

نص التمرين:

- I/** عين عبارة الدالة f الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $2y'' + y' - 1 = 0$ الذي يحقق: $f(2) = 2$ و $f'(2) = 0$.
- II/** نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1/ أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
 - 2/ ا/ بين أن المستقيم (D) ذو معادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.
ب/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .
 - 3/ ا/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x$.
ب/ أحسب $f(6)$ ثم أنشئ بدقة كلا من (D) و (Δ) و (C_f) . (وحدة الطول 2 cm)
 - 4/ ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $(f(x))^2 = 4e^{-x+2} + (x-2)^2 + 4(x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1}$.
ب/ بين أن: $\int_0^2 (4e^{-x+2} + (x-2)^2) dx = 4e^2 - \frac{4}{3}$.
ج/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $\int_0^2 (x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1} dx = -4$.
د/ استنتج بـ cm^3 الحجم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور الفواصل على المجال $[0; 2]$.
- III/** نعرّف متتالية (u_n) بحدّها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2e^{-\frac{1}{2}u_n+1} + u_n - 2$.
- 1/ ا/ مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.
ب/ ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
 - 2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 6$.
 - 3/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة وعيّن نهايتها.
- IV/** نعتبر n عدداً طبيعياً. نضع: $A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$ ، ونعرّف متتالية (v_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = A(n) - 4e$.
- 1/ أكتب $A(n)$ بدلالة n وأعط تفسيره الهندسي، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$.
 - 2/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\int_n^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx \geq 0$ ثم استنتج رتبة المتتالية (v_n) .
 - 3/ بين أن (v_n) متتالية هندسية معينة أساسها وحدّها الأول.
 - 4/ ا/ أحسب بدلالة n العدد I_n بحيث: $I_n = \int_0^n (x-2) dx$.
ب/ أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx + \dots + \int_0^n f(x) dx$.
(إرشاد: من أجل كل عدد طبيعي n : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \frac{e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}x} \right) \quad \text{لأن } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-e \frac{e^t}{t} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

إيجاد المتغير: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

$$f'(x) = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{1}{2}x+1} + 1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}x+1}$$

$$1 - e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0 \quad \text{لأن}$$

$$1 > e^{-\frac{1}{2}x+1} \quad \text{مع}$$

$$0 > -\frac{1}{2}x+1 \quad \text{أي}$$

$$-1 > -\frac{1}{2}x \quad \text{أو}$$

$$2 < x \quad \text{لأن}$$

$$1 - e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0 \quad \text{مع}$$

$$1 = e^{-\frac{1}{2}x+1} \quad \text{أي}$$

$$0 = -\frac{1}{2}x+1 \quad \text{أي}$$

$$x = -\frac{1}{2} = -0.5 \quad \text{لأن}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

نلاحظ أن f متزايدة على $]-\infty, 2]$ و متناقص على $[2, +\infty[$.

1) $y = x - 2$ (D) مع C_1 (C_f)

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2 \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0 \quad \text{و}$$

2) $y = x - 2$ (D) مع C_2 (C_f)

نلاحظ أن f متزايدة على $]-\infty, 2]$ و متناقص على $[2, +\infty[$.

$$f(x) - (x - 2) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0 \quad \text{لأن } x \in \mathbb{R}$$

3) $y = x - 2$ (D) مع C_3 (C_f)

$$f(x) - x = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} - 2 = 2(e^{-\frac{1}{2}x+1} - 1) \quad \text{لأن } x \in \mathbb{R}$$

ثانوية راشدي مكناس
الموسم: 2025/2024
المادة: الرياضيات - 03
الصفحة: 1

(I) تعيين C_1 في كل حالة خاصة

$$2y'' + y' - 1 = 0 \quad \text{المعادلة}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}y' + \frac{1}{2} \quad \text{مع}$$

$$f'(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} \quad \text{لأن}$$

$$f'(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + 1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad \text{لأن}$$

$$C_1 e^{-1} + 1 = 0 \quad \text{مع}$$

$$f(x) = -e^{-\frac{1}{2}x} + 1 = -e^{-\frac{1}{2}x+1} + 1 \quad \text{لأن}$$

$$f(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x+1} + x + C_2 \quad \text{مع}$$

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R})$$

$$2e^0 + 2 + C_2 = 2 \quad \text{مع}$$

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2 \quad \text{لأن}$$

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2 \quad \text{لأن } D_f = \mathbb{R} \quad \text{(II)}$$

1) دراسة تغير f على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2e^t = 0 \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 \frac{e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty$$

لغاً ٥ المتغير 2

$$v_{n+1} - v_n = A(n+1) - 4e - A(n) + 4e$$

$$= \int_0^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx - \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$$

$$= \int_n^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx > 0$$

فإن v_n متزايدة لأن $v_{n+1} - v_n > 0$

(3) - v_n متزايدة (ب) v_n متزايدة

$$v_{n+1} = A(n+1) - 4e = -4e^{-\frac{1}{2}(n+1)+1}$$

$$= -4e^{-\frac{1}{2}n+1} e^{-\frac{1}{2}} = v_n (e^{-\frac{1}{2}})$$

لذا v_n متناقص لأن $q = e^{-\frac{1}{2}} < 1$

$$v_0 = A(0) - 4e = 0 - 4e$$

$$v_0 = -4e$$

(4) - I_n متناقص

$$I_n = \int_0^n (x-2) dx = \left[\frac{1}{2}(x-2)^2 \right]_0^n$$

$$= \frac{1}{2}(n-2)^2 - \frac{1}{2}(-2)^2$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + 2 - 2n - 2$$

$$= \frac{1}{2}n^2 - 2n$$

(5) - S_n متناقص

$$S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx$$

لذا S_n متناقص لأن $f(x) > 0$

$$\int_0^n f(x) dx = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx + \int_0^n (x-2) dx$$

$$= A(n) + I_n = v_n + 4e + I_n$$

$$S_n = (v_0 + 4e + \frac{1}{2}(0)^2 - 2(0)) + (v_1 + 4e + \frac{1}{2}(1)^2 - 2(1)) + \dots + (v_n + 4e + \frac{1}{2}(n)^2 - 2(n))$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (4e + 4e + \dots + 4e)$$

$$+ \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (-2 + (-4) + \dots - 2n)$$

- 03 متناقص

(3) - v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

$$v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n$$

وإذا حسبنا مساحة $(f(x) - x)$ فإننا نلاحظ

$$f(x) - x = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} - x$$

$$f(x) - x < 0$$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

(4) - v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

لذا v_n متناقص لأن $v_{n+1} - v_n < 0$

$$S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx + \dots + \int_0^n f(x) dx.$$

[0, n] : 1st term, 2nd term, 3rd term, ...

$$\int_0^n f(x) dx = \int_0^n (2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x-2) dx = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx + \int_0^n (x-2) dx.$$

$$= A(n) + I_n = \left[2e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_0^n$$

0.5

$\omega_0 = 0$, $r = -2$: $\omega_n = -2n$! $\omega_n = -2n$! $\omega_n = -2n$! $\omega_n = -2n$!

1200

$$S_n = \left(2e^{-\frac{1}{2}(1)+1} + \frac{1}{2}(1)^2 + \omega_1 \right) + \left(2e^{-\frac{1}{2}(2)+1} + \frac{1}{2}(2)^2 + \omega_2 \right) + \dots$$

$$+ \dots + \left(2e^{-\frac{1}{2}(n)+1} + \frac{1}{2}(n)^2 + \omega_n \right)$$

$$= (2e^{-\frac{1}{2}(1)+1} + 2e^{-\frac{1}{2}(2)+1} + \dots + 2e^{-\frac{1}{2}(n)+1}) + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \right)}_{\frac{1}{2} \times n} + \frac{1}{2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$+ (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$$

0.75

$$= 2e^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - 9^{-\frac{1}{2}}}{1 - 9^{-\frac{1}{2}}} \right) + 4e^{-\frac{1}{2}}(n) + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + (\omega_1 + \omega_n) \frac{n}{2}.$$

$$= -4e^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}n}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \right) + 4en + \frac{1}{12} (n)(n+1)(2n+1) + (-2-2n) \frac{n}{2}$$

$2e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}} \times 9$

$$S_n = \left(\frac{-4e^{-\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \right) (1 - e^{-\frac{1}{2}n}) + 4en + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \left(\frac{-4e^{-\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \right) (1 - e^{-\frac{1}{2}n}) + \frac{1}{6}n^3 - \frac{3}{4}n^2 + \left(\frac{48e - 11}{12} \right)n.$$