مجلة العبقري في الرياضيات (التّرتيب –المجالات –القيمة المطلقة)

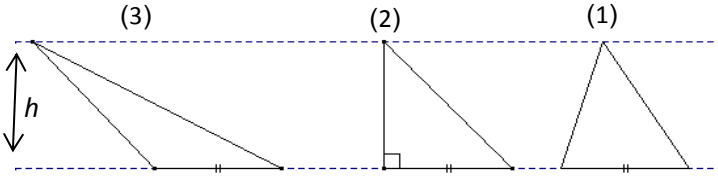
الملخص // الشعبة: الأولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا.

دروس: حول التّرتيب –المجالات –القيمة المطلقة// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 01 ع.

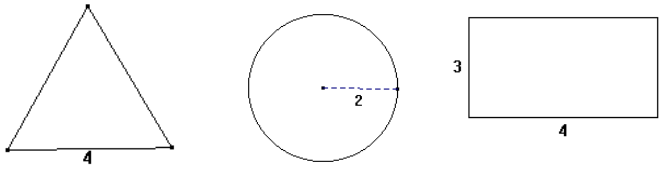
❶ التّرتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية:

النشاط 01 ص25:

1) قارن مساحات المثلثات الآتية ذات نفس القاعدة b والمرسومة على شريط عرضه h:



2) أ) رتّب تصاعديا، دون استعمال حاسبة، محيطات المستطيل والدائرة والمثلث المتقايس الأضلاع الآتية:



ب) نفس السؤال السّابق مع استبدال المحيطات بالمساحات.

حل النشاط:

1) **مقارنة مساحات المثلثات:**

تذكير:

$$\text{مساحة مثلث} = \frac{\text{الإرتفاع} \times \text{طول القاعدة}}{2} = \frac{1}{2}(\text{الإرتفاع} \times \text{طول القاعدة}).$$

إذن: المثلثات متساوية من حيث المساحة $S_1 = S_2 = S_3$

لأنّ: لها نفس طول القاعدة b والارتفاع h.

2) **أ) ترتّيب تصاعديا، دون استعمال حاسبة، محيطات المستطيل والدائرة والمثلث المتقايس الأضلاع:**

ليكن P_1 محيط المستطيل، وَ P_2 محيط الدائرة، وَ P_3 محيط المربع؛ نجد:

$$\begin{cases} P_1 = (3+4) \times 2 = 14 \\ P_2 = 2 \times (2\pi) = 4\pi \\ P_3 = 4 \times 3 = 12 \end{cases}.$$

إذن: $P_3 < P_2 < P_1$.

ب) ترتّيب تصاعديا، دون استعمال حاسبة، مساحات المستطيل والدائرة والمثلث المتقايس الأضلاع:

ليكن S_1 مساحة المستطيل، وَ S_2 مساحة الدائرة، وَ S_3 مساحة المربع؛ نجد:

$$\begin{cases} S_1 = 3 \times 4 = 12 \\ S_2 = \pi 2^2 = 4\pi \\ S_3 = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \end{cases}.$$

إذن: $S_3 < S_1 < S_2$.

النشاط 02 ص25:

1) رتّب تصاعديا الأعداد الآتية:

$\frac{14}{5}$؛ $2,82$؛ $2,732$؛ $2,73 \times 10^{-2}$؛ $1 + \sqrt{3}$.

2) قارن، دون استعمال حاسبة، مع التبرير.

$\frac{9}{11}$ و$\frac{7}{11}$؛ $\frac{13}{21}$ و$\frac{13}{23}$؛ $\frac{2}{3}$ و$\frac{5}{8}$؛ $0,25^2$ و$1,25^2$؛ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ و$\frac{1}{2}$.

3) قارن العددين A و B، دون استعمال حاسبة، مع التبرير.

$A = \frac{3}{2} \times \frac{5}{3}$ و$B = \frac{3}{2} \times \frac{3}{5}$؛ $A = -\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$ و$B = -\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$.

حل النشاط:

1) **ترتّيب تصاعديا الأعداد:**

لدينا:

$\frac{14}{5} = 2,8000$؛

$2,82 = 2,8200$؛

$2,732 = 2,7320$؛

$2,73 \times 10^{-2} = 0,0273$؛

$1 + \sqrt{3} \simeq 2,7321$.

إذن: $2,73 \times 10^{-2} < 2,732 < 1 + \sqrt{3} < \frac{14}{5} < 2,82$.

2) **المقارنة، دون استعمال حاسبة، مع التبرير:**

☒ $\frac{7}{11} < \frac{9}{11}$؛

لأنّ: الكسرين **موجبين** و**لهما نفس المقام** و$7 < 9$.

☒ $\frac{13}{21} > \frac{13}{23}$؛

لأنّ: الكسرين **موجبين** و**لهما نفس البسط** و$21 < 23$.

☒ $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$؛ لأنّه: لدينا: $\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{16}{24} \\ \frac{5}{8} = \frac{15}{24} \end{cases}$، وَ $15 < 16$.

أو لأنّه: لدينا: $\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{10}{15} \\ \frac{5}{8} = \frac{10}{16} \end{cases}$، وَ $15 < 16$.

☒ $0,25^2 < 1,25^2$؛

لأنّ: $0,25$ وَ$1,25$ **موجبين** و$0,25 < 1,25$.

☒ $\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$؛

لأنّ: 2 وَ$\sqrt{5}$ **من نفس الإشارة** و$\sqrt{4} = 2 < \sqrt{5}$.

www.dzexams.com

3) **مقارنة العددين A و B، دون استعمال حاسبة، مع التبرير:**

الحالة الأولى: $A=\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}$ و $B=\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}$.

بمأنّ: $\begin{cases}\frac{3}{5}<1\\ \frac{5}{3}>1\end{cases}$، فإنّ: $\frac{3}{5}<\frac{5}{3}$؛ **وبضرب** الطرفين في **نفس العدد الموجب** $\frac{3}{2}$ نجد: $\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}<\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}$؛ أي: $\boxed{A>B}$.

الحالة الثانية: $A=-\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$ و $B=-\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$.

بمأنّ: $\begin{cases}\frac{5}{7}<1\\ \frac{7}{5}>1\end{cases}$، فإنّ: $\frac{7}{5}<\frac{5}{7}$؛ **وبضرب** الطرفين في **نفس العدد السالب** $\left(-\frac{3}{4}\right)$ نجد: $-\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}>-\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$؛ أي: $\boxed{A>B}$.

تعريف 01:

a و b عددان حقيقيان.

- القول أنّ **a أكبر من b أو يساويه** معناه **الفرق $a-b$ عدد موجب**، ونكتب: $a\geq b$.

ملاحظات:

- $a\geq b$ معناه $a-b\geq 0$ أي: $(a-b)\in\mathbb{R}^+$.
- $a>b$ معناه $a-b>0$ أي: $(a-b)\in\mathbb{R}_+^*$.
- $a\leq b$ معناه $a-b\leq 0$ أي: $(a-b)\in\mathbb{R}^-$.
- $a<b$ معناه $a-b<0$ أي: $(a-b)\in\mathbb{R}_-^*$.
- إذا كان $a>0$ و $b<0$ فإنّ $a>b$؛ والعكس غير صحيح **(المقارنة باستعمال الإشارة)**

مثال: ● نبيان أنّ: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2>2\sqrt{6}$

لدينا: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{6}=3+2+2\sqrt{6}=5>0$

أي: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{6}>0$

إذن: $\boxed{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2>2\sqrt{6}}$ (وهو المطلوب).

تعريف 02:

مقارنة عددين a و b معناه **التصريح بصحة** إحدى الحالات الثلاث الآتية:

① $a>b$ ② $a<b$ ③ $a=b$

تطبيق: تمرين 18 ص43

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي، قارن العددين الحقيقيين (a^2-8a) و (-16).

2) استنتج دون استعمال الحاسبة، مقارنة العددين الحقيقيين $\left(2-8\sqrt{2}\right)$ و (-16).

الحل:

1) **a عدد حقيقي كيفي، مقارنة العددين الحقيقيين** (a^2-8a) **و** (-16):

لدينا: $(a^2-8a)-(-16)=a^2-8a+16$

$=a^2-2(4)a+4^2$

$=(a-4)^2\geq 0$

أي: $(a^2-8a)-(-16)\geq 0$

إذن: $\boxed{(a^2-8a)\geq(-16)}$.

لأنّ: ⌧ إذا كان $a=4$ فإن: $(a-4)^2=0$

وبالتالي: $(a^2-8a)=(-16)$

⌧ إذا كان $a\neq 4$ فإن: $(a-4)^2>0$

وبالتالي: $(a^2-8a)>(-16)$

2) **استنتاج دون استعمال الحاسبة، مقارنة العددين الحقيقيين** $\left(2-8\sqrt{2}\right)$ **و** (-16):

من السؤال السابق بالمقارنة نلاحظ أنّ $a=\sqrt{2}\neq 4$.

فإنّ: $\boxed{2-8\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}^2-8\sqrt{2}\right)>-16}$.

مبرهنة 01: (المقارنة بعدد ثالث)

من أجل كلّ أعداد حقيقية a، b، c؛

إذا كان $\begin{cases}a\leq b\\ b\leq c\end{cases}$ فإنّ: $a\leq c$.

البرهان:

لدينا: $\begin{cases}a\leq b\\ b\leq c\end{cases}$ معناه: $\begin{cases}a-b\in\mathbb{R}^-\\ b-c\in\mathbb{R}^-\end{cases}$،

ولدينا: **مجموع عددين سالبين هو عدد سالب؛**

إذن: $(a-b)+(b-c)\in\mathbb{R}^-$

ومنه: $a-c\in\mathbb{R}^-$ وبالتالي: $\boxed{a\leq c}$.

مثال: ● نبيان أنّ: $\left(\frac{9}{4}>\frac{5}{3}\right)$

لدينا: $\begin{cases}\frac{9}{4}>2\\ \frac{5}{3}<2\end{cases}$، إذن: $\boxed{\frac{9}{4}>\frac{5}{3}}$.

طريقة:

لمقارنة عددين حقيقيين، يُمكن:

① استعمال الحاسبة للحصول على قيم مقربة.

② مقارنة كلّ من العددين بعدد ثالث **(المبرهنة 01)**

③ دراسة إشارة الفرق **(التعريف 01)**

تمرين تطبيقي:

قارن بين العددين الحقيقيين في كل ما يأتي :

152,125 و 152,13 ؛ π و $\frac{22}{7}$ ؛ $\frac{19}{13}$ و $\frac{17}{21}$ ؛ $\frac{159}{32}$ و $\frac{472}{95}$

حل مقترح: (توجد عدة طرق للمقارنة)

1) **مقارنة بين 152,125 و152,13:**

بمأنّهما **موجبان ولهما نفس الجزء الصحيح، نقارن جزءيهما العشري**، بمأنّ الجزء العشري للعدد 152,125 أكبر تماما من الجزء العشري للعدد 152,13

www.dzexams.com

(أي: 125<130) فإنّ: $152,13 > 152,125$.

2)مقارنة بين π و $\frac{22}{7}$:

باستعمال الآلة الحاسبة، لدينا: $\begin{cases}\pi \simeq 3,141\,5927\\ \frac{22}{7} \simeq 3,142\,8571\end{cases}$

بمأنّهما موجبان و $1 > 2$ فإنّ: $\boxed{\frac{22}{7} > \pi}$.

3)مقارنة بين $\frac{19}{13}$ و $\frac{17}{21}$:

بمأنّ: $\begin{cases}\frac{19}{13} > 1\\ \frac{17}{21} < 1\end{cases}$، فإنّ: $\boxed{\frac{19}{13} > \frac{17}{21}}$.

4)مقارنة بين $\frac{159}{32}$ و $\frac{472}{95}$:

ندرس إشارة الفرق $\frac{159}{32} - \frac{472}{95}$

لدينا: $\frac{159}{32} - \frac{472}{95} = \frac{159\times95-472\times32}{32\times95} = \frac{1}{32\times95} > 0$

إذن: $\boxed{\frac{159}{32} > \frac{472}{95}}$.

ملاحظة:

توجد طُرق أخرى **للمقارنة**.

❷ التّرتيب والعمليات:

① التّرتيب والجمع:

مبرهنة 02:

من أجل كلّ أعداد حقيقية a، b، c؛

إذا كان $a \leq b$ فإنّ $a + c \leq b + c$.

أي: إضافة نفس العدد إلى طرفي الترتيب، لا يُغير الترتيب.

البرهان:

لدينا: $a \leq b$ معناه: $a - b \in \mathbb{R}^-$،

ومنه: $a - b + c - c \in \mathbb{R}^-$

وعليه: $(a + c) - (b + c) \in \mathbb{R}^-$

وبالتالي: $\boxed{a + c \leq b + c}$.

مثال:

إذا كان: $a - 3 \leq b$، فإنّ: $a - 3 + 3 \leq b + 3$

وهذا يعني أنّ: $\boxed{a \leq b + 3}$.

مبرهنة 03: (الجمع طرفاً لطرف)

من أجل كلّ أعداد حقيقية a، b، c،

إذا كان $\begin{cases}a \leq b\\ c \leq d\end{cases}$ فإنّ: $a + c \leq b + d$.

أي: الترتيب متلائم، مع عملية الجمع.

البرهان:

لدينا: $\begin{cases}a \leq b\\ c \leq d\end{cases}$ معناه: $\begin{cases}a - b \in \mathbb{R}^-\\ c - d \in \mathbb{R}^-\end{cases}$،

ولدينا: **مجموع عددين سالبين هو عدد سالب؛**

إذن: $(a - b) + (c - d) \in \mathbb{R}^-$

ومنه: $(a + c) - (b + d) \in \mathbb{R}^-$

وبالتالي: $\boxed{a + c \leq b + d}$.

مثال:

لدينا: $\begin{cases}-6 < -4\\ -1 < 2\end{cases}$، ومنه: $-6 + (-1) < -4 + 2$

أي: $\boxed{-7 < -2}$.

ملاحظة:

إذا كان $\begin{cases}a \leq b\\ c \leq d\end{cases}$ فإنّ: $a - \boldsymbol{d} \leq b - \boldsymbol{c}$.

② التّرتيب والضرب:

مبرهنة 04:

a، b، $\boldsymbol{c}$ أعداد حقيقية.

❶من أجل $\boldsymbol{c > 0}$، لدينا: $a \leq b$ **تُكافئ** $\boldsymbol{ac} \leq \boldsymbol{bc}$.

❷من أجل $\boldsymbol{c < 0}$، لدينا: $a \leq b$ **تُكافئ** $\boldsymbol{ac} \geq \boldsymbol{bc}$.

البرهان:

لدينا: $a \leq b$ معناه: $a - b \in \mathbb{R}^-$.

❶من أجل $\boldsymbol{c > 0}$،

فإنّ: $a - b$ و $\boldsymbol{c}(a - b)$ لهما **نفس الإشارة**

أي: $\boldsymbol{c}(a - b) \in \mathbb{R}^-$

يُكافئ: $\boldsymbol{ca} - \boldsymbol{cb} \in \mathbb{R}^-$ وهذا يعني أنّ: $\boxed{\boldsymbol{ca} \leq \boldsymbol{cb}}$.

❷من أجل $\boldsymbol{c < 0}$،

فإنّ: $a - b$ و $\boldsymbol{c}(a - b)$ لهما **إشارتين متعاكستين**

أي: $\boldsymbol{c}(a - b) \in \mathbb{R}^+$

يُكافئ: $\boldsymbol{ca} - \boldsymbol{cb} \in \mathbb{R}^+$ وهذا يعني أنّ: $\boxed{\boldsymbol{ca} \geq \boldsymbol{cb}}$.

مثال: $0,2 < 0,3$،

بضرب الطرفين في العدد الموجب 10 نجد: $2 < 3$

بضرب الطرفين في العدد السالب (-10) نجد: $-20 > -30$

مبرهنة 05: (الضرب طرفاً بطرف)

من أجل كلّ **أعداد حقيقية موجبة** a، b، c، d

إذا كان $\begin{cases}a \leq b\\ c \leq d\end{cases}$ فإنّ: $ac \leq bd$.

مثال: $\begin{cases}2 < x\\ 5 < y\end{cases}$،

بضرب أطراف المتباينتين طرفاً بطرف نجد: $\boxed{10 < xy}$

ملاحظة:

في حالة **كل الأطراف سالبة**، نقوم بضرب كل الأطراف في العدد (-1) (ثمّ استعمال المبرهنة 04)

www.dzexams.com

تمارين 27؛ 28؛ 29 ص44.

❸ قواعد المقارنة:

① ترتيب مربعي عددين حقيقيين:

مبرهنة 06:

a، b **عددان حقيقيان.**

❶من أجل $a \geq 0$ و $b \geq 0$،

لدينا: $a \leq b$ **يُكافئ** $a^2 \leq b^2$.

❷من أجل $a \leq 0$ و $b \leq 0$،

لدينا: $a \leq b$ **يُكافئ** $a^2 \geq b^2$.

ملاحظة:

في حالة a وَ b **من إشارتين مختلفتين**، لا توجد قاعدة.

أمثلة:

- لدينا: $0 < 3 < 5$ ومنه $3^2 < 5^2$ ، أي $9 < 25$
- لدينا: $-4 < -2 < 0$ ومنه $(-2)^2 < (-4)^2$، أي $16 > 4$

② ترتيب جذرين تربيعيين لعددين حقيقيين موجبين:

مبرهنة 07:

a، b **عددان حقيقيان موجبان** $(a \geq 0$ وَ $b \geq 0)$

لدينا: $a \leq b$ **يُكافئ** $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

مثال:

- لدينا: $0 \leq 9 < 36$ ومنه $\sqrt{9} < \sqrt{36}$ ، أي $3 < 6$

③ ترتيب مقلوبي عددين حقيقيين:

مبرهنة 08:

a، b **عددان حقيقيان غير معدومان.**

❶إذا كان a وَ b **من نفس الإشارة** فإنّ،

$a \leq b$ **يُكافئ** $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

❷إذا كان a وَ b **مختلفين في الإشارة** فإنّ،

$a \leq b$ **يُكافئ** $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

ملاحظة:

مقلوب **عدد سالب هو عدد سالب**، ومقلوب **عدد موجب هو عدد موجب** (❷ من المبرهنة *08*)

أمثلة:

- لدينا: $0 \leq \sqrt{2} < 4$ ومنه $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{4}$.
- لدينا: $-5 < -\sqrt{3} \leq 0$ ومنه $\frac{1}{-\sqrt{3}} < \frac{1}{-5}$.
- لدينا: $-4 < 1$ ومنه $\frac{1}{-4} < \frac{1}{1}$.

④ ترتيب قوى عدد حقيقي موجب:

مبرهنة 09:

a **عدد حقيقي موجب.**

❶إذا كان $0 \leq a \leq 1$ فإنّ،

$a \geq a^2 \geq a^3 \geq a^4 \geq \cdots$ **ترتيب تنازلي**.

❷ إذا كان $a \geq 1$ فإنّ،

$a \leq a^2 \leq a^3 \leq a^4 \leq \cdots$ **ترتيب تصاعدي**.

أمثلة:

- لدينا: $\pi \leq \pi^2 \leq \pi^3 \leq \pi^4$ لأنّ $\boxed{\pi \geq 1}$.
- لدينا: $\frac{1}{2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4$ لأنّ $\boxed{0 \leq \frac{1}{2} \leq 1}$.

⑤ مقارنة عددين يتضمنان جذوراً تربيعية:

طريقة 02 ص36:

لمقارنة عددين يتضمنان جذوراً تربيعية، يُمكن مقارنة مربعيهما.

إذا كان مربعا عددين متساويين فإنّ هذين العددين متساويان أو متعاكسان:

(أي: إذا كان $A^2 = B^2$ فإنّ $A = B$ أو $A = -B$**)**

مثال 01: (● تمرين محلول ص 36)

قارن العددين الحقيقيين:

$\sqrt{5}-1$ و $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ ؛ $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2^2}$ و $\frac{1}{2^3}$ ؛ π و π^2 و π^3.

الحل:

● نضع: $A = 1-\sqrt{5}$ و $B = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$

نحسب A^2 **و** B^2 :

لدينا: $A^2 = \left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 1^2 - 2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 6-2\sqrt{5}$

وَ $B^2 = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 = 6-2\sqrt{5}$

نلاحظ أنّ $A^2 = B^2$ ، وكون $1-\sqrt{5} \in R^-$،

نستنتج أنّ: $A = -B$.

● لاحظ أنّ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}$ وَ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}$.

إذن: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$ لأنّ $\boxed{0 < \frac{1}{2} < 1}$.

● لدينا: $\pi < \pi^2 < \pi^3$ لأنّ $\boxed{\pi > 1}$.

مثال 02: (● تمرين 17 ص 43)

قارن، دون استعمال الحاسبة، كل عددين فيما يلي:

$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ؛ $\sqrt{2}-1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ؛

$\sqrt{7}+1$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$ ؛ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

الحل:

www.dzexams.com

- $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و$\frac{1}{3\sqrt{2}}$، لدينا: $\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}\end{cases}$

وبما أنّ: $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ فإن: $\frac{\sqrt{2}}{6}<\frac{\sqrt{3}}{6}$ وبالتالي: $\frac{1}{3\sqrt{2}}<\frac{1}{2\sqrt{3}}$

- $\sqrt{2}-1$ و$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$،

لدينا: $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$.

- $1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$،

لدينا: $(1+\sqrt{7})^2=8+2\sqrt{7}$ يُكافئ $1+\sqrt{7}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}$

- $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

لدينا: $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ يُكافئ $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

⑥ مقارنة عددين مكتوبين على الشكل الجبري:

طريقة 03 ص36:

لمقارنة عددين مكتوبين على الشكل الجبري، يُمكن استعمال خواص المتباينات على التوالي.

مثال 01: (● تمرين محلول ص 36)

x عدد حقيقي حيث $x\geq 1$، برهن صحة المتباينتين: $-2-5x\leq -3$؛ $\frac{1}{3x+1}\leq\frac{1}{4}$.

الحل:

- لدينا: $x\geq 1$؛ وبضرب طرفي المتباينة في العدد السالب -5، نحصل على: $-5x\leq -1$؛ ثم بإضافة 2، نستخلص: $2-5x\leq -3$.
- لدينا: $x\geq 1$؛

وبالتالي: $3x+1\geq 4$ وذلك بالاستدلال كما في السؤال السابق.

وكون العددين الحقيقيين الموجبين $3x+1$ و 4 مرتبين في الترتيب المضاد لمقلوبيهما، نستخلص: $\frac{1}{3x+1}\leq\frac{1}{4}$.

تطبيق: 16 صفحة 43

قارن، دون استعمال الحاسبة، كل عددين فيما يلي:

$\frac{17}{22}$ و$\frac{17}{23}$؛ $-\frac{9}{11}$ و$-\frac{8}{11}$؛ -10^{-3} و-10^{-4}.

الحل:

- $\frac{17}{22}$ و$\frac{17}{23}$، لهما نفس البسط ومنه: $\frac{17}{22}<\frac{17}{23}$.
- $-\frac{9}{11}$ وَ$-\frac{8}{11}$، نقارن أولاً بين الكسرين $\frac{9}{11}$ و$\frac{8}{11}$ لهما نفس المقام و$8<9$؛ إذن: $\frac{8}{11}<\frac{9}{11}$ ومنه: $-\frac{9}{11}<-\frac{8}{11}$.
- -10^{-3} و-10^{-4} يُمكن كتابتهما على شكل كسور كما يلي: $-\frac{1}{10^3}$ و$-\frac{1}{10^4}$

نقارن أولاً بين $\frac{1}{10^3}$ و$\frac{1}{10^4}$

لدينا: $10^3<10^4$، ومنه: $\frac{1}{10^4}<\frac{1}{10^3}$ إذن: $-\frac{1}{10^3}<-\frac{1}{10^4}$.

تطبيق: 24 صفحة 24

رتب تصاعديا الأعداد a، a^2، a^3 في كل حالة من الحالتين الآتيتين:

- $a=\sqrt{2}-1$
- $a=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

الحل:

- $a=\sqrt{2}-1$، لدينا: $0<\sqrt{2}-1<1$

ومنه: $0<a<1$

إذن: $a^3<a^2<a$.

- $a=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$،

لدينا: $a=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ومنه: $a>1$ إذن: $a<a^2<a^3$.

تمارين 23، 24، 25، 27، 28 و29 ص44. (تمارين مهمة)

④ الحصر:

نشاط 03 ص25:

نسكب 6 قارورات ماء سعة كلّ منها V لتر حيث $1,6<V<1,7$، في حوض مائي له شكل بلاطة قائمة بعدا قاعدتها a وb بالسنتمتر يحققان

$20,5<a<20,6$ وَ$35,7<b<35,6$.

1)تحقّق من أن ارتفاع الماء y يُحقق $y=\frac{6V}{ab}$.

2)أعط حصرا للعدد y (**إرشاد:** يُمكن كتابة $y=\frac{6V}{ab}=6V\times\frac{1}{ab}$).

حل النشاط:

لدينا: $\begin{cases}1,6<V<1,7\\ 20,5<a<20,6\\ 35,6<b<35,7\end{cases}$،

1)التحقّق من أن ارتفاع الماء y يُحقق $y=\frac{6V}{ab}$:

ليكن y ارتفاع الماء في الحوض وV' حجم الماء في الحوض.

نجد: $\begin{cases}V'=6V\\ V'=aby\end{cases}$ إذن: $aby=6V$ ومنه: $\boxed{y=\frac{6V}{ab}}$.

2)إعطاء حصرا للعدد y:

- لدينا: $\boxed{y=\frac{6V}{ab}=6V\times\frac{1}{ab}}$
- ولدينا: $1,6<V<1,7$

ومنه: $6\times 1,6<6V<6\times 1,7$

أي: $9,6<6V<10,2$

نجد: $\boxed{9600<6V<10200}$ ... (1)

- ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases}20,5<a<20,6\\ 35,6<b<35,7\end{cases}$،

ومنه: $20,5\times 35,6<ab<20,6\times 35,7$

أي: $729.8<ab<735,42$

وعليه: $\frac{1}{729.8}>\frac{1}{ab}>\frac{1}{735,42}$.

وهذا يعني أنّ: $\boxed{\frac{1}{735,42}<\frac{1}{ab}<\frac{1}{729.8}}$ ... (2)

www.dzexams.com

بضرب المتباينتين (1) وَ(2) طرفاً بطرف نجد:

$$\frac{1}{729.8} \times 10200 < \frac{1}{ab} \times 6V < \frac{1}{735,42} \times 9600$$

إذن: $\boxed{13,05 < y < 13,98}$.

① تعريف:

حصر عدد حقيقي x، **يعني إيجاد** عددين حقيقيين a وَ b حيث $a \leq x \leq b$.

ملاحظة:

- **سعة** هذا الحصر $a \leq x \leq b$ هي **العدد الحقيقي الموجب** $b - a$.
- إذا كان $a < x < b$ فنقول أنّ العدد x **محصور تماماً** بين العددين a وَ b.

أمثلة:

- لدينا: $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$، هو: حصر للعدد $\sqrt{2}$ بالتقريب إلى **الوحدة**.
- لدينا: $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$، هو: حصر للعدد $\sqrt{2}$ بالتقريب إلى 10^{-2}.
- لدينا: $1 \leq \sqrt{7} \leq 2,7$، هو: حصر للعدد $\sqrt{7}$ سعة هذا الحصر هي 1,7.

إيجاد حصراً للعدد $\sqrt{7}$ سعته 0,001:

- $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$.

② حصر مجموع؛ فرق؛ جداء أو حاصل قسمة:

(طريقة 01 ص38)

لإيجاد حصر مجموع؛ فرق؛ جداء أو حاصل قسمة، نعتمد على خواص المتباينات.

هام جداً لا يُمكن حصر الفرق وحاصل القسمة **مباشرة**.

❶لحصر الفرق نتذكر أنّ الفرق يعني **إضافة المعاكس**، أي: $x - y = x + (-y)$

نحصر $(-y)$، ثمّ نستنتج حصرا لـ $x - y$.

❷لحصر حاصل قسمة نتذكر أنّ القسمة تعني **الضرب في المقلوب**، أي: $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$

نحصر $\frac{1}{y}$، ثمّ نستنتج حصرا لـ $\frac{x}{y}$.

تمرين محلول ص 38.

a و b عددان حقيقيان حيث $3 \leq a \leq 8$ وَ $1 \leq b \leq 7$

احصر الأعداد $a + b$، $a \times b$، $a - b$ وَ $\frac{a}{b}$.

الحل: لدينا: $\begin{cases} 3 \leq a \leq 8 \\ 1 \leq b \leq 7 \end{cases}$.

إيجاد حصر لـ $a + b$:

باستعمال **قاعدة الجمع طرفا لطرف** للمتباينات، نجد:

$$\boxed{4 \leq a + b \leq 15}$$

إيجاد حصر لـ $a \times b$:

كون **كل الأطراف موجبة** وَ**بالضرب طرفا بطرف** نجد:

$$\boxed{3 \leq ab \leq 56}$$

إيجاد حصر لـ $a - b$:

نكتب $a - b$ **على الشكل** $a + (-b)$.

بضرب المتباينة المضاعفة $1 \leq b \leq 7$ في العدد السالب (-1)

نحصر $-b$: $-1 \geq -b \geq -7$

يُصبح لدينا: $\begin{cases} 3 \leq a \leq 8 \\ -7 \leq -b \leq -1 \end{cases}$، وَ**بالجمع طرفا لطرف** نجد: $\boxed{-4 \leq a - b \leq 7}$.

إيجاد حصر لـ $\frac{a}{b}$:

نكتب $\frac{a}{b}$ **على الشكل** $a \times \left(\frac{1}{b}\right)$.

أطراف المتباينة $1 \leq b \leq 7$ **من نفس الإشارة**، نحصر $\frac{1}{b}$

فيكون: $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{1}$

يُصبح لدينا: $\begin{cases} 3 \leq a \leq 8 \\ \frac{1}{7} \leq \frac{1}{b} \leq 1 \end{cases}$، وَ**بالضرب طرفا بطرف** نجد:

$$\boxed{\frac{3}{7} \leq \frac{a}{b} \leq 8}$$

تطبيق:

مستطيل بُعداه a و b حيث،

$134m < a < 135m$ وَ $25m < b < 26m$

- أعط حصراً لمحيطه P، ولمساحته S، ولقطره D.

الحل:

لدينا: $\begin{cases} 134 < a < 135 \dots (1) \\ 25 < b < 26 \dots (2) \end{cases}$.

إعطاء حصر لمحيطه P:

نعلم أنّ $\boxed{P = 2(a + b)}$، حيث P هو محيط المستطيل.

بجمع (1) و(2) طرفا لطرف نجد: $159 < a + b < 161$

ومنه: $2 \times 159 < 2(a + b) < 2 \times 161$

إذن: $\boxed{318m < P < 322m}$.

إعطاء حصر لمساحته S:

نعلم أنّ $\boxed{S = ab}$، حيث S هو مساحة المستطيل.

بضرب (1) و(2) طرفا بطرف نجد: $3350 < ab < 3510$

إذن: $\boxed{3350m^2 < S < 3510m^2}$.

إعطاء حصر لقطره D:

نعلم أنّ $\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2}}$، حيث D هو قطر المستطيل.

من (1) نجد: $134^2 < a^2 < 135^2$

أي: $17956 < a^2 < 18225 \dots (3)$

من (2) نجد: $25^2 < b^2 < 26^2$

أي: $625 < b^2 < 676 \dots (4)$

بجمع (3) و(4) طرفا لطرف نجد:

$$18581 < a^2 + b^2 < 18901$$

www.dzexams.com

ومنه: $\sqrt{18581} < \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{18901}$

أي: $\boxed{136{,}31m < D < 137{,}48m}$.

تمرين تطبيقي «②»: a و b عددان حقيقيان حيث: $2 \leq a \leq \frac{1}{2}$ و $2 \leq b \leq 4$

❖ أعط حصرا لكل من الأعداد التالية :

$1-2a$ ، $\frac{a+1}{ab+1}$ ، $\frac{a^2}{b}$ ، $\frac{1-b^2}{3}$ ، a^2-3a+b

تمارين من 69 إلى غاية 74 ص47. (تمارين مهمة)

❺ المجالات:

① تعريف:

a وَ b عددان حقيقيان حيث $a \leq b$.

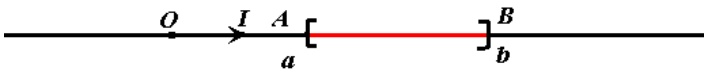
نسمي **مجالاً مغلقاً** حدّاه a وَ b؛ **مجموعة الأعداد الحقيقية** x حيث $a \leq x \leq b$، ونرمز له بالرمز $[a;b]$.

أمثلة:

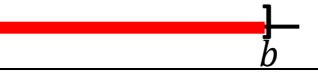
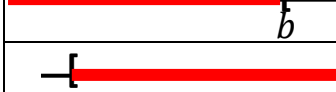
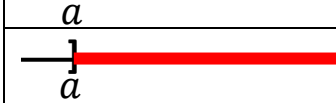
- $[3;7]$ هو مجال مغلق حداه 3 وَ7، وهو **مجموعة الأعداد الحقيقية** x حيث $3 \leq x \leq 7$.
  - ⌫ $5 \in [3;7]$؛ لأنّ: $3 \leq 5 \leq 7$.
  - ⌫ $8 \notin [3;7]$؛ لأنّ: 8 ليس محصور بين 3 وَ7.
  - ⌫ $3 \in [3;7]$؛ لأنّ: $3 \leq 3 \leq 7$.
  - ⌫ $7 \in [3;7]$؛ لأنّ: $3 \leq 7 \leq 7$.
- **مجموعة الأعداد الحقيقية** x حيث $3 < x < 7$؛ وهو المجال المفتوح $]3;7[$.

② تمثيل مجال:

يُمثّل المجال $[a;b]$ **هندسيا** بالشّكل الآتي حيث A و B نقطتان فاصلتاهما a و b على التّرتيب $(A(a)$ وَ $B(b))$



③ أنواع المجالات:

المجال الذي يُرمز إليه ...	هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث ...	يُمثّل على المستقيم العددي بالشكل ...
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	

☜ في المجال **المغلق** $[a;b]$، العارضتان موجّهتان نحو الدّاخل.

☜ $]a;b[$ هو مجال **مفتوح**، العارضتان موجّهتان نحو الخارج.

ملاحظات:

❶ الحدّان a و b ينتميان إلى المجال $[a;b]$ ولا ينتميان إلى المجال $]a;b[$.

❷ الرمزان $-\infty$ و $+\infty$ (يُقرآن: ناقص لانهاية، زائد لانهاية) لا يُمثلان عددين حقيقيين وبالتالي تكون العارضتان مفتوحتين عندهما.

تمرين 35 ص45.

مثّل على المستقيم العددي المجالات الآتية:

$[1;4]$ ؛ $]-2;-1[$ ؛ $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ ؛ $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$.

تمرين 39 ص45.

أكتب على شكل مجالات مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية:

1) $2 \leq x \leq 6$ 3) $x \leq -2{,}5$

2) $-4 \leq x \leq 3$ 4) $x > \sqrt{3}$

④ تقاطع واتحاد مجالين:

تعريف:

❶ **تقاطع مجالين** I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I **و** J، ونرمز إليه بالرّمز $I \cap J$.

❷ **إتحاد مجالين** I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I **أو** J، ونرمز إليه بالرّمز $I \cup J$.

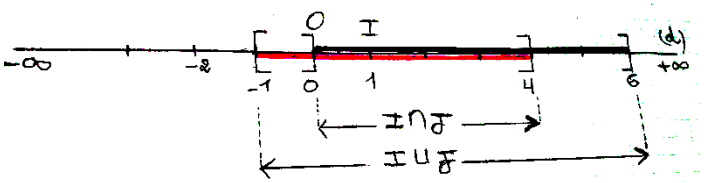
لإيجاد التقاطع أو الإتحاد نقوم بتمثيل المجالين على نفس المستقيم الحقيقي، أو بالملاحظة.

أمثلة:

نعتبر المجالين $I = [-1;4]$ وَ $J =]0;6]$

⌫ $I \cap J$ هو **مجموعة الأعداد الحقيقية** x التي تُحقق $-1 \leq x \leq 4$ **وَ** $0 < x \leq 6$.

⌫ $I \cup J$ هو **مجموعة الأعداد الحقيقية** x التي تُحقق $-1 \leq x \leq 4$ **أو** $0 < x \leq 6$.



إذن: $\boxed{I \cap J =]0;4]}$ ؛ وَ $\boxed{I \cup J = [-1;6]}$.

تمرين 37 صفحة 44: عيّن المجالات الآتية

1) $[0;2] \cap]1;6]$ 2) $[-2;2] \cap]-2;+\infty[$

3) $[-1;3] \cap]3;+\infty[$ 4) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

www.dzexams.com

تمرين 47 صفحة 45:

أنقل ثم أكمل الجدول.

I	J	$I \cap J$	$I \cup J$
$[2;5]$	$[1;+\infty[$		
$]-1;3]$	$]-5;5[$		
$]-\infty;\frac{1}{2}[$	$]-\frac{5}{2};\frac{1}{3}]$		
$[1;2]$	$]\frac{1}{2};2[$		

⑤ العناصر المميزة لمجال مُغلق:

يتميز المجال المغلق $[a;b]$ بالعناصر التالية:

❶ **مركزه**، العدد الحقيقي $\boxed{c=\frac{a+b}{2}}$.

❷ **طوله**، العدد الحقيقي **الموجب** $\boxed{l=b-a}$.

❸ **نصف قطره**، العدد الحقيقي **الموجب** $\boxed{r=\frac{b-a}{2}=\frac{l}{2}}$.

أمثلة:

المجال	حداه	مركزه	طوله	نصف قطره
$[0;2]$	$a=0$ و $b=2$	$c=\frac{0+2}{2}=1$	$l=2-0=2$	$r=\frac{2-0}{2}=1$
$[-1;3]$	$a=-1$ و $b=3$	$c=\frac{(-1)+3}{2}=1$	$l=3-(-1)=4$	$r=\frac{3-(-1)}{2}=2$

تمارين 40، 42، 43 و46 ص45. (تمارين مهمة)

❻ القيمة المطلقة والمسافة:

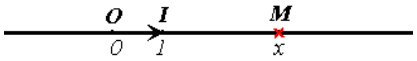
① القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

تعريف:

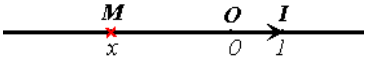
x عدد حقيقي، M نقطة من مستقيم مزوّد بمعلم $(O;I)$ فاصلتها x.

القيمة المطلقة للعدد x هي **المسافة** OM، ونرمز إليها بالرّمز $|x|$. ونكتب $OM=|x|$.

- **في حالة** $x\geq 0$ $(OM=|x|=x)$



- **في حالة** $x\leq 0$ $(OM=|x|=-x)$



أمثلة:

- $|5|=5$، $|-6|=-(-6)=6$ ●
- $|10^{-2}|=10^{-2}$، $\left|\frac{\sqrt{2}}{-4}\right|=-\left(\frac{\sqrt{2}}{-4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ●
- $|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$ ●
- $|\sqrt{7}-2|=\sqrt{7}-2$ ●
- $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=-(\sqrt{3}-\sqrt{5})=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ●

نتائج:

❶ بما أنّ **المسافة موجبة** فإنّ $(|x|\geq 0)$ من أجل كلّ **عدد حقيقي** x.

❷ من أجل كلّ **عدد حقيقي** x:

$$\boxed{OM=|x|=\begin{cases}x & ;x\geq 0\\ -x & ;x\leq 0\end{cases}}$$

② خواص القيمة المطلقة:

x و y عددين حقيقيين، لدينا:

❶ $|x|\geq 0$ $(|x|=0$ في حالة $x=0)$

❷ $|-x|=|x|$ ❸ $\sqrt{x^2}=|x|$

❹ $|xy|=|x|\times|y|$ ❺ $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ مع $y\neq 0$

❻ $|x+y|\leq|x|+|y|$ **(المتباينة المثلثية)**

ملاحظة:

المتباينة المثلثية تُصبح $|x+y|=|x|+|y|$ عندما يكون العددان x و y **من نفس الإشارة**.

أمثلة:

★ العدد و معاكسه لهما نفس القيمة المطلقة : $|-7|=|7|=7$

★ $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$

★ $|(-2)\times 3|=|-2|\times|3|=2\times 3=6$

★ $|-5+7|\leq|-5|+|7|$

③ المسافة بين نقطتين:

مبرهنة 10:

إذا كانت A، B نقطتان من مستقيم مزوّد بمعلم $(O;I)$ فاصلتاهما a، b على التّرتيب فإنّ

$$AB=|b-a|=|a-b|$$

مثال: (● **تمرين 49 ص 44**)

بفرض M و N و P ثلاث نقاط ذات الفواصل -4، 0، -3 على التّرتيب من المستقيم العددي.

أحسب المسافات MN و NP و MP.

الحل:

حساب المسافات MN و NP و MP:

$MN=|x_N-x_M|=|0-(-4)|=|4|=4$

$NP=|x_P-x_N|=|0-(-3)|=|3|=3$ وَ

$MP=|x_M-x_P|=|-4-(-3)|=|-1|=1$ وَ

④ المسافة بين عددين حقيقيين:

تعريف:

المسافة بين عددين حقيقيين a وَ b هي **العدد الحقيقي الموجب** $|b-a|$ (أو $|a-b|$).

نكتب $d(a;b)=|b-a|=|a-b|$

www.dzexams.com