

ملخص

الربح في الوقت مع الصديق في الرياضيات

★ الدالة اللوغاريتمية



أقدم لـخوانبي الأساتذة وأبنائي الطلبة هذا العمل المتواضع والمتمثل في
ملخص الربح في الوقت مع الصديق في الرياضيات في الدالة اللوغاريتمية
للسنة الثالثة ثانوي جميع الشعب العلمية :

علوم تجريبية ★ رياضيات ★ تقني رياضي

للتحضير الممتاز للبكالوريا.



موقع تربية أونلاين

يتضمن هذه الملخص :

الدالة اللوغاريتمية.

دراسة الدوال من الشكل $x \mapsto \ln(u(x))$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

لا تنسونا من صالح الدعاء للوالدين الكريمين ولي. محبتكم في الله الأستاذ : فراحتية المحفوظ



السنة الدراسية : 2022/2021

آخر تحديث : 2021/12/16

1

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1.1

اللوغاريتم النيبيري لعدد:

مبرهنة وتعريف

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث: $e^b = a$ يسمى هذا العدد اللوغاريتم النيبيري للعدد a ونرمز له بالرمز " $\ln a$ ".

2.1

تعريف الدالة $\ln$:

تعريف

نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز لها بالرمز $\ln$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ العدد الحقيقي $\ln(x)$.

خواص

* من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $x = e^y$ معناه $y = \ln x$.
 * من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$.
 ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln(e^x) = x$.
 * بما أن $e^0 = 1$ فإن $\ln 1 = 0$.
 وبما أن $e^1 = e$ فإن $\ln e = 1$.

★ ملاحظة:

✓ نقول أن الدالة " $\ln$ " هي الدالة العكسية لـ " $\exp$ ".

خاصية

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية واللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصف الأول).

3.1

خواص الدالة اللوغاريتمية:

خواص

من أجل a و b عددين حقيقيين $]0; +\infty[$ ، و n عدداً صحيحاً نسبي.

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) *$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) *$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) *$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a) *$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a) *$$

★ ملاحظة:

✓ إذا كان x عدد حقيقي غير معدوم فإن $\ln(x^2) = 2 \ln(|x|)$

4.1

دراسة الدالة اللوغاريتمية:

❖ اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية:

خاصية

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

نتائج

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$:

$\ln a > \ln b$ يعني أن $a > b$ *

$\ln a = \ln b$ يعني أن $a = b$ *

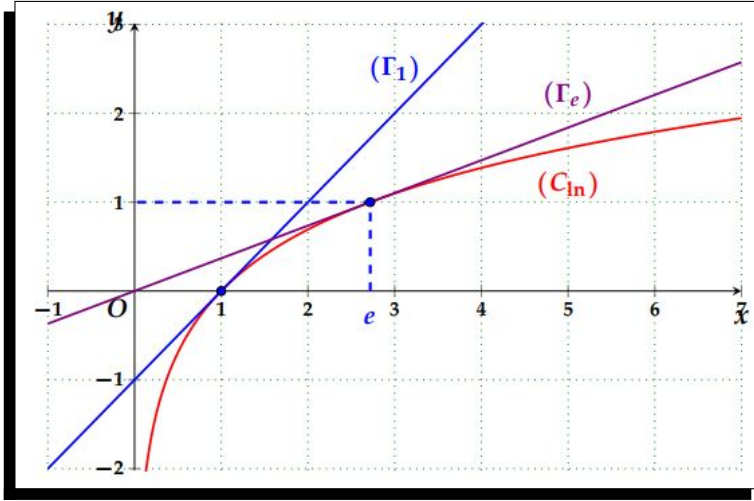
★ حالات خاصة:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$\ln x > 0 \text{ يعني أن } e^{\ln x} > e^0 \text{ وعليه } x > 1. \quad \checkmark$$

$$\ln x < 0 \text{ يعني أن } e^{\ln x} < e^0 \text{ وعليه } 0 < x < 1. \quad \checkmark$$

$$\ln x = 0 \text{ يعني أن } e^{\ln x} = e^0 \text{ وعليه } x = 1. \quad \checkmark$$



5.1 حل المعادلات والمتراجحات:

طريقة

حل معادلة من الشكل $\ln[u(x)] = a$

(متراجحة من الشكل $\ln[u(x)] < a$)

① نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة).

② نحل في D المعادلة $u(x) = e^a$

• (المتراجحة $u(x) < e^a$)

طريقة

حل معادلة من الشكل $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$

(متراجحة من الشكل $\ln[u(x)] < \ln[v(x)]$)

① نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة).

② نحل في D المعادلة $u(x) = v(x)$

• (المتراجحة $u(x) < v(x)$)



موقع تربية أونلاين

❖ النهايات:

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad * \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

❖ الاشتقاقية والاستمرارية:

خاصية

الدالة "ln" مستمرة على المجال $]0; +\infty[$.

خاصية

الدالة "ln" قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$
ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

❖ جدول التغيرات:

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

❖ التمثيل البياني:

المنحنى $(C_{\ln})$ الممثل للدالة $\ln$ يقبل حامل محور الترتيب كمستقيم مقارب.

المنحنى $(C_{\ln})$ الممثل للدالة $\ln$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته $y = x - 1$.

باستعمال تعريف العدد المشتق نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \ln'(1) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h + 1)}{h} = \ln'(1) = 1 \quad \text{أو}$$

الدالة $x \mapsto x$ هي أحسن تقريب تألفي للدالة

$x \mapsto \ln(x + 1)$ بجوار 0.

أي من أجل كل x قريب من 0 لدينا: $\ln(x + 1) \simeq x$

7.1 دراسة دالة اللوغاريتم العشري:

تعريف

نسمي "دالة اللوغاريتم العشري" الدالة التي يرمز إليها بالرمز $\log$ والمعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

★ ملاحظة:

✓ خواص دالة اللوغاريتم العشري نفسها خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

✓ جدول التغيرات دالة اللوغاريتم العشري:

x	0	1	10	$+\infty$
$\log'(x)$			+	
$\log(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

خاصية

✓ إذا كان x عدد حقيقي حيث: $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فإن: $n \leq x \log(x) \leq n+1$

8.1 التزايد المقارن بين $\ln x$ ، e^x و x^n :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{\ln x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{e^x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$

6.1 دراسة الدالة $\ln \circ u$ ($x \mapsto \ln[u(x)]$):❖ مجموعة تعريف الدالة $\exp \circ u$:

برهنة

✓ نضع: $f(x) = \ln[u(x)]$ حيث u دالة عددية معرفة وموجبة على مجال D_u . مجموعة تعريف الدالة f هي نفسها مجموعة تعريف الدالة u ، أي: $D_f = D_u$.

❖ النهايات:

برهنة

✓ لنكن a ، b و c أعداد حقيقية إما منتهية أو $-\infty$ أو $+\infty$. نعتبر الدوال التالية: u ، $\ln$ و f حيث $f = \ln \circ u$ و u معرفة وموجبة على مجال I من $\mathbb{R}$. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} \ln x = c$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

❖ اتجاه تغير الدالة $\ln \circ u$:

برهنة

✓ إذا كانت u دالة معرفة وموجبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغير على I .

❖ مشتقة الدالة $\ln \circ u$:

برهنة

✓ إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة $\ln \circ u$ قابلة للإشتقاق على I . ولدينا من أجل كل x من I ، $(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. من أجل كل x من I ، $(\ln \circ |u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

2

المعادلات التفاضلية

تعريف: المعادلة التفاضلية هي معادلة المجهول فيها دالة نرمن إليها غالبا بالرمز y ، z ، ... كل معادلة تشمل الدالة ومشتقتها نسميها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى. حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ يعني البحث عن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق: $f'(x) = af(x) + b$.

1.2 المعادلات التفاضلية من الشكل

$$y' = ay \text{ مع } a \neq 0$$

مبرهنة

a عدد حقيقي غير معدوم. حلول المعادلة $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^x$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت.

2.2 المعادلات التفاضلية من الشكل

$$y' = ay + b \text{ مع } a \neq 0$$

مبرهنة

a عدد حقيقي غير معدوم. حلول المعادلة $y' = ay + b$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^x - \frac{b}{a}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت.

خاصية

من أجل كل ثنائية الأعداد حقيقية $(x_0; y_0)$ ، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ تقبل حلا وحيدا يحقق: $f(x_0) = y_0$.

3

دوال القوى

1.3 قوى عدد حقيقي موجب:

تعريف

نضع $a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a > 0$ و b كيفي.

تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما. نسمي الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ الدالة الأسية ذات الأساس a .

4

دالة الجذر النوني

مبرهنة وتعريف

من أجل كل عدد حقيقي موجب a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b يحقق: $b^n = a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a ونرمز له بـ: $\sqrt[n]{a}$. تسمى الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ حيث: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ دالة الجذر النوني.

خاصية

من أجل كل عدد حقيقي موجب a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا: $\sqrt[n]{x} = a^{\frac{1}{n}} = e^{a \ln(\frac{1}{n})}$.

إذا أردت الإستسلام، تذكر مجهوداتك طوال كل هذه السنين.... عد وحاول مجددا.

😊 بالتوفيق في شهادة البكالوريا 😊