

فرض الفصل الثالث في مادة الرياضيات

الأستاذ: قويسم ابراهيم الخليل

المدة: 1 سا و 15 د

المستوى: ثانية ثانوي - رياضيات

ملاحظة: يمنع إستعمال اللون الأحمر والأخضر

التمرين الأول [03 نقاط]

① حل في المجال $[-\pi; 2\pi[$ المعادلة: $\cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$ ② حل في المجال $[0; \pi]$ المتراجحة: $2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \leq 0$

التمرين الثاني: [09 نقاط]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} \end{cases}$$

و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ ① بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v₀

②

أ/ اكتب عبارتي v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة nب/ احسب نهاية المتتالية (u_n)

③

أ/ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

ج/ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$

التمرين الثالث [08 نقاط]

ABC مثلث متقايس الأضلاع، ACD مثلث قائم في A حيث:

$$\vec{DC}; \vec{DA} = -\frac{\pi}{6} \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

E نقطة من الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ADC ذات

المركز O

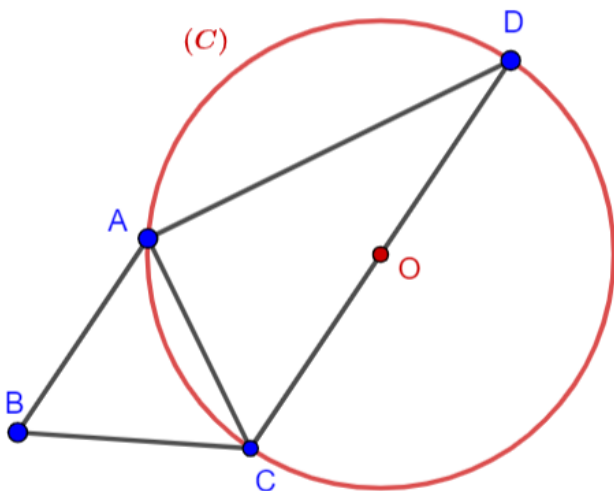
① عيّن القيس الرئيسي لكل من الزوايا:

$$(\vec{CA}; \vec{CB}) \text{ و } (\vec{CD}; -2\vec{CA})$$

② عيّن قيسا رئيسيا للزوايا (EĀ; EC) مستنتجا قيس لـ

$$(\vec{OA}; \vec{OC})$$

③ استنتج نوع المثلث ACO

④ بين أن العدد $\frac{2018\pi}{6}$ هو قيس لـ (OĀ; OC)

تصحيح مقترح لفرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

الأستاذ: قويسم إبراهيم الخليل

المستوى: ثالثة ثانوي - علوم تجريبية

التمرين الأول [03 نقاط]

① حل في المجال $[-\pi; 2\pi]$ المعادلة: $\cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$

$$\cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{أو} \\ \sqrt{2} \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \dots (*) \\ \text{أو} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots (**) \end{cases}$$

نحل المعادلة (*):

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi < 2\pi \quad \text{لدينا:}$$

$$-1.5 \leq k < 1.5 \quad \text{ومنه:}$$

$$k = \{-1; 0; 1\} \quad \text{ومنه:}$$

نحل المعادلة (**):

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{أو} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi \quad \text{لدينا:}$$

$$-0.625 \leq k < 0.875 \quad \text{ومنه:}$$

$$k = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$-\pi \leq \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi \quad \text{ولدينا:}$$

$$-0.875 \leq k < 0.625 \quad \text{ومنه:}$$

$$k = 0 \quad \text{ومنه:}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(-\frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}\right); \left(\frac{3\pi}{4}\right) \right\}$$

[01ن]

② حل في المجال $[0; \pi]$ المتراجحة: $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 0$

$$2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 0 \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{6} \quad \text{نضع:}$$

ومنه:

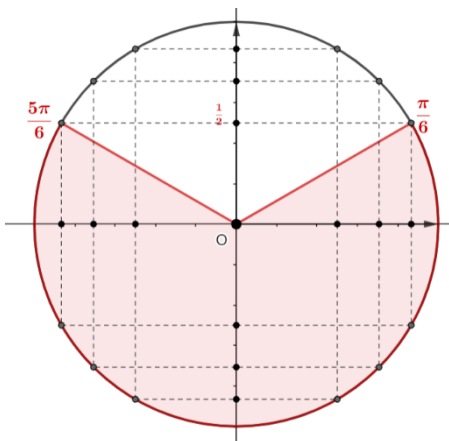
$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin y \leq \frac{1}{2}$$

$$2x \in]0; 2\pi] \quad \text{ومنه:} \quad x \in]0; \pi]$$

$$x \in \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right] \quad \text{ومنه:} \quad \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right] \quad \text{ومنه:}$$

[0.5ن]

[0.5ن]



$$S'_{]-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}] =]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$$

ومنه:

$$S_{[0; \pi]} = \left[-\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2}; \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2}; \frac{\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2}\right] = \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

[0.5ن]

التمرين الثاني: [09 نقاط]

1 تبين أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\left(\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1\right)}{\left(\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2\right)} = \frac{2u_n + 2 - u_n - 3}{2u_n + 2 + 2u_n + 6} = \frac{u_n - 1}{4u_n + 8} = \frac{1}{4} \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) = \frac{1}{4} v_n$$

[0.5ن]

ولدينا:

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{-1}{2}$$

[0.1ن]

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول

2

أ/ كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

[0.1ن]

ب- كتابة عبارة u_n بدلالة n :

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow v_n(u_n + 2) - (u_n - 1) = 0 \Rightarrow v_n u_n + 2v_n - u_n + 1 = 0$$

$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -(2v_n + 1) \Rightarrow u_n = -\frac{2v_n + 1}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{-(2^{-2})^n + 1}{1 + (2^{-1})(2^{-2})^n} \Rightarrow u_n = \frac{1 - 2^{-2n}}{1 + 2^{-2n-1}}$$

[0.1ن]

ب/ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\overbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}^0 + 1}{1 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_0} \right] = \frac{1}{1} = 1$$

[0.1ن]

3

أ/ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \right) = -\frac{2}{3} (1 - (2^{-2})^{n+1})$$

$$= \frac{2}{3} (2^{-2(n-1)} - 1)$$

[0.5ن]

ب/ التحقق أنه: $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3} (1 - v_n)$:

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow 1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow 1 - v_n = \frac{u_n + 2 - u_n + 1}{u_n + 2} \Rightarrow 1 - v_n = \frac{3}{u_n + 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}(1 - v_n) = \frac{1}{u_n + 2}}$$

[01ن]

ج/ استنتاج بدلالة n المجموع S'_n

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_0) + \frac{1}{3}(1 - v_1) + \dots + \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

$$= \frac{1}{3}(1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_n) = \frac{1}{3} \left[1(n + 1) - \underbrace{(v_0 + v_1 + \dots + v_n)}_{S_n} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[n + 1 - \frac{2}{3}(2^{-2(n-1)} - 1) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{3n}{3} + \frac{3}{3} - \frac{2^{-2(n-1)+1}}{3} + \frac{2}{3} \right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{9}[3n + 5 - 2^{3-2n}]}$$

[01ن]

التمرين الثالث [08 نقاط]

① عيّن القيس الرئيسي لكل من الزوايا $(\overrightarrow{CD}; -2\overrightarrow{CA})$ و $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$

$$\bullet \boxed{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}}$$

[01.5ن]

لدينا:

$$(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \pi \Rightarrow (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3}$$

ومنه:

$$\bullet (\overrightarrow{CD}; -2\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) + \pi \Rightarrow (\overrightarrow{CD}; -2\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3} + \pi \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{CD}; -2\overrightarrow{CA}) = \frac{4\pi}{3}}$$

[01.5ن]

② تعيين قيسا رئيسيا للزوايا $(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC})$ مستنتجا قيس $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$:

$$(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{6}}$$

[01.5ن]

ولدينا: حسب نظرية الزاوة المحيطية:

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}) \Rightarrow (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}) = 2 \times \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3}}$$

[01.5ن]

③ استنتاج نوع المثلث ACO :

$$\text{لدينا: } (\overrightarrow{CO}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3} \text{ و } (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3} \text{ ومنه المثلث } ACO \text{ متقايس الأضلاع}$$

[01ن]

④ تبين أن العدد $\frac{2018\pi}{6}$ هو قيس $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA})$:

$$\frac{2018\pi}{6} = \frac{2016\pi + 2\pi}{6} = \frac{2016\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = 336\pi + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{3} = (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA})}$$

[01ن]

بالتوفيق

الأستاذ: قويسم خليل