

الملخص الشامل في الدوال الأصلية Bac 2023

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

1 الدوال الأصلية

تعريف : f دالة معرفة على مجال I ، نقول أن F دالة أصلية للدالة f إذا وفقط إذا كانت F قابلة للإشتقاق على I ،

ومن أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$

مثال :

$F(x) = 3x^2 - 6x + 7$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = 6x - 6$ على $\mathbb{R}$ لأن $F'(x) = f(x)$

تمرين : نعتبر الدالتين F و f المعرفتين على $]-1; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{-2x^2 - 4x}{(x+1)^2}$ ، $F(x) = \frac{x-1}{x+1} - 2x$ ،

بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$

طريقة : لإثبات أن F هي دالة أصلية لـ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للإشتقاق على I وأنه

من أجل كل x من I فإن $F'(x) = f(x)$

حل التمرين : الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ ولدينا :

$$F'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} - 2 = \frac{2}{(x+1)^2} - 2 = \frac{2 - 2(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 4x}{(x+1)^2} = f(x)$$

ومنه الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$

خواص :

① إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I ، فإن f تقبل دوال أصلية على I .

② إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال المعرفة على I بـ :

$F(x) + c$ حيث c عدد حقيقي ثابت .

نتيجة : دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط .

مثال : لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$

كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + k$

حيث k عدد حقيقي ثابت .

خاصية: توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$ ، حيث x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كفي .

مثال :

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = 12x^2 - 2x + 3$

❖ عين F الدالة الأصلية للدالة f حيث $F(1) = 7$.

❖ لدينا : $F(x) = 4x^3 - x^2 + 3x + c$

❖ وبما أن $F(1) = 7$ فإن : $4(1)^3 - (1)^2 + 3(1) + c = 7$ ومنه $c = 1$

❖ ومنه $F(x) = 4x^3 - x^2 + 3x + 1$

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدالة f	الدالة الأصلية F	I
$f(x) = a$	$F(x) = ax + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{(n-1)}} + c$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0; +\infty[$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

❶ $f(x) = 8x^3 - 4x + 7$ و $I = \mathbb{R}$ ، ❷ $g(x) = x^2 + \sin x - \frac{1}{x^2}$ و $I =]0; +\infty[$

❸ $h(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \cos x$ و $I =]0; +\infty[$

حل التطبيق :

❶ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ : $F(x) = 8 \times \frac{1}{3+1} x^{3+1} - 4 \times \frac{1}{1+1} x^{1+1} + 7x + c$

ومنه : $F(x) = 2x^4 - 2x^2 + 7x + c$ ، حيث c ثابت حقيقي .

❷ G دالة أصلية للدالة g على $]0; +\infty[$ معرفة بـ :

$$G(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} + (-\cos x) - \left(-\frac{1}{(2-1)x^{(2-1)}}\right) + c = \frac{1}{3}x^3 - \cos x + \frac{1}{x} + c$$

③ H دالة أصلية للدالة h على $[0; +\infty[$ معرفة بـ :

$$H(x) = 3 \left(\frac{-1}{(4-1)x^{(4-1)}} \right) + 2\sqrt{x} - (\sin x) + c = -\frac{1}{x^3} + 2\sqrt{x} - \sin x + c$$

العمليات على الدوال الأصلية

الدالة f	الدوال الأصلية	I
$u + v$	$U + V$	I
λu	λU	I
$u'u^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	I
$u'e^u$	e^u	I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$x \in I, u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{(n-1)}} + c$	$x \in I, u(x) \neq 0$ $n \geq 2$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$x \in I; u(x) > 0$

تطبيق 01 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

① $I = \mathbb{R}$ و $f(x) = (3x^2 + 2x)(x^3 + x^2 + 7)^2$ ، $I = \mathbb{R}$ و $g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ ②

③ $I = \mathbb{R}$ و $h(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+11)^3}$

حل التطبيق :

① $f(x) = (3x^2 + 2x)(x^3 + x^2 + 7)^2$ ، الدالة f من الشكل $u'u^n$ حيث :

$u'(x) = 3x^2 + 2x$ و $u(x) = x^3 + x^2 + 7$ و $n = 2$

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$ ومنه : $F(x) = \frac{1}{2+1}(x^3 + x^2 + 7)^{2+1} + c = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 + 7)^3 + c$

② $g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ الدالة g من الشكل $\frac{u'}{u^n}$ حيث : $u'(x) = 2x$ و $u(x) = x^2 + 1$ و $n = 2$

دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{(n-1)u^{(n-1)}} + c$ ومنه : $G(x) = \frac{-1}{(2-1)(x^2+1)^{(2-1)}} + c = \frac{-1}{x^2+1} + c$

③ $h(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+11)^3}$ ، الدالة h من الشكل $\frac{u'}{u^n}$ حيث : $u' = 2x + 1$ و $u = x^2 + x + 11$ و $n = 3$

دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{(n-1)u^{(n-1)}} + c$ ومنه : $H(x) = -\frac{1}{(3-1)(x^2+x+11)^{(3-1)}} + c = -\frac{1}{2(x^2+x+11)^2} + c$

تطبيق 02 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

① $I = \mathbb{R}$ و $f(x) = (x+1)(2x^2 + 4x + 1)^2$ ، $I = \mathbb{R}$ و $g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ ②

③ $I = \mathbb{R}$ و $h(x) = \frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3}$ ، $I = \mathbb{R}$ و $t(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$ ④

حل التطبيق :

1 $f(x) = (x+1)(2x^2+4x+1)^2$ تكافئ : $f(x) = \frac{1}{4}(4x+4)(2x^2+4x+1)^2$ دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$ ومنه : $F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}(2x^2+4x+1)^3 + c = \frac{1}{12}(2x^2+4x+1)^3 + c$

2 $g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ تكافئ : $g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$ ومنه : $G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2+1} + c = -\frac{1}{2x^2+2} + c$

3 $h(x) = \frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3}$ تكافئ : $h(x) = \frac{1}{2} \times \frac{6x+2}{(3x^2+2x+7)^3}$ دوالها الأصلية من الشكل $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$ ومنه : $H(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2(3x^2+2x+7)^2} + c = \frac{-1}{4(3x^2+2x+7)^2} + c$

4 $t(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$ تكافئ : $t(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ دوالها الأصلية من الشكل $2\sqrt{u} + c$ ومنه : $T(x) = \frac{5}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} + c = 5\sqrt{x^2+1} + c$

الدوال الأصلية من الشكل : $u'u^n$ هي : $[u'u^n] = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

1 $f(x) = (x-3)^4$ و $I = \mathbb{R}$ ، 2 $f(x) = \frac{(x+5)^3}{6}$ و $I = \mathbb{R}$ ، 3 $f(x) = 2(3x+4)^5$ و $I = \mathbb{R}$ ، 4 $f(x) = e^x(e^x+4)^3$ و $I = \mathbb{R}$ ، 5 $f(x) = x^2(x^3+4)^4$ و $I = \mathbb{R}$ ، 6 $f(x) = -20x\left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^3$ و $I = \mathbb{R}$ ، 7 $f(x) = e^{-2x}(e^{-2x}+2)^3$ و $I = \mathbb{R}$

حل التطبيق :

1 $F(x) = \frac{(x-3)^5}{5} + c$ ، 2 $F(x) = \frac{1}{6} \times \frac{(x+5)^4}{4} + c = \frac{(x+5)^4}{24} + c$ ، 3 $F(x) = \frac{2}{3} \times \frac{(3x+4)^6}{6} + c = \frac{(3x+4)^6}{9} + c$ ، 4 $F(x) = \frac{(e^x+4)^4}{4} + c$ ، 5 $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(x^3+4)^5}{5} + c = \frac{(x^3+4)^5}{15} + c$ ، 6 $F(x) = 20 \times \frac{(8 - \frac{x^2}{2})^4}{4} + c = 5(8 - \frac{x^2}{2})^4 + c$ ، 7 $F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{(e^{-2x}+2)^4}{4} + c = -\frac{(e^{-2x}+2)^4}{8} + c$

الدوال الأصلية من الشكل : $\frac{u'}{u^n}$ هي : $\left[\frac{u'}{u^n}\right] = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$

من أجل كل x من I : $u(x) \neq 0$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

1 $f(x) = \frac{5}{(x-2)^7}$ و $I =]2; +\infty[$ ، 2 $f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$ و $I =]-1; +\infty[$ ، 3 $f(x) = \frac{1}{2(2x-1)^3}$ و $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$ ، 4 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ و $I =]0; +\infty[$ ، 5 $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ و $I = \mathbb{R}$ ، 6 $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+1)^2}$ و $I = \mathbb{R} - \{1\}$ ، 7 $f(x) = \frac{-e^{x-2}}{(e^x+2x)^2}$ و $I = \mathbb{R}$

حل التطبيق :

$$F(x) = \frac{-(-2)}{2(x+1)^2} + c = \frac{1}{(x+1)^2} + c \quad \textcircled{2}$$

$$F(x) = \frac{-1}{\ln x} + c \quad \textcircled{4}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2-2x+1)} + c \quad \textcircled{6}$$

$$F(x) = \frac{-5}{6(x-2)^6} + c \quad \textcircled{1}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2(2x-1)^3} + c \quad \textcircled{3}$$

$$F(x) = \frac{-1}{e^x+1} + c \quad \textcircled{5}$$

$$F(x) = \frac{1}{e^x+2x} + c \quad \textcircled{7}$$

الدوال الأصلية من الشكل $\frac{u'}{u}$ هي : $\left[\frac{u'}{u}\right] = \ln u + c$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \text{ و } I =]3; +\infty[\quad \textcircled{1} \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ و } I = \mathbb{R} \quad \textcircled{2}$$

$$f(x) = \frac{6x+3}{x^2+x+1} \text{ و } I = \mathbb{R} \quad \textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ و } I =]0; \pi[\quad \textcircled{4}$$

$$f(x) = \frac{3e^x}{e^x+5} \text{ و } I = \mathbb{R} \quad \textcircled{5} \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1} \text{ و } I = \mathbb{R} - \{1\} \quad \textcircled{6}$$

حل التطبيق :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \quad \textcircled{2}$$

$$F(x) = \ln(\sin x) + c \quad \textcircled{4}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 1) + c \quad \textcircled{6}$$

$$F(x) = \ln(x - 3) + c \quad \textcircled{1}$$

$$F(x) = 3 \ln(x^2 + x + 1) + c \quad \textcircled{3}$$

$$F(x) = 3 \ln(e^x + 5) + c \quad \textcircled{5}$$

الدوال الأصلية من الشكل $u'e^u$ هي : $[u'e^u] = e^u + c$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

$$f(x) = xe^{-x^2} \text{ و } I = \mathbb{R} \quad \textcircled{2}$$

$$f(x) = e^{4x+1} \text{ و } I = \mathbb{R} \quad \textcircled{1}$$

$$f(x) = \sin x e^{\cos x} \text{ و } I = \mathbb{R} \quad \textcircled{4}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \text{ و } I = \mathbb{R}^* \quad \textcircled{3}$$

$$f(x) = x^2 e^{x^3+4} \text{ و } I = \mathbb{R} \quad \textcircled{6} \quad f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}} \text{ و } I =]-1; +\infty[\quad \textcircled{5}$$

حل التطبيق :

$$F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \quad \textcircled{2}$$

$$F(x) = -e^{\cos x} + c \quad \textcircled{4}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} e^{x^3+4} + c \quad \textcircled{6}$$

$$F(x) = \frac{1}{4} e^{4x+1} + c \quad \textcircled{1}$$

$$F(x) = -3e^{\frac{1}{x}} + c \quad \textcircled{3}$$

$$F(x) = -2e^{\sqrt{x+1}} + c \quad \textcircled{5}$$

الدوال الأصلية من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ هي : $\left[\frac{u'}{\sqrt{u}}\right] = 2\sqrt{u} + c$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

$$f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}} \text{ و } I =]0; +\infty[\quad \textcircled{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ و } I =]1; +\infty[\quad \textcircled{1}$$

$$، I =]0; +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \quad \textcircled{4}$$

$$، I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \quad \textcircled{6}$$

$$، I =]0; \pi[\text{ و } f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \quad \textcircled{3}$$

$$، I =]-2; +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+6}} \quad \textcircled{5}$$

حل التطبيق :

$$F(x) = 4\sqrt{e^x - 1} + c \quad \textcircled{2}$$

$$F(x) = 2\sqrt{\ln x} + c \quad \textcircled{4}$$

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 5} + c \quad \textcircled{6}$$

$$F(x) = 2\sqrt{x - 1} + c \quad \textcircled{1}$$

$$F(x) = 2\sqrt{\sin x} + c \quad \textcircled{3}$$

$$F(x) = \frac{4}{3}\sqrt{3x + 6} + c \quad \textcircled{5}$$

2 المعادلات التفاضلية

تعريف : معادلة تفاضلية هي معادلة :

❖ المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز y ، z أو أي حرف آخر .

❖ تظهر فيها بعض المشتقات y (المشتقة الأولى y' أو المشتقات من رتب أكبر y'' )

❖ نسمي حلا لمعادلة تفاضلية (E) في مجال I كل دالة φ تحقق (E) في I .

مثال : الدالة $y = 2x + 3$ هي حل في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = x^2 + 3x$

الدالة $y = x \ln x - x + c$ هي حل في المجال $]0; +\infty[$ للمعادلة التفاضلية $y' = \ln x$

المعادلات التفاضلية من الشكل : $y' = f(x)$

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I ، وكانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية

$y' = f(x)$ هي الدوال y حيث : $y = F(x) + c$ ، مع c عدد حقيقي ثابت

تطبيق : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية الآتية :

$$y' = 2x + 4 - \frac{1}{x^2} \quad \textcircled{2} \quad y' = 3x^2 + x - 3 \quad \textcircled{1}$$

$$y' = 2 \cos(3x) \quad \textcircled{4} \quad y' = \frac{x^2+1}{x^2} \quad \textcircled{3}$$

حل التطبيق :

$$y = x - \frac{1}{x} + c \quad \textcircled{3} \quad y = x^2 + 4x + \frac{1}{x} + c \quad \textcircled{2} \quad y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + c \quad \textcircled{1}$$

$$\text{تذكير } [\cos(ax + b)] = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$y = \frac{2}{3} \sin(3x) + c \quad \textcircled{4}$$

المعادلات التفاضلية من الشكل : $y'' = f(x)$

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I ، وكانت F دالة أصلية لها على I ، وكانت G دالة أصلية للدالة F

فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = f(x)$ هي الدوال y حيث : $y = G(x) + c_1x + c_2$

مع : c_1 و c_2 عددين حقيقيين ثابتان

تطبيق : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية الآتية :

$$\begin{aligned} y'' &= \cos(2x + 3) & \textcircled{2} & \quad y'' = 4x^3 - 3x^2 - 3 & \textcircled{1} \\ y'' &= \cos(2x) - 2 \sin(x) & \textcircled{4} & \quad y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} & \textcircled{3} \end{aligned}$$

حل التطبيق :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y'' &= 4x^3 - 3x^2 - 3 \quad \text{، ومنه : } y' = 4\left(\frac{1}{4}x^4\right) - 3\left(\frac{1}{3}x^3\right) - 3x + c_1 \\ y &= \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + c_1x + c_2 \quad \text{، ومنه : } y' = x^4 - x^3 - 3x + c_1 \\ \textcircled{2} \quad y'' &= \cos(2x + 3) \quad \text{، ومنه : } y = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + c_1 \\ y &= -\frac{1}{4} \cos(2x + 3) + c_1x + c_2 \quad \text{، ومنه : } y = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2x + 3) \right] + c_1x + c_2 \\ \textcircled{3} \quad y'' &= \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \quad \text{، أي : } y'' = x^2 + x + \frac{1}{x^2} \quad \text{، ومنه : } y' = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c_1 \\ y &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \ln|x| + c_1x + c_2 \quad \text{، ومنه : } y = \frac{1}{3} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) - \ln|x| + c_1x + c_2 \\ \textcircled{4} \quad y'' &= \cos(2x) - 2 \sin(x) \quad \text{، ومنه : } y' = \frac{1}{2} \sin(2x) + 2 \cos(x) + c_1 \\ y &= -\frac{1}{4} \cos(2x) + 2 \sin(x) + c_1x + c_2 \quad \text{، ومنه : } y = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right] + 2 \sin(x) + c_1x + c_2 \end{aligned}$$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = -w^2y$

مبرهنة : إذا كان w عددا حقيقيا غير معدوم ، فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -w^2y$ هي الدوال y حيث : $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$ ، مع : c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان .

تطبيق : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية الآتية :

$$4y'' + \pi^2y = 0 \quad \textcircled{3} \quad , \quad y'' + 9y = 0 \quad \textcircled{2} \quad , \quad y'' + 4y = 0 \quad \textcircled{1}$$

حل التطبيق :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y'' + 4y &= 0 \quad \text{، أي أن } y'' = -4y \quad \text{، ومنه } w = 2 \quad \text{ومنه نستنتج} \\ y &= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \\ \textcircled{2} \quad y'' + 9y &= 0 \quad \text{، أي أن } y'' = -9y \quad \text{، ومنه } w = 3 \quad \text{ومنه نستنتج} \\ y &= c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) \\ \textcircled{3} \quad 4y'' + \pi^2y &= 0 \quad \text{، أي أن } 4y'' = -\pi^2y \quad \text{، أي أن } y'' = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y \quad \text{، ومنه } w = \frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه نستنتج} \\ y &= c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{aligned}$$

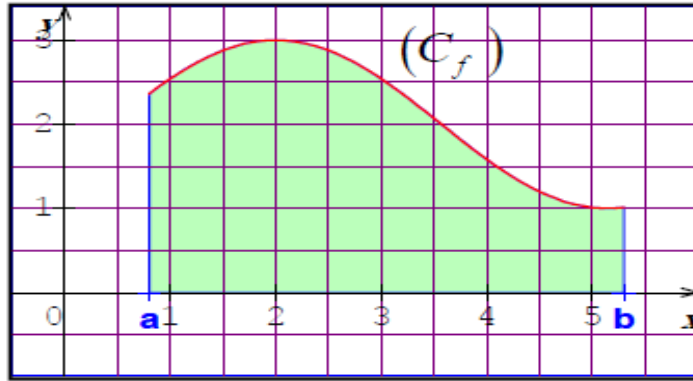
3 التكامل

تعريف التكامل : f دالة مستمرة على المجال I ، a و b عددان حقيقيان من I ،
يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على I ، التكامل من a إلى b $\int_a^b f(x) dx$ ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x) dx$ ، ونقرأ التكامل من a إلى b $\int_a^b f(x) dx$ تفاضل x

➤ عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على I يشمل العددين a و b ثم نكتب

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

➤ يمكن إستبدال المتغير x بأحد الأحرف $t, z, \dots$ ، فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$



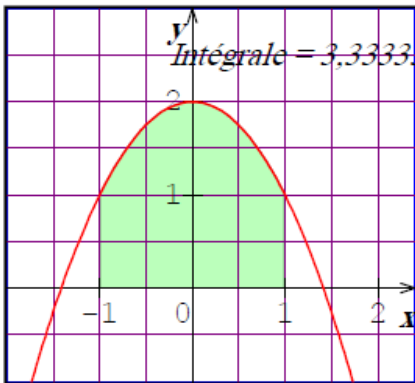
مثال 01 : لنحسب التكاملين التاليين :

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx \quad \int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx$$

$$\int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx = [-x^3 + x]_{-1}^2 = (-6) - (0) = -6$$

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} [(e) - (e^{-1})] = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

مثال 01 : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x^2 + 2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد



أ- في حالة المعلم متجانس

مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمتين $x = 1$ ، $x = -1$

و $y = 0$ (محور الفواصل) . بوحدة المساحة $(u.a)$ هي :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{-1}{3} + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{10}{3} (u.a)$$

ب- في حالة المعلم غير متجانس

مثلا نأخذ $2cm$ على محور الفواصل و $3cm$ على محور الترتيب

مساحة الحيز بـ cm^2 تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي : المساحة السابقة مضروبة في جداء الوحدتين ومعناه

$$\frac{10}{3} \times 3 \times 2 = 20cm^2$$

خواص التكامل

❖ إذا كان $f(x) \geq 0$ على $[a; b]$ ، فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

❖ إذا كان $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

❖ $\int_a^a f(x)dx = 0$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx : \text{علاقة شال} \quad \diamond$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad \text{خطية : (أ)} \quad \diamond$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{(ب)}$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad \text{التناظر :} \quad \diamond$$

تطبيق : أحسب التكامل التالي : $\int_0^2 |x^2 - 1|dx$

أولا : نكتب $|x^2 - 1|$ دون رمز القيمة المطلقة

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} -(x^2 - 1) & ; x \in [0; 1] \\ x^2 - 1 & ; x \in [1; 2] \end{cases}$$

$$\int_0^2 |x^2 - 1|dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{-2}{3}\right) = 2$$

تطبيق 26 ص 186 : أحسب التكاملات التالية في كل حالة مما يأتي باستعمال خواص التكامل

$$j = \int_1^e \ln(1 + t^2)dt + \int_e^1 \ln(1 + t^2)dt \quad \text{②} , I = \int_1^e \ln t dt + \int_1^e \left(t + \ln \frac{1}{t}\right) dt \quad \text{①}$$

$$h = \int_1^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx - \int_1^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx \quad \text{③}$$

حل التطبيق :

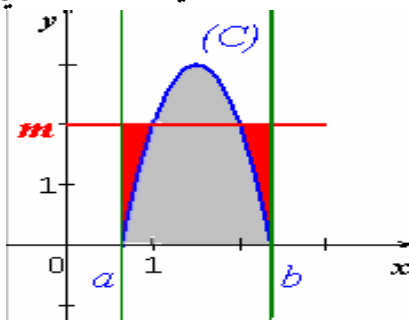
$$I = \int_1^e \ln t dt + \int_1^e \left(t + \ln \frac{1}{t}\right) dt = \int_1^e \left(\ln t + t + \ln \frac{1}{t}\right) dt = \int_1^e (\ln t + t - \ln t) dt = \int_1^e (t) dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

$$j = \int_1^e \ln(1 + t^2)dt + \int_e^1 \ln(1 + t^2)dt = \int_1^1 \ln(1 + t^2)dt = 0$$

$$h = \int_1^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx - \int_1^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx = h = \int_1^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx - \left(\int_1^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx\right) \\ = - \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} = 0$$

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ ، القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a; b]$ هي العدد الحقيقي m حيث :



$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

مثال : القيمة المتوسطة للدالة f المعرفة بـ $f(x) = 2x + 3$ على المجال $[-1; 2]$ هي :

$$m = \frac{1}{2 - (-1)} \int_{-1}^2 (2x + 3) dx = \frac{1}{3} [x^2 + 3x]_{-1}^2 = 4$$

حصر قيمة متوسطة

f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ ، إذا وجد عدداً حقيقيين m و M بحيث من أجل كل x من $[a; b]$ ،

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \quad : \text{فإن } m \leq f(x) \leq M$$

تطبيق : نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(x + 1)$

① أدرس إتجاه تغير الدالة f على $[0; e - 1]$.

② إستنتج حصر لـ $f(x)$.

③ إستنتج حصر للعدد الحقيقي $I = \int_1^{e-1} f(x) dx$.

حل التطبيق :

① لدينا من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ ، إذن f متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$ ومنه الدالة f

متزايدة تماماً على المجال $[0; e - 1]$

② نستنتج أنه من أجل كل x من $[0; e - 1]$ ، $0 \leq x \leq e - 1$ ، أي $f(0) \leq f(x) \leq f(e - 1)$

$$1 \leq f(x) \leq 2 \quad \text{ومنه}$$

③ بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e - 2) \leq \int_1^{e-1} f(x) dx \leq 2(e - 2)$

تطبيق 49 ص 188 : في كل حالة من الحالات التالية m هي القيمة المتوسطة لدالة مستمرة f على مجال I

أحسب التكامل المطلوب

① $\int_1^4 f(x) dx$ ، $I = [1; 4]$ ، $m = 2$ ② $\int_1^3 f(x) dx$ ، $I = [1; 3]$ ، $m = \ln 2$

حل التطبيق :

$$\int_a^b f(x) dx = m(b - a) \quad \text{ومنه } m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

① بما أن $\int_1^4 f(x) dx = 2(4 - 1) = 6$ ، فإن $I = [1; 4]$ ، $m = 2$

② بما أن $\int_1^3 f(x) dx = (3 - 1)\ln 2 = 2\ln 2$ ، فإن $I = [1; 3]$ ، $m = \ln 2$

تطبيق : أحسب التكاملات الآتية :

⑥ $\int_1^2 \left(\frac{x^3}{x^4 + 1} \right) dx$	① $\int_1^2 (2x - 1 + \frac{1}{x^2}) dx$
⑦ $\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \right) dx$	② $\int_1^2 (x + 1)^3 dx$
⑧ $\int_0^{\ln 2} e^{2x} (e^{2x} + 4) dx$	③ $\int_1^4 \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$
⑨ $\int_0^1 \left(\frac{-3x}{x^2 + 1} \right) dx$	④ $\int_3^4 x^2 (x^3 + 1) dx$
⑩ $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \right) dx$	⑤ $\int_1^3 \left(\frac{7x}{(x^2 - 4)^3} \right) dx$

حل التطبيق :

$$\int_0^1 (2x - 1 + \frac{1}{x^2}) dx = \left[x^2 - x - \frac{1}{x} \right]_0^1 = \left(2^2 - 2 - \frac{1}{2} \right) - \left(1^2 - 1 - \frac{1}{1} \right) = \frac{5}{2}$$

$$\int_1^2 (x+1)^3 dx = \left[\frac{(x+1)^4}{4} \right]_1^2 = \left(\frac{(2+1)^4}{4} \right) - \left(\frac{(1+1)^4}{4} \right) = \frac{81}{4} - 4 = 16,25$$

$$\int_1^4 \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = [3 \ln|x| + \sqrt{x}]_1^4 = (3 \ln 4 + \sqrt{4}) - (3 \ln 1 + \sqrt{1}) = 1 + 3 \ln 4 = 5,15$$

$$\int_3^4 x^2(x^3 + 1) dx = \left[\frac{1}{6} (x^3 + 1)^2 \right]_3^4 = \left(\frac{1}{6} (4^3 + 1)^2 \right) - \left(\frac{1}{6} (3^3 + 1)^2 \right) = 10877,5$$

$$\int_1^3 \left(\frac{7x}{(x^2 - 4)^3} \right) dx = \frac{7}{2} \int_1^3 \left(\frac{2x}{(x^2 - 4)^3} \right) dx = \frac{7}{2} \left[\frac{-1}{2(x^2 - 4)^2} \right]_1^3 = \frac{7}{2} \left[\left(\frac{-1}{2(3^2 - 4)^2} \right) - \left(\frac{-1}{2(1^2 - 4)^2} \right) \right] = 0,12$$

$$\int_1^2 \left(\frac{x^3}{x^4 + 1} \right) dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \left(\frac{4x^3}{x^4 + 1} \right) dx = \frac{1}{4} [\ln(x^4 + 1)]_1^2 = \frac{1}{4} [(\ln(2^4 + 1)) - (\ln(1^4 + 1))] = 0,53$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}} \right) dx = [\sqrt{2x+1}]_1^2 = (\sqrt{2(2)+1}) - (\sqrt{2(1)+1}) = 0,5$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}(e^{2x} + 4) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} 2e^{2x}(e^{2x} + 4) dx = \frac{1}{2} [e^{2x} + 4]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} [(e^{2 \ln 2} + 4) - (e^{2(0)} + 4)] = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{-3x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{-3}{2} \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{-3}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{-3}{2} [(\ln(1^2 + 1)) - (\ln(0^2 + 1))] = \frac{-3}{2} \ln 2$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}} \right) dx = \frac{2}{3} [\sqrt{3x+1}]_0^1 = \frac{2}{3} [(\sqrt{3(1)+1}) - (\sqrt{3(0)+1})] = \frac{2}{3}$$

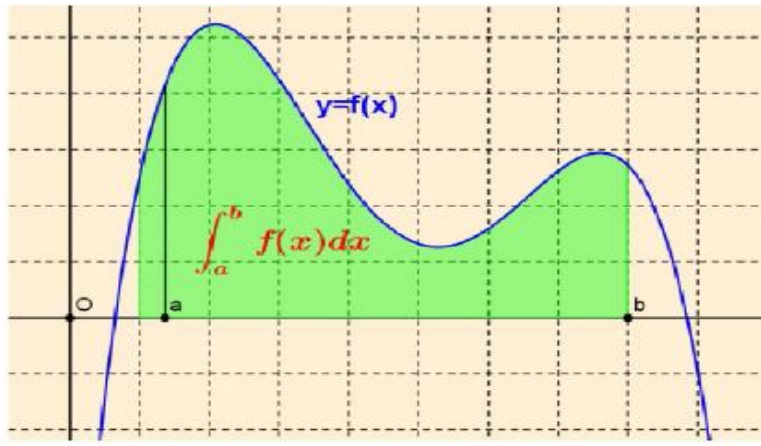
حساب المساحات

4

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ، (C_f) و (C_g) المنحنيين المثلثان للدالتين f و g على الترتيب
نرمز بـ A إلى مساحة حيز D من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a$ و $x = b$
لحساب المساحة A نميز ثلاث حالات :

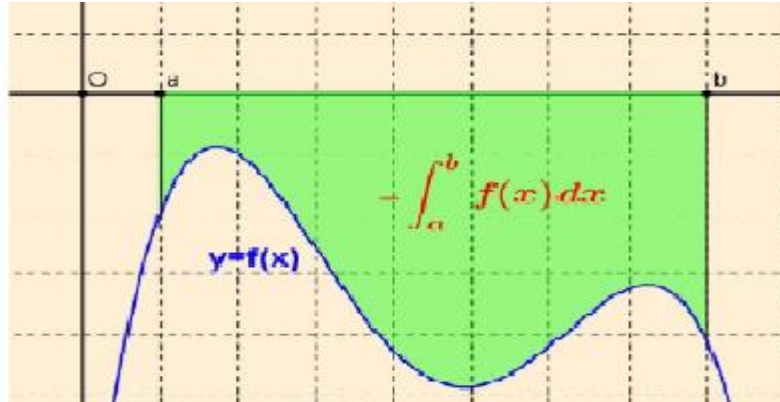
أ- حالة دالة موجبة على مجال $[a; b]$:

إذا كان (C_f) يقع فوق محور الفواصل على المجال $[a; b]$ فإن : $A = \int_a^b f(x) dx$



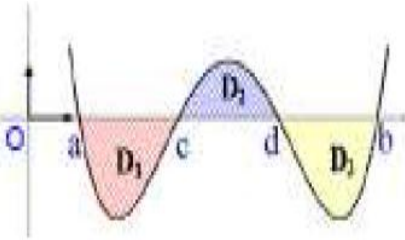
ب- حالة دالة سالبة على مجال $[a; b]$:

إذا كان (C_f) يقع تحت محور الفواصل على المجال $[a; b]$ فإن : $A = \int_a^b -f(x)dx$



ج - حالة دالة تغير إشارتها على مجال $[a; b]$:

لحساب المساحة A نقوم بحساب تكامل الدالة f على المجالات التي يكون فيها (C_f) فوق محور الفواصل وبحساب تكامل الدالة $-f$ على المجالات التي يكون فيها (C_f) تحت محور الفواصل ، ثم نقوم بجمع هذه المساحات فمثلا في الشكل الموالي المساحة A تساوي :



$$A = - \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx$$

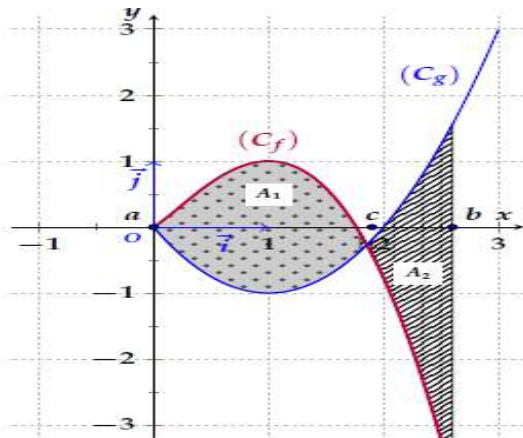
مساحة حيز محدد بمنحنيين :

نرمز بـ A إلى مساحة حيز D من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و (C_g) والمستقيمين $x = a$ و $x = b$

إذا كان (C_f) يقع فوق (C_g) على المجال $[a; b]$ فإن :

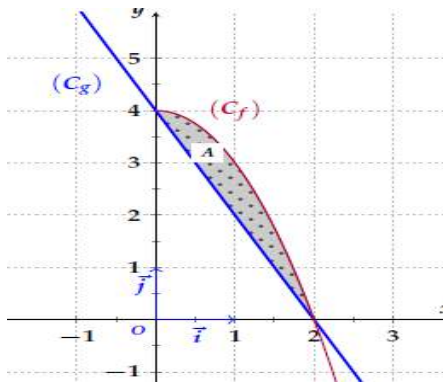
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

والعكس صحيح



مثال :

f و g دالتين معرفتين على المجال $[0; 2]$ بـ : $f(x) = -x^2 + 4$ ، $g(x) = -2x + 4$ ، (C_g) و (C_f) تمثيلهما البياني لهما على الترتيب



❖ لنحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_g) و (C_f)

والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 2$ و $x = 0$

لدينا من أجل كل x من $[0; 2]$: $f(x) \geq g(x)$ ومنه

$$A = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx$$

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} (u.a)$$

مبرهنة : لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق على I ، بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا : $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$

ملاحظات :

- ✓ يمكننا التكامل بالتجزئة من إيجاد التكامل في بعض الحالات التي لا يمكن إيجاد التكامل عن طريق القواعد .
- ✓ تذكر دائما أن التكامل بالتجزئة لا يصلح في كل الحالات .
- ✓ في بعض الحالات لا يكفي تطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة مرة واحدة .

مثال : لنحسب التكامل : $\int_0^1 (x + 2)e^x dx$

لحساب التكامل يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x) = x + 2$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$$\int_0^1 (x + 2)e^x dx = [(x + 2)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [(x + 2)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 =$$

$$((1 + 2)e^1) - ((0 + 2)e^0) - [(e^1) - (e^0)] = 2e - 1$$

تطبيق : باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات الآتية :

$$\begin{array}{ll} \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx & \textcircled{3} \\ \int_0^\pi (x \cos x) dx & \textcircled{4} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int_1^e x \ln x dx & \textcircled{1} \\ \int_2^3 \ln(x - 1) dx & \textcircled{2} \end{array}$$

حل التطبيق :

① لحساب $\int_1^e x \ln x dx$ ، يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = \frac{1}{2} x^2$	$v'(x) = x$

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e =$$

$$\left(\frac{1}{2} e^2 \ln e \right) - \left(\frac{1}{2} 1^2 \ln 1 \right) - \frac{1}{4} [(e^2) - (1^2)] = \frac{e^2 + 1}{4}$$

② لحساب $\int_2^3 \ln(x-1) \, dx$ ، يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x) = \ln(x-1)$	$u'(x) = \frac{1}{x-1}$
$v(x) = x-1$	$v'(x) = 1$

$$\int_2^3 \ln(x-1) \, dx = [(x-1) \ln(x-1)]_2^3 - \int_2^3 1 \, dx = [(x-1) \ln(x-1)]_2^3 - [x]_2^3 =$$

$$((3-1) \ln(3-1)) - ((2-1) \ln(2-1)) - [(3) - (2)] = -1 + 2 \ln 2$$

③ لحساب $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ ، يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = -\frac{1}{x}$	$v'(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_1^e - \left[\frac{1}{x} \right]_1^e =$$

$$\left(-\frac{1}{e} \ln e \right) - \left(-\frac{1}{1} \ln 1 \right) - \left[\left(\frac{1}{e} \right) - \left(\frac{1}{1} \right) \right] = 1 - 2e^{-1}$$

④ لحساب $\int_0^\pi (x \cos x) \, dx$ ، يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = \sin x$	$v'(x) = \cos x$

$$\int_0^\pi (x \cos x) \, dx = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = [x \sin x]_0^\pi - [-\cos x]_0^\pi =$$

$$(\pi \sin \pi) - (0 \sin 0) + [(\cos \pi) - (\cos 0)] = -2$$

ملاحظة : الدوال الأصلية للدالة $\ln(x+a)$ هي : $(x+a) \ln(x+a) - x + c$

تصلي وتصوم وتقرأ القرآن وتعب في العمل ويأتي
من يأخذ حسناتك مرتاحا ، فقط لأنك أغتبتة .
حذاري من فاكهة المجالس