



المستوى: الثالثة ثانوي علوم تجريبية

ديسمبر 2019

الاختبار الأول في الرياضيات

المدة: 5، 2 سا

التمرين الأول

(U_n) متتالية معرفة كما يلي $U_0 = e$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - \sqrt{U_n} = 0$

نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \ln(U_n)$

1. بين أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_n > 1$
2. أدرس رتبة المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة.
3. بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.
4. أحسب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n .
5. أحسب $P_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ و $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

التمرين الثاني:

I. g الدالة المعرفة بـ $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g
2. أ. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α منه $1.3 < \alpha < 1.4$

ب. شكل جدول تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

II. نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x)$

1. أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ فسر النتيجة بيانيا
- أحسب نهاية f عند $+\infty$
- ب. أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها
2. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f
- ب. حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)
3. بين أن $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$ استنتج حصر $f(\alpha)$
4. بين أنه توجد نقطة من البيان (C_f) يكون المماس فيها (T) موازيا لـ (Δ) ثم أكتب معادلة (T)
5. أ. أرسم (T) (Δ) ثم (C_f)
- ب. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m

عدد حلول المعادلة $(C_f) = x + m$

III. الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ $h(x) = -x - \frac{1}{x} + x$ $h(x)$

1. بين أن من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ $h'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$

2. باستعمال السؤال 2-ب (الجزء I) حدد إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

استنتج اتجاه تغير h ثم شكل جدول تغيراتها

انتهى

التصحيح النموذجي

العلامة		الحل	رقم التمرين							
10	1	من أجل كل n طبيعي $U_n > 1$ (البرهان بالتراجع)	التمرين 1							
	2	$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n} - U_n$ $= \frac{(\sqrt{U_n} - U_n)(\sqrt{U_n} + U_n)}{(\sqrt{U_n} + U_n)} = \frac{U_n - U_n^2}{(\sqrt{U_n} + U_n)} = \frac{U_n(1 - U_n)}{(\sqrt{U_n} + U_n)} < 0$ ومنه (U_n) متناقصة لأن $U_n > 1$								
	1	(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي مقاربة								
	1	$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) = \ln \sqrt{U_n} = \frac{1}{2} \ln U_n = \frac{1}{2} V_n$ (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = 1$								
	1	$U_n = e^{V_n} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n V_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$								
	1	$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ $P_n = e^{V_0} \times e^{V_1} \dots e^{V_{n-1}}$ $= e^{V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}}$ $= e^{S_n}$								
	1	$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$	التمرين 2							
	2	$g(x) = 0$ تقبل حل وحيد (مبرهنة القيم المتوسطة)								
	1 1	جدول التغيرات <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td>0</td><td></td></tr></table>		x	0	α	$+\infty$	$g(x)$		0
	x	0	α	$+\infty$						
$g(x)$		0								

جدول الإشارة

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

1

II. (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$;

$x=0$ مستقيم مقارب.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) الدالة المشتقة

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

10

2

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = 0$

$y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

$f(x) - x = \frac{1 - \ln x}{x}$

الوضعية النسبية

x	0	E	$+\infty$
$f(x)-x$	+	0	-
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(e; e)$	(C_f) تحت (Δ)

0.5 ...

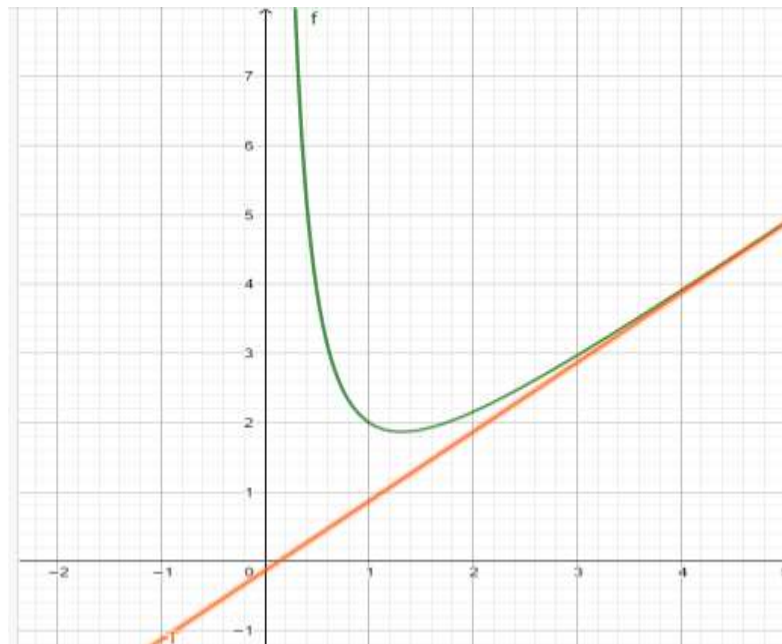
$f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$ (3)

الحصر $1.83 < f(\alpha) < 2.09$ 0.5

$$x = e^2 \text{ يكافئ } f'(x) = 1 \quad (4)$$

$$0.5 \dots\dots\dots \text{معادلة المماس } y = x - \frac{1}{e^2}$$

$$0.5 \dots\dots\dots 6. \text{ أ. رسم } (T) (\Delta); \text{ ثم } (C_f)$$



0.5 المناقشة البيانية

$$m < -\frac{1}{e^2} \text{ لا توجد حلول}$$

$$m = -\frac{1}{e^2} \text{ حل مضاعف}$$

$$-\frac{1}{e^2} < m < 0 \text{ حلين}$$

$$m > 0 \text{ حل وحيد}$$

$$h'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$0.5 \dots\dots\dots g\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ يكافئ } \frac{1}{x} = \alpha \text{ ومنه } x = \frac{1}{\alpha}$$

$$g\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \text{ يكافئ } \frac{1}{x} > \alpha \text{ ومنه } 0 < x < \frac{1}{\alpha}$$

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$h'(x)$			

0.5