 x e^{-x} dx = F(3) - F(1) = 2e^{-1} - 4e^{-3} (u.a)$$

حل مقترح للتمرين 12 باك 2019

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

(1) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^x - e$

من أجل $x \in]-\infty; 1]$ ، يكون $e^x \leq e$ أي $g'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$.

من أجل $x \in [1; +\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $g'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

بـ إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ فإن 0 قيمة حدية صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - ex = g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

(3) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) = +\infty \end{cases} : \text{لأن} , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e \right) \right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}ex^2 \right) = -\infty \end{cases} : \text{لأن} , \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = -\infty$$

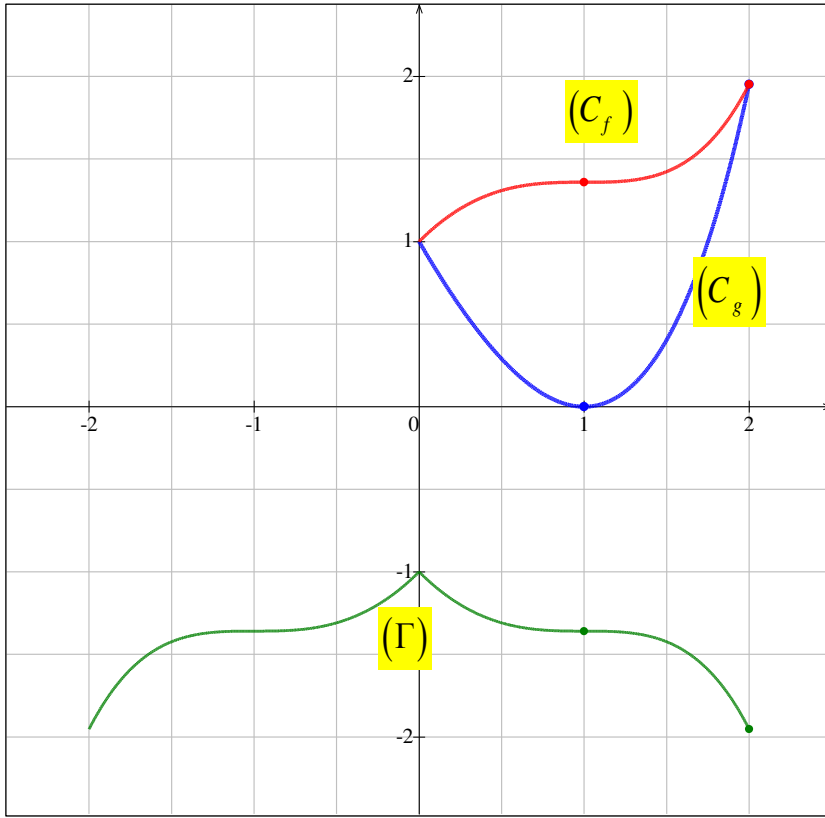
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

(4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 - (e^x - ex) = -\frac{1}{2}ex^2 + ex = ex \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	-	0	+	-
الوضع النسبي	(C_f) تحت (C_g)	(C_f) فوق (C_g)	(C_f) فوق (C_g)	(C_f) تحت (C_g)
	(C_f) يقطع (C_g)	(C_f) يقطع (C_g)	(C_f) يقطع (C_g)	(C_f) يقطع (C_g)
	في النقطة $A(0;1)$		في النقطة $B(2; e^2 - 2e)$	



(6) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_g) و (C_f) :

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}ex^2 + ex \right) dx = \left[-\frac{1}{6}ex^3 + \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^2 = -\frac{8}{6}e + 2e = \frac{2e}{3} (u.a)$$

ومنه $A = \frac{2e}{3} \times 4 = \frac{8e}{3} cm^2$

(7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$

أ- تبين أن الدالة h زوجية :

من أجل كل $x \in [-2; 2]$ ، $-x \in [-2; 2]$ و $h(-x) = \frac{1}{2}e(-x)^2 - e^{|-x|} = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|} = h(x)$ ومنه الدالة h زوجية .

ب- من أجل $x \in [0; 2]$ ، $h(x) + f(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^x + e^x - \frac{1}{2}ex^2 = 0$ ،

استنتاج كيفية رسم (Γ) إنطلاقاً من (C_f) :

من أجل $x \in [0; 2]$ ، $h(x) = -f(x)$ وبالتالى (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0; 2]$.
ولرسم (Γ) على المجال $[-2; 0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية .
الرسم : أنظر الشكل .

بالتوفيق للجميع