

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (06 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0 = 2$ و $u_0 + 5u_1 + 5u_3 = 102$

(1) بين أن : $u_1 + u_3 = 20$ و استنتج u_2

(2) أحسب u_1 و استنتج أن أساس المتتالية (u_n) هو 4

(3) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) أ/ أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

ب/ عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 162$

التمرين الثاني : (06 نقاط)

(1) أ/ عين بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل قيم n التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

ب/ استنتج بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل كل عدد طبيعي n

(2) عين باقي قسمة 17 على 5 و استنتج باقي قسمة العدد 17^{4k} على 5 حيث k عدد طبيعي

(3) استنتج أن العدد $17^{4k} + 2^{4k+3} + 6$ يقبل القسمة على 5 حيث k عدد طبيعي

(4) عين باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد : $2017^{2016} - 2^{49} + 61^{1954}$

التمرين الثالث : (08 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أنه من أجل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : $f(x) = -1 + \frac{a}{x-1}$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه

(2) أ/ عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب/ استنتج المستقيمان المقاربان للمنحني (C_f)

(3) أحسب $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة $A(2; 0)$.

(5) أحسب $f(0)$ ، أنشئ المماس (T) ، المستقيمين المقاربين ثم المنحني (C_f)

(6) أ/ أنشئ في نفس المعلم السابق المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$.

ب/ حل في $\mathbb{R}$ ، بيانيا المتراجحة $f(x) \leq x - 2$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (06 نقاط)

a ، b و c ثلاث أعداد صحيحة حيث $b \equiv 2[5]$ ، $a-b \equiv 2[5]$ ، $2a+c \equiv 4[5]$

(1) بين أن : $a \equiv 4[5]$ و $c \equiv -4[5]$

(2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $a \times b - 3c$ على 5

(3) أ/ بين أن : $a \equiv -1[5]$ و $c \equiv 1[5]$

ب/ أثبت أن العدد $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13$ مضاعف لـ 5

ج/ عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $a^2 + b^2 + c^2 + n \equiv 4[5]$ و $3 \leq n \leq 28$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

$(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية ذات اساس سالب حيث : $v_0 = 2$ و $v_2 = 18$

(1) أحسب v_1 واستنتج اساس المتتالية (v_n)

(2) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n = 2 \times (-3)^n$

(3) أ/ أحسب $(-3)^8$ و استنتج أن العدد 13122 حد من حدود المتتالية (v_n)

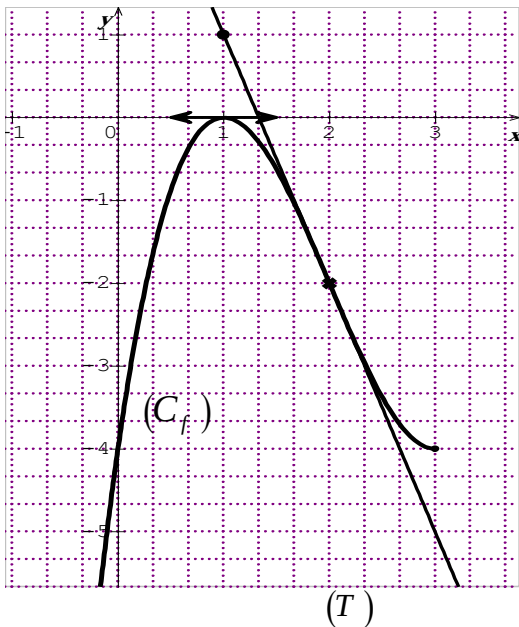
ب / أحسب قيمة المجموع : $2 + (-6) + 18 + \dots + 13122$

(4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $(-3)^n - 1$ مضاعف لـ 4

التمرين الثالث : (08 نقاط)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الجزء 1 : المنحني المقابل هو جزء من المنحني (C_f) ، والمستقيم (T) هو مماس للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2



بإستعمال المنحني (C_f) :

(1) عين $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f'(1)$ و $f'(2)$

(2) أكتب معادلة للمماس (T)

(3) ماذا تمثل النقطة ذات الفاصلة 2 بالنسبة (C_f) ، مع التعليل

الجزء 2 : نفرض أن : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

بإستعمال العبارة $f(x)$:

(1) أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب / ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

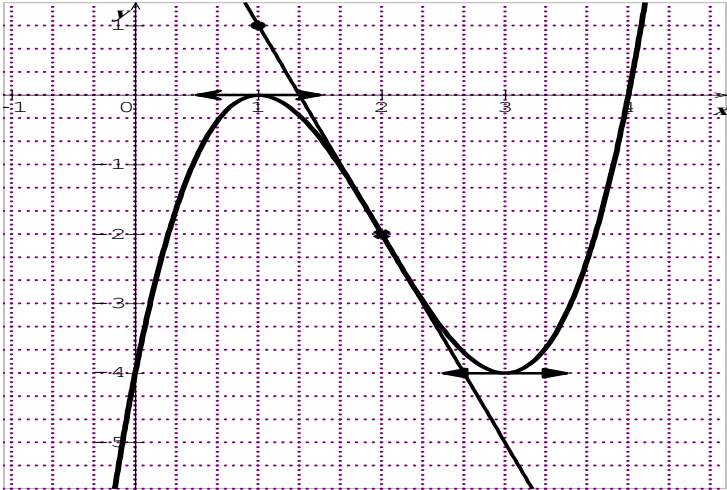
(2) تحقق أن النقطة ذات الفاصلة 2 نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

(3) أ/ أنشر العبارة : $(x-1)(x^2 - 5x + 4)$

(4) ب/ عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثم أكمل إنشاء المنحني (C_f)

العلامة		عناصر الإجابة
كاملة	مجزأة	
		<u>الموضوع الثاني</u>
		التمرين الأول: (06 نقاط)
		(1) نبين أن : $a \equiv 4[5]$ و $c \equiv -4[5]$ لدينا $b \equiv 2[5]$ و $a - b \equiv 2[5]$ ومنه خاصية الجمع نجد $a \equiv 4[5]$ لدينا $a \equiv 4[5]$ إذن $-2a \equiv -8[5]$ وبما أن $2a + c \equiv 4[5]$ فحسب خاصية الجمع نجد $c \equiv -4[5]$
0.5 ن 0.5+ ن		(2) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $a \times b - 3c$ على 5 لدينا $a \times b \equiv 3[5]$ و $-3c \equiv 2[5]$ فحسب خاصية الجمع نجد $a \times b - 3c \equiv 0[5]$ ومنه باقي القسمة الاقليدية للعدد $a \times b - 3c$ على 5 هو 0
0.5 ن 0.5+ ن		(3) أ/ نبين أن : $a \equiv -1[5]$ و $c \equiv 1[5]$ لدينا $a \equiv 4[5]$ ومنه $a \equiv 4 - 5[5]$ اي : $a \equiv -1[5]$ لدينا $c \equiv -4[5]$ ومنه $c \equiv -4 + 5[5]$ اي : $c \equiv 1[5]$ ب/ أثبات أن العدد $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13$ مضاعف لـ 5 لدينا $a \equiv -1[5]$ وبالتالي $[5] (-1)^{2017} = a^{2017}$ اي $a^{2017} \equiv -1[5]$ و لدينا $c \equiv 1[5]$ وبالتالي $c^{1438} \equiv 1[5]$ وعليه نجد $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13 \equiv 3 \times (-1) + 5 \times 1 + 13 [5] = 15[5]$ أي $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13 \equiv 15[5]$ ومنه $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13 \equiv 0[5]$ لان $15 \equiv 0[5]$ حسب خاصية التعدي
06 ن 1.5 ن		ج/ تعين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $a^2 + b^2 + c^2 + n \equiv 4[5]$ و $3 \leq n \leq 28$ لدينا $a^2 \equiv 1[5]$ و $b^2 \equiv 4[5]$ و $c^2 \equiv 1[5]$ ومنه $6 + n \equiv 4[5]$ معناه $a^2 + b^2 + c^2 + n \equiv 4[5]$ معناه $n \equiv -2[5]$ معناه $n \equiv 3[5]$ معناه $n \equiv 5k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) وبما أن $3 \leq n \leq 28$ فإن قيم العدد الطبيعي هي 3، 8 ، 13 ، 18 ، 23 و 28
		التمرين الثاني: (06 نقاط)
		(1) حساب v_1 واستنتاج q اساس المتتالية (v_n) — حسب الوسط الهندسي للحدين v_0 و v_2 لدينا $v_1^2 = v_0 \times v_2$ أي $v_1^2 = 36$ وبما أن اساس المتتالية سالب فإن $v_1 = -6$ — لدينا $q = \frac{v_1}{v_0}$ وبما أن $v_0 = 2$ و $v_1 = 6$ فإن $q = -3$
01 ن 0.5 ن		(2) نبين أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n = 2 \times (-3)^n$ عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) تكتب : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 2 \times (-3)^n$ لان $q = -3$ و $v_0 = 2$
06 ن 0.5 ن		(3) أ/ حساب $(-3)^8$ و استنتاج أن العدد 13122 حد من حدود المتتالية (v_n) — $(-3)^8 = 6561$ — $v_n = 13122$ يعني $v_n = 2 \times (-3)^n$ يعني $n = 8 \in \mathbb{N}$ ب / حساب قيمة المجموع : $2 + (-6) + 18 + \dots + 13122$ لدينا $2 + (-6) + 18 + \dots + 13122 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_8$ اي

العلامة		عناصر الإجابة
كاملة	مجزأة	
08 ن	1.5 ن	$2+(-6)+18+\dots+13122=9642$ ومنه $2+(-6)+18+\dots+13122=\frac{v_0}{q-1}\left((-3)^9-1\right)$ (4) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $-1-(-3)^n$ مضاعف لـ 4 من أجل $n=0$ لدينا $-1-(-3)^0=0$ أي 0 مضاعف لـ 4 محققة نفرض أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $-1-(-3)^n$ مضاعف لـ 4 (فرضية التراجع) ونبرهن أن : $-1-(-3)^{n+1}$ مضاعف لـ 4 لدينا فرضا $-1-(-3)^n$ مضاعف لـ 4 يعني $-1-(-3)^n=4k$ حيث $(k \in \mathbb{N})$ ومنه $-1-(-3)^{n+1}=-3(-3)^n-1=-3(-3)^n+3-3-1$ أي $-1-(-3)^{n+1}=-3((-3)^n-1)-4=-3(4k)-4=4(-3k-1)$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $-1-(-3)^n$ مضاعف لـ 4
	0.25 3× 0.5+ ن	التمرين الثالث : (08 نقاط) الجزء 1 : باستعمال المنحني (C_f) (1) $f(1)=0$ ، $f(2)=-2$ ، $f'(1)=0$ و $f'(2)$ هو معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 والذي يشمل النقطتين ذات الاحداثيات (1;1) و (2;-2) ومنه $f'(2)=-3$ (2) كتابة معادلة للمماس (T) أي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=-3x+4$ (3) ماذا تمثل النقطة ذات الفاصلة 2 بالنسبة (C_f) بما أن المنحني (C_f) يخرق مماسه (T) في النقطة ذات الفاصلة 2 فإن هذه النقطة تمثل نقطة انعطاف للمنحني (C_f)
	0.5 2× ن	الجزء 2 : نفرض أن : $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$ باستعمال العبارة $f(x)$: (1) <u>أ/ حساب نهايتي الدالة</u> f : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-\infty$ ب / <u>دراسة اتجاه تغير الدالة</u> f الدالة f قابلة للاشتقاق على و $f'(x)=3x^2-12x+9$ $\Delta=36$ ، $x_1=1$ ، $x_2=3$ الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;1]$ و $[3;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;3]$
	0.5 0.75 ن	<u>جدول تغيرات الدالة</u> f أ/ نشر العبارة : $(x-1)(x^2-5x+4)$ $(x-1)(x^2-5x+4)=x^3-6x^2-9x-4$ ب/ تعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل $f(x)=0$ يعني $(x-1)(x^2-5x+4)=0$ يعني $x=1$ أو $x=4$ ومنه $(C_f) \cap (xx')=\{(1;0);(4;0)\}$ (2) نبين أن النقطة ذات الفاصلة 2 نقطة انعطاف للمنحني (C_f) الدالة قابلة للاشتقاق مرتين على و $f''(x)=6x-12$ - $f''(x)=0$ يعني $x=2$

العلامة		عناصر الإجابة
كاملة	مجزأة	
0,5 ن	ن	— الدالة " f موجبة على المجال $[2; +\infty[$ وسالبة على المجال $]-\infty; 2]$ اذن : بماإن الدالة " f تنعدم عند 2 وتغير اشارتها عند 2 فإن النقطة ذات الفاصلة 2 نقطة انعطاف للمنحني (C_f) أكمال إنشاء المنحني (C_f) 
		الموضوع الاول التمرين الأول: (06 نقاط) (u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0 = 2$ و $u_0 + 5u_1 + 5u_3 = 102$ (1) نبين أن : $u_1 + u_3 = 20$ و استنتاج u_2 — $u_0 + 5u_1 + 5u_3 = 102$ يعني $5(u_1 + u_3) = 100$ اي $u_1 + u_3 = 20$ 0,75 — حسب الوسط الحسابي للحددين u_1 و u_3 لدينا $u_1 + u_3 = 2u_2$ اي $u_2 = 10$ 0,75 (2) حساب u_1 و استنتاج أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 — حسب الوسط الحسابي للحددين u_0 و u_2 لدينا $u_0 + u_2 = 2u_1$ اي $u_1 = 6$ 0,75 — لدينا $r = u_1 - u_0$ أي $r = 4$ 0,75 (3) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n 01 ن $u_n = 2 + 4n$ ومنه $u_n = u_0 + nr$ (4) أ/ حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ 01 ن عدد الحدود هو $n+1$ $S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ ومنه $S_n = 2(n+1)^2$ ب/ تعيين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 162$ 01 ن $S_n = 162$ يعني $(n+1)^2 = 81$ أي $n = 8$ أو $n = -10 \notin \mathbb{N}$ مرفوض

العلامة		عناصر الإجابة
كاملة	مجزأة	
06 ن		التمرين الثاني : (06 نقاط) (1) أ/ <u>تعيين بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل قيم n التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ،</u> $2^0 \equiv 1[5] , 2^1 \equiv 2[5] , 2^2 \equiv 4[5] , 2^3 \equiv 3[5] \text{ و } 2^4 \equiv 1[5]$ ومنه بواقي القسمة الاقليدية على 5 هي 1، 2، 3 و 4 ب/ <u>استنتاج بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل كل عدد طبيعي n.</u> من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $2^{4k} \equiv 1[5] , 2^{4k+1} \equiv 2[5] , 2^{4k+2} \equiv 4[5] \text{ و } 2^{4k+3} \equiv 3[5]$ ومنه بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل كل عدد طبيعي n هي 1، 2، 3 و 4 (2) <u>تعيين باقي قسمة 17 على 5 و استنتاج باقي قسمة العدد 17^{4k} على 5 حيث k عدد طبيعي</u> لدينا $17 \equiv 2[5]$ بمأن $17 \equiv 2[5]$ فإن $17^{4k} \equiv 2^{4k} [5]$ ومنه $17^{4k} \equiv 1[5]$ لان $2^{4k} \equiv 1[5]$ حسب خاصية التعدي حيث k عدد طبيعي (3) <u>استنتاج أن العدد $17^{4k} + 2^{4k+3} + 6$ يقبل القسمة على 5 حيث k عدد طبيعي</u> لدينا من أجل كل k عدد طبيعي ، $17^{4k} \equiv 1[5]$ و $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ ومنه $17^{4k} + 2^{4k+3} + 6 \equiv 10[5]$ أي $17^{4k} + 2^{4k+3} + 6 \equiv 0[5]$ (4) <u>تعيين باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد : $2017^{2016} - 2^{49} + 61^{1954}$</u> لدينا : $61 \equiv 1[5]$ ومنه $61^{1954} \equiv 1[5]$ ولدينا $2017 \equiv 2[5]$ وبمأن $2016 = 4 \times 504$ (2016 من الشكل $4k$) ومنه $2017^{2016} \equiv 2^{4 \times 504} [5] \equiv 1[5]$ أي $2017^{2016} \equiv 1[5]$ ولدينا $2^{49} \equiv 2[5]$ لان $49 = 4 \times 12 + 1$ أي 49 من الشكل $4k + 1$ وبالتالي $2017^{2016} - 2^{49} + 61^{1954} \equiv 1 - 2 + 1[5] \equiv 0[5]$ أي $2017^{2016} - 2^{49} + 61^{1954} \equiv 3[5]$ ومنه باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد : $2017^{2016} - 2^{49} + 61^{1954}$ هو 3
08 ن		التمرين الثالث : (08 نقاط) نعتبر الدالة f المعرفة على $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty [$ كما يلي : $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$ (1) <u>نبين أنه من أجل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن $f(x) = -1 + \frac{a}{x-1}$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه</u> لدينا $f(x) = -1 + \frac{a}{x-1}$ يعني $f(x) = \frac{-x+1+a}{x-1}$ ومنه $a=1$ وبالتالي : $f(x) = -1 + \frac{1}{x-1}$ (2) <u>أ/ تعيين النهايات :</u> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

العلامة		عناصر الإجابة
كاملة	مجزأة	
		ب/ استنتاج المستقيمان المقاربين للمنحني (C_f)
	0,5 ن	 $y = -1$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$
	01 ن	 $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني (C_f)
	01 ن	(3) حساب $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f
	01 ن	الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ و $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ اي $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$
	01 ن	(4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة $A(2;0)$
	0,25 0,25 01 ن	$y = -x + 2$ أي $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
	0,25 0,25 01 ن	(5) $f(0) = -2$ ، إنشاء المماس (T) ، المستقيمين المقاربين ثم المنحني (C_f)
	0,25 0,75	(6) أ/ إنشاء في نفس المعلم السابق المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$
		ب/ حل في $\mathbb{R}$ ، بيان المتراجحة $f(x) \leq x - 2$
		$S = [0; 1[\cup [2; +\infty[$

