

100

تصريح

في

المتتاليات العددية

للمتتاليات العددية



01 التمرين

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي) ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1009$.

(I) عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(II) نضع : $\alpha = 2019$.

أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 2018$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنها متقاربة.

02 التمرين

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.

✓ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = n + 2^n$.

03 التمرين

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2}$.

(1) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 3$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

04 التمرين

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ و $u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n$.

نضع، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $w_n = 3^n u_n$.

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول، ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

(2) بين أن المتتالية (w_n) حسابية.

(3) أكتب بدلالة n عبارة u_n .

05 التمرين

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

✓ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{4n + 15}{n + 3}$.



06 التمرين

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 2n + 1$.

(1) أحسب u_0 ، u_1 و u_{1009} .

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r .

(3) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = (n+1)^2$.

ب- استنتج قيمة المجموع: $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 2019$.

(4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{-u_n}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب- أحسب بدلالة n الجداء P_n بحيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

ج- أحسب بدلالة n كلا من المجموعين T_n و T'_n بحيث:

$$T_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad \text{و} \quad T'_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

07 التمرين

(u_n) متتالية حسابية متناقصة، حدّها الأول u_0 وأساسها r .

(1) عيّن u_0 و r ، علماً أن: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$.

(2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

08 التمرين

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2}u_n$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{4}$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^n$.

ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

09 التمرين

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحيث: $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n^2 + n}{3}$.

(1) أحسب u_0 و u_1 .

(2) بين أن المتتالية (u_n) حسابية، ثم أكتب u_n بدلالة n .

10 التمرين

$$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases} \cdot (u_n) \text{ متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول } u_0 \text{ وأساسها } q \text{ حيث:}$$

(1) أحسب u_1 و u_2 ، ثم استنتج قيمة الأساس q .

(2) نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$.

أ- عبر عن u_n بدلالة n .

ب- نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$. أحسب S_n بدلالة n .

11 التمرين

$$(u_n) \text{ متتالية معرفة بحدها الأول } u_0 = \frac{1}{2} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$$

(1) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < u_n < 2$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(2 - u_n)$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

12 التمرين

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } u_n = \frac{2-n}{4} + \frac{1}{2^n}$$

✓ أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

13 التمرين

$$\text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة بـ: } u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = 5u_n - n + \frac{1}{4}$$

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{n}{4}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د- أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

14 التمرين

$$\text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة بـ: } u_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

(1) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{n}{n+1}$.

(2) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n$.



(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\ln u_1 + \ln u_5 = -12$ و $\ln u_2 - \ln u_4 = 4$.

(1) عيّن أساس المتتالية (u_n) وحدّها الأول u_0 .

(2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.

أبين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها.

بـ أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي) ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

(I) عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(II) في كل ما يلي: $\alpha = -1$.

(1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.

أبين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 .

بـ أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم استنتج u_n بدلالة n .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n = -4 \times 2^n$, ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) أحسب، بدلالة n ، المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 1$.

(1) أـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > 1$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (a_n) و (b_n) المتتاليتان المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $a_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n - 1)$ و $b_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$.

أثبت أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{3 + u_n^2}$.

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 \leq u_n < 1$.

بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$.

أـ بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

بـ أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و S'_n بحيث:

$$S'_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \quad \text{و} \quad S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

[باك 2008]

التفريث 19

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) ، ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9}$.

(1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

(2) في كل مايلي : $\alpha = 2$ ، ونعرف المتتالية العددية (v_n) كمايلي : $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أـ أحسب u_1 و u_2 .

بـ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

جـ أكتب عبارة u_n بدلالة n . وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[باك 2012]

التفريث 20

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والإحتياط . يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا .

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA (بعد حساب الفوائد) .

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$.

(1) أـ أحسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2 .

بـ هل المتتالية (u_n) هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ بزر إجابتك .

جـ بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا ، $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 100000$.

أـ بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، حدد أساسها وحدها الأول .

بـ أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$.

(3) أـ ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

بـ ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة ؟

[باك 2013]

التفريث 21

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$ ، حيث a وسيط حقيقي .

(1) عين قيمة a من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

(2) نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ، ثم أحسب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية .

(3) عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية ، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها .

(4) نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن : $u_n = 3^n + 2$ ، ثم بين أن :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -3$

بـ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(2) لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = 18$

أـ بين أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

بـ أحسب الأساس q ثم عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

جـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

بينت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا .
علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000 .

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$.

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$

بـ بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 60 - u_n$.

أـ بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

بـ أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ قدر عدد العمال سنة 2017 .

دـ حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

هـ أحسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0 = 18$ والعلاقة: $v_0 + v_1 + v_2 = 38$.

(1) بين أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$.

(2) أـ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

جـ أحسب نهاية (v_n) .

(3) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

أـ أحسب S_n بدلالة n ، ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

بـ جد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

- (1) أحسب u_1, u_2, u_3 ، ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - u_n$.
أـ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدّها الأول .
بـ عين v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة .
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$.
أـ أحسب S_n بدلالة n .
بـ بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

- (1) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
- (2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كما يلي :
من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ و $u_n = w_n - v_n$.
بين (u_n) متتالية حسابية ، يطلب تعيين أساسها r و حدّها الأول u_0 .
- (3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$.
- (4) إستنتج المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي :

$$u_0 = 50 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = 0,7u_n + 6 \text{ و } v_n = u_n - 20$$

- (1) برهن أن (v_n) هندسية أساسها 0,7 ، وكتابة عبارة v_n بدلالة n .
- (2) أـ أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n .
بـ عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد .

نعتبر المئة هي الوحدة ، ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين سنة $2016 + n$ أي $u_0 = 50$

- (1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟
- (2) أـ برز العبارة : $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$.
بـ إبتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = -4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

- (1) أ- أحسب كلا من u_1 و u_2 .
ب- برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 8$.
- (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .
- (3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n - \alpha$
أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$.
ب- عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .
- ج- نضع $\alpha = 8$ ، عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.
- (4) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

- (1) حساب حدها الأول u_0 وأساسها r .
- (2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- (3) بين أن العدد 2019 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ثم أحسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$$S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344} \quad \text{و} \quad S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344}$$
 - استنتج حساب المجموع S_3 حيث : $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{1343}$
- (4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = e^{6-2u_n}$
 أحسب المجموع $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$.

[باك 2008] [م1]

التفريق 30

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ- بين أن الدالة f متزايدة على I .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

(2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب- عين النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[باك 2008] [م2]

التفريق 31

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

(1) أ- أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f

المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .

ج- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة.

ج- هل (u_n) متقاربة؟ بزر إجابتك.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[باك 2008] [م2]

التفريق 32

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أحسب v_0 و v_1 .

(2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

$$u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1 : n \text{ : عدد طبيعي}$$

جـ- بين أن (u_n) متقاربة.

[باك 2009] [2م]

التدريب 33

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} : \text{حيث } q \text{ : حيث } (u_n) \text{ متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول } u_1 \text{ وأساسها } q$$

1) أ- أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج- أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

$$(2) (v_n) \text{ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \text{ كما يلي : } v_1 = 2 \text{ و } v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$

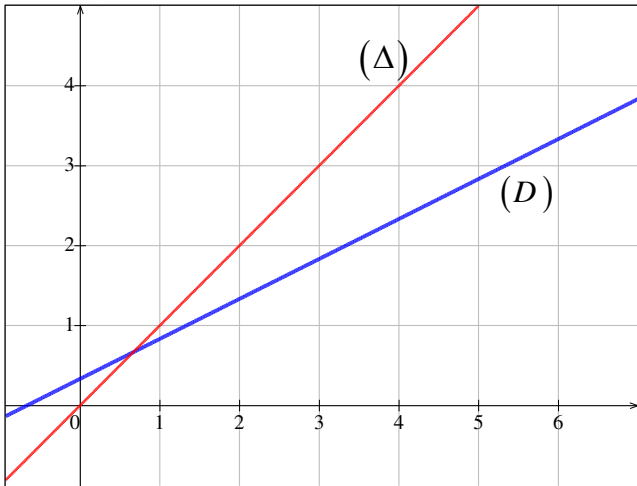
أ- أحسب v_2, v_3 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج- أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

[باك 2010] [2م]

التدريب 34



في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين

$$(D) \text{ و } (\Delta) \text{ معادلتيهما على الترتيب : } y = x \text{ و } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

$$\text{ب : } u_0 = 6 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ- أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \text{ و } u_4 \text{ دون حسابها مبرزاً خطوط الرسم}$$

ب- عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

ج- أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$(2) \text{ أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n \geq \frac{2}{3}$$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بالعلاقة : } v_n = u_n - \frac{2}{3}$$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

$$\text{ج- أحسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث : } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n, \text{ استنتج المجموع } S'_n \text{ حيث : } S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

[باك 2011] [1م]

التدريب 35

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ : } u_0 = -1 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = 3u_n + 1$$

$$\text{و } (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ : } v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليق.

- (1) المتتالية (v_n) : أ- حسابية. ب- هندسية. ج- لا حسابية ولا هندسية.
- (2) نهاية المتتالية (u_n) هي : أ- $+\infty$. ب- $-\frac{1}{2}$. ج- $-\infty$.
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$ ،
 أ- $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$. ب- $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$. ج- $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$.

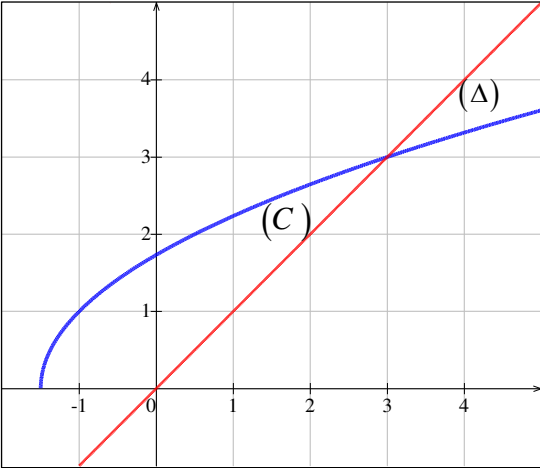
[2م] [باك 2011]

التفريغ 36

- α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.
- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.
- (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.
- (1) أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .
 ب- أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n .
 ج- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة .
- (2) نضع : $\alpha = \frac{3}{2}$.
 - أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

[1م] [باك 2012]

التفريغ 37

- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.
- (1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي : $h(x) = \sqrt{2x + 3}$ و (C) تمثيلها البياني
- 
- و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل المقابل).
- أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0, u_1, u_2 و u_3 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء).
- ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها .
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.
- (3) أ- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[1م] [باك 2012]

التفريغ 38

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.
- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.
- (2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما .
- (3) برز لماذا (u_n) متقاربة .

(4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول.

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$.

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

[باك 2013] [1م]

التدريب 39

(I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

(1) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) أ- برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب- بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[باك 2013] [2م]

التدريب 40

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول، $u_0 = \frac{1}{2}$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2

و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل.

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أ- أثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$

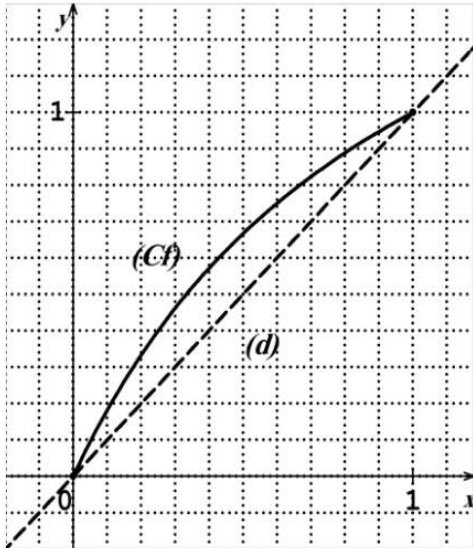
ب- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

ج- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

أ- برهن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0 .

ب- أحسب نهاية (u_n) .



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$

أبين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

بـ أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$

(I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ (يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).

(1) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

(2) أـ أحسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$

بـ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

(1) أحسب: u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

(3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$

أـ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

جـ بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

(1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

(2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة: $y = x$.

(3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$.

(II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) أ- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و v_0, v_1, v_2, v_3 دون حسابها.

ب- خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(2) أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث: $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب- استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(3) أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب- بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

ج- استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x+8}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي: $y = x$ معادلة له.

(3) أرسم (C) و (Δ) .

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها) موضعا خطوط الإنشاء.

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(3) أ- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

د- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 3$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ بـ: $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$.

(1) أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

ب- بين أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I .

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$.

(4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

ب- أكتب بدلالة n .

ج- استنتج أن: $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أعبّر بدلالة n عن الحد العام v_n .

بـ استنتج عبارة الحد u_n العام بدلالة n .

جـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أـ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

بـ تحقق أن: $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

جـ أحسب بدلالة n المجموع $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$.

[باك 2017] [1م]

التمرين 49

(u_n) و (v_n) متتايتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ و من من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}, \text{ و } v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$$

(1) أـ برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي $n, 0 < u_n < 1$.

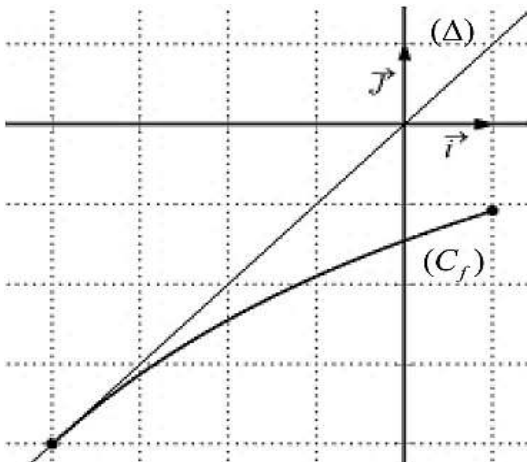
بـ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) أـ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبّر عن حدها العام v_n بدلالة n .

بـ أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[باك 2017] [2م]

التمرين 50



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و

f الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$

و (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$.

(I) تحقق أن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$. ثم بين أن :

من أجل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$

(II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أـ أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حسابها.

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, -4 \leq u_n \leq 0$

ثم بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

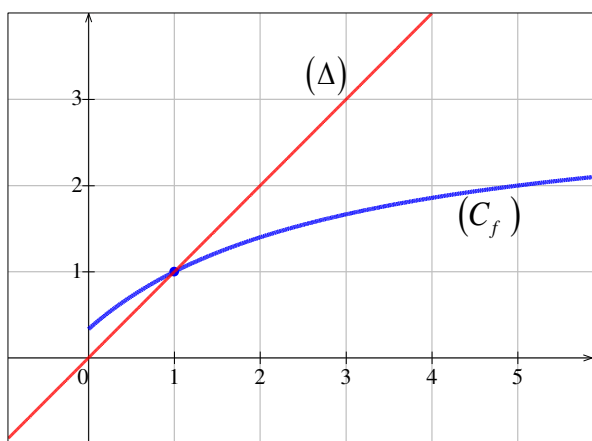
أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

- (1) أحسب الحدين u_1 و v_1 .
- (2) أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.
- بـ باستعمال البرهان بالتراجع بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.
- (3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$
- برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n .
- (4) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم



متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بعدها

الأول $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) عين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$

(2) أ أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها.

بـ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

بـ عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ حيث $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

(1) أ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

بـ بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

- أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

(3) عبر بدلالة n عن v_n و u_n ، وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

[باك 2018] [2م]

التفريغ 54

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

(1) أحسب كلا من u_1, u_2, u_3

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = 2n+1$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$.

ب- استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب المجموعين S_n و T حيث : $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}}$

[باك 2019] [1م]

التفريغ 55

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(3) أكتب v_n بدلالة n ، ثم بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ وأحسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(4) بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_1 - 1) \times (u_2 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$

[باك 2019] [2م]

التفريغ 56

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[4; 7]$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

(1) أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$.

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإن $f(x) \in [4; 7]$

(2) برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإن $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإن $f(x) - x > 0$

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة.

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

[باك 2008] [م1]

التمرين 57

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; 2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $4cm$)

(1) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$.

ب- أنشئ (C_f) .

ج- برهن أنه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن $f(x) \in [0; 2]$.

(2) نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

أبرز وجود المتتالية (u_n) ، ثم أحسب u_1 و u_2 .

ب- مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محاور الفواصل وذلك بالاستعانة بـ (C_f) والمستقيم (D) ذو المعادلة : $y = x$.

ج- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها إنطلاقاً من التمثيل السابق .

(3) أبرهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > u_n$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب المتتالية (u_n) ؟

ج- تحقق أن : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

عين عدداً حقيقياً k من المجال $]0; 1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k|u_n - \sqrt{3}|$.

بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[باك 2008] [م2]

التمرين 58

(1) f الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$.

و (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

أ- أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

ب- أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن المستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أرسم المنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

د- بين أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- باستخدام (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ مثل u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محاور الفواصل .

ب- خمن اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

جـ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ ، وأن المتتالية (u_n) متزايدة .

استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[باك 2011] [1م]

التدريب 59

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج أن $u_n > 1$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة ، وأحسب نهايتها .

(3) ليكن P_n الجداء المعروف كما يلي : $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$.

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$.

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \ln u_n$.

عبر بدلالة P_n عن S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

[باك 2014] [1م]

التدريب 60

(I) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x-1)$.

(1) حدد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$.

(2) أـ عين اتجاه تغير f .

(3) بـ- بين أنه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإن $f(x) \in [2; e+1]$.

(II) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = e+1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in [2; e+1]$.

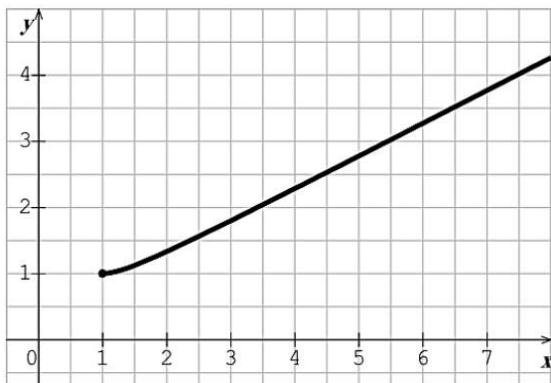
(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها .

[باك 2016] [2م]

التدريب 61

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



(1) بين أن الدالة f متزايدة على المجال $]1; +\infty[$.

(2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$.

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أـ أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) .

على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

بـ- أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

جـ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$.

دـ- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

هـ- برر تقارب المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$.

أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدّها الأول .
ب- أكتب بدلالة w_n بدلالة n ، ثم بدلالة n .

ج- بين أن : $u_n = 1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots + \frac{1}{w_n}$.

[باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م2]

التدريب 62

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$ ، حيث α عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2 .

(1) أ- بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$.
ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ وعين حدّها الأول v_1 بدلالة α .

ب- جد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_n}{n}$.

عين قيمة α حيث : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2016}$.

[باك 2018] [م1]

التدريب 63

f الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{e.x + 1}$. (e أساس اللوغاريتم النبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول : $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) أ- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{1}{e}$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{e.u_n + 1}$.

ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) وبرر أنها متقاربة .

(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$.

بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 عبارة v_n بدلالة n .

(3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ و استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ب- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.



[1م] [باك 2008]

التفريق 64

لتكن f الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ ، و
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ وفسر النتيجة هندسياً .

- أدرس تغيرات الدالة f .
- باستعمال منحنى دالة "الجزر التربيعي" أنشئ (C_f) .
- أرسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$.

(2) نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

أ- باستعمال (D) و (C_f) مثل u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل .

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \leq u_0 \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة . أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

[2م] [باك 2008]

التفريق 65

(u_n) المتتالية المعرفة بعدها الأول $u_0 = 2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

(1) أحسب u_0, u_1, u_2 .

(2) (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

• برهن بالتراجع أن (v_n) ثابتة .

• استنتج عبارة u_n بدلالة n .

• أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(3) (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

أحسب المجموع : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

(1) نعرف الدالة f على المجال $[1;5]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 3cm)
أ- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- أنشئ (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ في نفس المعلم.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 5$ وبالعبارة: $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$.

أ- أحسب u_1 و u_2 .

ب- أ- باستعمال (D) و (C_f) مثل u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل.

(3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n \geq \sqrt{5}$.

ب- بين أن (u_n) متناقصة تماما، ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها؟

(4) أ- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي $n, (u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$.

ب- إستنتج أن: $(u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$. ما هي $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$.

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان.

(1) عين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأول.

(2) أحسب كلا من u_n و v_n بدلالة n .

(3) أحسب المجموعين S_n و S'_n بحيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

[Bac Maroc 2003]

التقريب 68

I. الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة على يمين الصفر .

ب- أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 2$.(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .(3) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

[Bac Maroc 2004]

التقريب 69

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{(u_n)^3}{3(u_n)^2 + 1}$.(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم إستنتج أنها متقاربة .(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} < \frac{1}{3}u_n$.ب- إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، ثم أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[Bac Maroc 2007]

التقريب 70

I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1)$.نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + n - 1$.(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.(2) أ- أكتب عبارة v_n بدلالة n .ب- إستنتج u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$ و $S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$.

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$.

ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول: $u_1 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n}$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 2$.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ ، ثم بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = 2 + \frac{3}{n}$.

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n)$.

(1) أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدتها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = e^{S_n}$.

ب- أكتب S_n بدلالة n ، ثم استنتج P_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.



نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$.

- (1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.
- ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- ج- برز تقارب المتتالية (u_n) .

(2) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

- أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$.

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq e^2$.
- (2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.
- (3) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n) - 2$.
- أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$.
- ج- أكتب عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(I) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

- (1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = x$.
 - (2) أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
 - ب- بين أنه إذا كان $x \in [0; 1]$ فإن $f(x) \in [0; 1]$.
- (II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.
- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in [0; 1]$.
 - (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 - (3) برز تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

(1) أحسب: u_1, u_2, u_3 .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n + 3$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$. استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - n$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$. ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أ- أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n بحيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

ب- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)^2}{6 - u_n}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

ج- برز تقارب المتتالية (u_n) .

(2) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{1}{3}$ ، ثم أحسب حدها الأول.

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

(1) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1 .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n = \frac{n}{2^n}$.

(3) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - x \ln 2$.

أ- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب- استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

(1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$: $u_n \geq 0$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $u_n \geq n - 3$.

ج- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

ج- أحسب، بدلالة n ، المجموع S_n بحيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = -1$ و $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

(1) أحسب u_2 ، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) لاهي حسابية ولاهي هندسية.

(2) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

(3) نعرف المتتالية (w_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

بين أن المتتالية (w_n) حسابية، ثم أكتب w_n بدلالة n .

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

(5) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - x \ln x$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(II) نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n = \frac{e^n}{n^n}$ و $v_n = \ln(u_n)$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n = n - n \ln n$.

ب- اعتماداً على الجزء الأول عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

ج- بين أن المتتالية (u_n) محدودة.

د- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم حدد نهايتها.



التمرين 83

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $6u_{n+1} = 5u_n + 4$.

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n < 4$.

بـ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 4$.

أـ بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

بـ أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

دـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 15\left(\frac{5}{6}\right)^n + 4n - 14$.

التمرين 84

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$.

(1) أـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 2$.

بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

جـ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

بـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

جـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 85

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = -\frac{3}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (2 + u_n)^2 - 2$.

(1) أـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-2 < u_n < -1$.

بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(u_n + 2)$.

أـ بين أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها حدها الأول .

بـ أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أـ أحسب بدلالة n كلا من المجموع S_n بحيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

بـ استنتج الجداء T_n بدلالة n حيث : $T_n = (u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times \dots \times (u_n + 2)$.

$$u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8}, \quad u_0 \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(1) عين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(2) نفرض أن: $u_0 = 0$.

أ- أحسب u_1 و u_2 .

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 \leq u_n \leq 1$, ثم أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$(3) \text{ لتكن المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ: } v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- عبر عن u_n بدلالة n , ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- أحسب بدلالة n كلا من S_n و P_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

$$(u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متتايتان معرفتان بـ: } u_0 = 1 \text{ و } v_0 = 2, \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

$$(1) (w_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ: } w_n = u_n - v_n$$

أ- بين أن (w_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة w_n بدلالة n , ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

$$(2) \text{ أ- عبر عن } u_{n+1} - u_n \text{ و } v_{n+1} - v_n \text{ بدلالة } w_n$$

ب- استنتج اتجاه تغير كلا من المتتايتين (u_n) و (v_n) , ثم بين أنهما متجاورتين.

$$(3) \text{ نضع، من أجل كل عدد طبيعي } n, t_n = 3u_n + 10v_n$$

أ- بين أن المتتالية (t_n) ثابتة، ثم أحسب نهايتها.

ب- استنتج النهاية المشتركة للمتتايتين (u_n) و (v_n) .

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول } u_0 = \frac{3}{2} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$$

$$(1) \text{ أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 1 < u_n < 2$$

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) , ثم استنتج أنها متقاربة.

$$(2) (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ: } v_n = \ln(u_n - 1)$$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$, يطلب تعيين حدها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$(3) \text{ أحسب بدلالة } n \text{ الجداء } \pi_n \text{ بحيث: } \pi_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

(I) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2.

(II) نعتبر في كل ما يلي: $\alpha = 3$.

(1) أكتب u_n و v_n بدلالة n .

(2) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n بحيث:

$$T_n = \frac{1}{u_0+3} + \frac{1}{u_1+3} + \frac{1}{u_2+3} + \dots + \frac{1}{u_n+3} \quad \text{و} \quad S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

(3) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = \ln(v_n)$.

(4) أ- بين أن المتتالية (w_n) حسابية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5 + \frac{1}{2}u_n^2}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \sqrt{10}$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \beta - u_n^2$ ، حيث β عدد حقيقي.

عين قيمة β التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

(4) نضع: $\beta = 10$.

أ- أكتب عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ب- أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$.

(u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 6 - \frac{7}{u_n + 2}$.

(1) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 5$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة.

(2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{7}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و T_n بحيث:

$$T_n = \frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + \frac{1}{u_2+1} + \dots + \frac{1}{u_n+1} \quad \text{و} \quad S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n}$.

- (1) أ- بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 2$.
- (2) ب- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنها متقاربة.
- (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 2}{u_n + 2}\right)$.
- أ- بين أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{(3n+3)u_n - 8n - 12}{n} \end{cases}$.

- (1) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ فإن $u_n \leq 0$.
- (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
- (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \frac{4 - u_n}{n}$.
- أ- بين أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{8} \left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3$.

- (1) أحسب u_1 و u_2 .
- (2) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 1$.
- (3) أ- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة. (إرشاد: $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$)
ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.
- (4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \sqrt[3]{u_n} - 1$.
- أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.
- ب- أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \sqrt[3]{u_0} + \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2} + \dots + \sqrt[3]{u_n}$.

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = x$.

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; \sqrt{3}]$ فإن : $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$.

(II) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ- بين من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < \sqrt{3}$ ،

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

(2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2}$ ،

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

ج- أحسب من جديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$ و $S'_n = \frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \dots + \frac{1}{u_n^2}$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+3+2nu_n}{3(n+1)} \end{cases}$$

(1) بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n \leq 1$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = n(1 - u_n)$.

أ- بين أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$.

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$.

التقريب 97

- (D) مستقيم مزود بمعلم $(O; \vec{i})$.
- لتكن A_n متتالية النقط من المستقيم (D) ، بحيث :
- A_0 هي النقطة O .
 - A_1 هي النقطة ذات الفاصلة 1 .
 - من أجل كل عدد طبيعي n ، النقطة A_{n+2} هي منتصف قطعة المستقيم $[A_n A_{n+1}]$.
- (1) أ- أرسم مستقيما (D) ، ثم علم النقط $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ و A_6 . (الوحدة 10cm)
- ب- من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي a_n فاصلة النقطة A_n .
- أحسب a_2, a_3, a_4, a_5 و a_6 .
- ج- من أجل كل عدد طبيعي n ، برر المساواة : $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.
- (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = a_n - \frac{2}{3}$.
- أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$.
- ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

التقريب 98

- a عدد حقيقي موجب تماما ، (u_n) المتتالية المعرفة بـ :
- $$\begin{cases} u_0 = E(\sqrt{a}) + 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \end{cases}$$
- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$.
- (1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم : $f'(x) = \frac{(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}{2x^2}$.
- ب- استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n \leq u_0$.
- ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
- (3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})$.
- ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{a})$.
- ج- استنتج $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (1-2x)e^{2x}$.

نسمي $f^{(n)}$ المشتق من الرتبة n للدالة f .

(1) أحسب : $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = 2^n (1-n-2x)e^{2x}$.

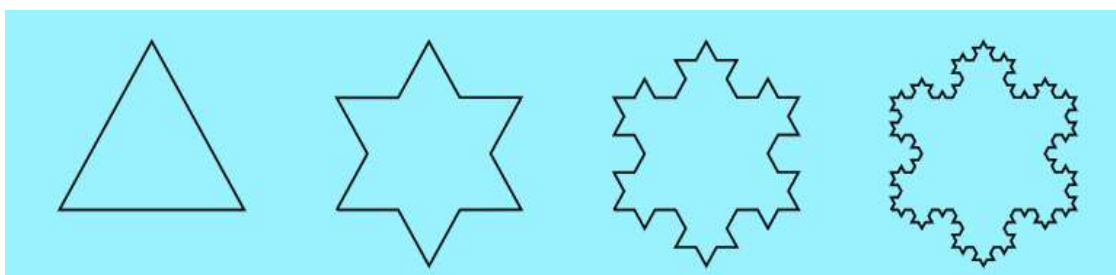
(3) نسمي (C_n) المنحنى الممثل للدالة $f^{(n)}$ في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$M_n(x_n; y_n)$ النقطة من المنحنى (C_n) والتي يقبل عندها (C_n) مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

أحسب x_n و y_n بدلالة n ، ثم بين أن M_n تنتمي إلى منحنى يطلب تعيين معادلته .

جـ- بين أن (x_n) متتالية حسابية وأن (y_n) متتالية هندسية ، عين الأساس والحد الأول لكل منهما وأحسب نهاية (y_n) .

ننطلق من مثلث متقايس الأضلاع $(n=0)$ طول ضلعه 1 ، نقوم بحذف الثلث الأوسط لكل ضلع ونعوضه بضلعين يقايسانه فنحصل على الشكل الثاني كما هو موضح في الشكل المقابل $(n=1)$ ، ثم نعيد نفس العملية على الشكل الثاني (نحذف الثلث الأوسط لكل ضلع ونعوضه بضلعين يقايسانه) فنحصل على الشكل الثالث $(n=2)$.



$(n=0)$

$(n=1)$

$(n=2)$

نرمز بـ S_n لمساحة الشكل الناتج في المرحلة n ، ونرمز بـ P_n لمحيط الشكل الناتج في المرحلة n . (n عدد طبيعي)

(1) أحسب : S_0 ، S_1 ، P_0 و P_1 .

(2) أكتب S_{n+1} بدلالة S_n .

(3) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = \frac{3\sqrt{3}}{20} \left[1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right] + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

(4) أكتب P_{n+1} بدلالة P_n .

(5) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $P_n = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^n$.

(6) أدرس تقارب المتتاليتين (S_n) و (P_n) . علق على النتائج .