



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

# تمارين مع الحل في المتتاليات العددية

## 4

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 15

1 (1) المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1 + u_n} \end{cases}$$

1 احسب  $u_1$  و  $u_2$ .

2 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $0 < u_n < 3$

2 لتكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

1 بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{4}$

2 اكتب  $(v_n)$  بدلالة  $n$ ، ثم استنتج  $(u_n)$  بدلالة  $n$ .

3 احسب نهاية المتتالية  $(u_n)$ .

3 (3) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:

$$w_n = \frac{3}{u_n}$$

نضع:  $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

1 اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $w_n = 1 - v_n$

2 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :

$$S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$$

3 احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n/n]$

1

① حساب  $u_1$  و  $u_2$ :

$$\begin{aligned} u_{0+1} &= \frac{4u_0}{1+u_0} \Rightarrow u_1 = \frac{4}{2} \\ &\Rightarrow \boxed{u_1 = 2} \\ u_{1+1} &= \frac{4u_1}{1+u_1} \Rightarrow u_2 = \frac{4 \times 2}{1+2} \\ &\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{8}{3}} \end{aligned}$$

② البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $0 < u_n < 3$

• من أجل  $n = 0$  لدينا:

$$\begin{aligned} 0 &< 1 < 3 \\ \Rightarrow 0 &< u_0 < 3 \dots (*) \end{aligned}$$

الخاصية محققة من أجل  $n = 0$

• نفرض أن  $0 < u_n < 3$  صحيحة ونثبت أن  $0 < u_{n+1} < 3$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{4u_n + 4 - 4}{1+u_n} \\ &= \frac{4(u_n + 1)}{1+u_n} - \frac{4}{1+u_n} \\ &= 4 - \frac{4}{1+u_n} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 3 &\Rightarrow 1 < 1 + u_n < 4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{1+u_n} < 1 \\ &\Rightarrow 1 < \frac{4}{1+u_n} < 4 \\ &\Rightarrow -4 < -\frac{4}{1+u_n} < -1 \\ &\Rightarrow 0 < 4 - \frac{4}{1+u_n} < 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 3 \dots (**)$$

حسب البرهان بالتراجع من (\*) و (\*\*) نجد أن:

$$\boxed{0 < u_n < 3}$$

2

① تبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{4}$ :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{4u_n}{1+u_n} - 3}{\frac{4u_n}{1+u_n}} \\ &= \frac{4u_n - 3 - 3u_n}{4u_n} \\ &= \frac{u_n - 3}{4u_n} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{u_n - 3}{u_n} \right) \\ &= \frac{1}{4} v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0 - 3}{u_0} \\ &= \frac{1 - 3}{1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{4}$  وحدها الأول  $-2$

② كتابة  $(v_n)$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $(u_n)$  بدلالة  $n$ :

$$\boxed{v_n = -2 \left( \frac{1}{4} \right)^n}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n - 3}{u_n} \Rightarrow v_n u_n - u_n = -3 \\ &\Rightarrow u_n (v_n - 1) = -3 \\ &\Rightarrow u_n = \frac{-3}{v_n - 1} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{3}{1 - v_n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

③ حساب نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( u_n = \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n} \right) \\ &= \frac{3}{1 + 2(0)} \\ &= \boxed{3} \end{aligned}$$

3

① اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : w_n = 1 - v_n$  :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{3}{u_n} \\ &= \frac{3}{\frac{3}{1 - v_n}} \\ &= 3 \times \frac{1 - v_n}{3} \\ &= \boxed{1 - v_n} \end{aligned}$$

② تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left[ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right]$  :

$$\begin{aligned} S_n &= w_0 + w_1 + \dots + w_n \\ &= 1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_n \\ &= 1(n + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\ &= n + 1 + 2 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \\ &= n + 1 + 2 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \right) \\ &= \boxed{n + 1 + \frac{8}{3} \left( 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right)} \end{aligned}$$

③ حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{S_n}{n} \right]$  :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n/n] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{8}{3n} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \right] \\
 &= \boxed{1}
 \end{aligned}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶