

تمارين محلولة في القسمة نموذج بكالوريا

التمرين (1):

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $3x - 5y = 13$

(1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

(2) حدد الحلول (x, y) للمعادلة (1) بحيث $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$.

(3) بين انه من أجل كل k من $\mathbb{N}$ لدينا : $PGCD(5k+1, 3k-2) = PGCD(k-5 ; 13)$

(4) حل في $\mathbb{Z}^2$ الجملة : $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ PGCD(x ; y) = 13 \end{cases}$

حل التمرين (1):

(1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

لدينا الثانية $(1; -2)$ حل خاص للمعادلة (1) ومنه $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \dots\dots\dots (1) \\ 3(1) - 5(-2) = 13 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

ب طرح (2) من (1) نجد : $3(x-1) - 5(y+2) = 0$ أي : $3(x-1) = 5(y+2)$

لدينا : $\frac{3}{5}(y+2)$ وبما أن 3 و 5 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص $\frac{3}{5}(y+2)$ أي $y+2 = 3k$ ومنه

$y = 3k - 2$ / $k \in \mathbb{Z}$ وينفس الطريقة نجد : $x = 5k + 1$ / $k \in \mathbb{Z}$

ومنه حلول المعادلة (1) هي $S = \{(5k+1 ; 3k-2) , k \in \mathbb{Z}\}$

(2) تحديد الحلول (x, y) للمعادلة (1) بحيث $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$.

$\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$ معناه y يقسم x أي ان $\frac{5k+1}{3k-2} \in \mathbb{Z}$

لدينا : $\begin{cases} 3k-2 \nmid 3k-2 \\ 3k-2 \nmid 5k+1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3k-2 \nmid 5(3k-2) \\ 3k-2 \nmid 3(5k+1) \end{cases}$ أي $\begin{cases} 3k-2 \nmid 15k-10 \\ 3k-2 \nmid 15k+3 \end{cases}$ وعليه

$3k-2 \nmid 13$ أي $3k-2 \nmid (15k+3) - (15k-10)$

$3k-2=$	-1	-13	1	13
$3k=$	1	-11	3	15
$k=$	مرفوض	مرفوض	1	5

لدينا : $D_{13} = \{1; 13; -1; -13\}$ ومنه

ومنه الحلول هي :

$$S = \{(6; 1), (26; 13)\}$$

(3) تبيان انه من أجل كل k من $\mathbb{N}$ لدينا : $PGCD(5k+1, 3k-2) = PGCD(k-5; 13)$

نضع $PGCD(5k+1, 3k-2) = d$

$$\begin{cases} d/5k+1 \\ d/6k-4 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d/5k+1 \\ d/3k-2 \end{cases} \text{ ومنه } d/(6k-4) - (5k+1) \text{ أي } d/k-5$$

$$\begin{cases} d/15k+3 \\ d/15k-10 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d/5k+1 \\ d/3k-2 \end{cases} \text{ ومنه } d/(15k+3) - (15k-10) \text{ أي } d/13 \text{ ومنه}$$

$$PGCD(5k+1, 3k-2) = PGCD(k-5; 13)$$

$$\begin{cases} 3x-5y=13 \\ PGCD(x; y)=13 \end{cases} \text{ (*)} \text{ : الجملة في } \mathbb{Z}^2 \text{ حل في}$$

الجملة (*) تكافئ $PGCD(5k+1, 3k-2) = 13$ وحسب (3) $PGCD(k-5; 13) = 13$

$$k-5 = 13k' \text{ أي } k = 13k' + 5 \text{ ومنه } k' \in \mathbb{Z}$$

ومنه مجموعة الحلول للجملة (*) هي $S = \{(65k' + 26; 39k' - 13), k' \in \mathbb{Z}\}$:

التمرين (2)

نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : (1) $5x - 3y = 2$...

(1) بين ان المعادلة (1) تقبل حلا

(2) (أ) اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فان : $x \equiv 1[3]$

(ب) استنتج حلول المعادلة (1)

(3) (أ) بين انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فان $PGCD(x; y) = PGCD(x; 2)$

(ب) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$

(ج) عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $PGCD(x; y) = 2$

حل التمرين (2) :

(1) تبيان ان المعادلة (1) تقبل حلا :

لدينا $PGCD(5;3)=1$ و 1 يقسم 2 ومنه المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا حسب مبرهنة بيزو

ونلاحظ وضوحا ان الثنائية $(1;1)$ هو حل لها

(2) (أ) اثبت انه اذا كانت $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فان : $x \equiv 1[3]$:

$5x - 3y = 2$ تعني $5x = 3y + 2$ و هذه تكافئ $5x \equiv 2[3]$ ومن خواص الموافقة نكتب : $10x \equiv 4[3]$

ومن $x + 9x \equiv 1 + 3[3]$ وبالتالي : $x \equiv 1[3]$ اذن $x = 3k + 1$

(ب) استنتاج الحلول :

نعوض $x = 3k + 1$ في المعادلة (1) نجد $5(3k + 1) - 3y = 2$ ومنه $3y = 15k + 3$ وبالتالي $y = 5k + 1$

اذن مجموعة الحلول هي الثنائيات $(x; y) = (3k + 1; 5k + 1)$ حيث k عدد صحيح

(3) (أ) اذا كانت $(x; y)$ حلا للمعادلة فان $PGCD(x; y) = PGCD(x; 2)$

نضع $PGCD(x; y) = d$ و $PGCD(x; 2) = d'$

لدينا من جهة $\begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d/x \\ d/5x-3y \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} d/x \\ d/2 \end{cases}$ وهذا يعني $d / PGCD(x; 2)$ ومنه

d / d'

ومن جهة أخرى

$\begin{cases} d'/x \\ d'/2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d'/x \\ d'/x+2k \end{cases}$ اي $\begin{cases} d'/x \\ d'/3k+1+2k \end{cases}$ وبالتالي $d' / PGCD(x; y)$ اي d' / d

لدينا اذن $(d' / d$ و $d / d')$ وبالتالي $d = d'$ اذن $PGCD(x; y) = PGCD(x; 2)$

(ب) استنتاج القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$:

من السؤال السابق وجدنا $d / PGCD(x; 2)$ اي ان $d / 2$ ومنه $d \in \{1; 2\}$ وهي القيم الممكنة

(ج) تعيين الحلول $(x; y)$ بحيث : $PGCD(x; y) = 2$:

$PGCD(x; y) = 2$ تعني $\begin{cases} x \equiv 0[2] \\ y \equiv 0[2] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3k+1 \equiv 0[2] \\ 5k+1 \equiv 0[2] \end{cases}$ وتعني $\begin{cases} k \equiv 1[2] \\ k \equiv 1[2] \end{cases}$ وبالتالي $k = 2\alpha + 1$

وبالتالي الحلول التي تحقق الشرط : $PGCD(x; y) = 2$ هي : $(x; y) = (3k + 1; 5k + 1)$ مع $k = 2\alpha + 1$

اذن $(x; y) = (6\alpha + 4; 10\alpha + 6)$ حيث α عدد صحيح

التمرين (3)

(1) عين القاسم المشترك الأكبر للعديدين : 324 و 405 .

(2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $324x - 405y = \alpha \cdots (*)$ حيث $\alpha \in \mathbb{Z}$

(أ) عين شرط على α حتى تقبل المعادلة (*) حلوها في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(ب) نفرض أن $\alpha = -81$ ، حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (*) علما أن (x_0, y_0) حلا لها و يحقق $x_0 - y_0 = 0$

(ج) عين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (*) حيث يكون $\frac{8x+24}{y+1}$ عددا صحيحا .

(د) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha 6}$ في النظام ذو الأساس 9 ويكتب $\overline{\beta 1 \beta \alpha}$ في النظام ذو الأساس 2 ، عين N

حل التمرين (3):

$$PGCD(324, 405) = 3^4 = 81 \text{ ومنه } 324 = 2^2 \times 3^4 \text{ و } 405 = 3^4 \times 5 \quad (1)$$

$$\alpha \in \mathbb{Z} : 324x - 405y = \alpha \dots (*) \quad (2)$$

(أ) تعيين شرط على α حتى تقبل المعادلة (*) حولا في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$324x - 405y = \alpha \text{ معناه } 81(4x - 5y) = \alpha \text{ أي } 4x - 5y = \frac{\alpha}{81}$$

بما أن $(4x - 5y) \in \mathbb{Z}$ فيجب أن يكون $\frac{\alpha}{81} \in \mathbb{Z}$ أي α مضاعف لـ 81 ومنه $\alpha = 81k \ / \ k \in \mathbb{Z}$

(ب) $\alpha = -81$ ، و (x_0, y_0) حل للمعادلة (*) و يحقق $x_0 - y_0 = 0$

لما $\alpha = -81$ تصبح المعادلة على الشكل (2) $4x - 5y = -1 \dots \dots$

(x_0, y_0) حلا لها و يحقق $x_0 - y_0 = 0$ معناه $4x_0 - 5y_0 = -1$ أي $-x_0 = -1$ ومنه $x_0 = 1$ وعليه $y_0 = 1$

الحل الخاص لـ (2) هو الثنائية $(1, 1)$

$$\text{لدينا } \begin{cases} 4x - 5y = -1 \dots \dots \dots (2) \\ 4(1) - 5(1) = -1 \dots \dots \dots (3) \end{cases} \text{ بطرح (3) من (2) نجد } 4(x-1) - 5(y-1) = 0$$

$$\text{ومنه } 4(x-1) = 5(y-1)$$

$$\frac{4}{5}(y-1) \text{ و بما أن 4 و 5 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص } \frac{4}{5}(y-1) \text{ ومنه } y-1 = 4k$$

$$\text{أي } y = 4k + 1 \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ و بنفس الطريقة نجد } x = 5k + 1 \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$S = \{(5k+1; 4k+1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(ج) تعيين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (*) حيث يكون $\frac{8x+24}{y+1}$ عددا صحيحا .

$$\frac{8x+24}{y+1} = \frac{8(5k+1)+24}{(4k+1)+1} = \frac{40k+32}{4k+2} = \frac{20k+16}{2k+1}$$

$$\frac{8x+24}{y+1} \in \mathbb{Z} \text{ معناه } \frac{20k+16}{2k+1} \in \mathbb{Z} \text{ أي } \frac{20k+16}{2k+1} = 2k+1$$

$$\text{لدينا : } \frac{20k+16}{2k+1} = \frac{10(2k+1)+6}{2k+1} = 10 + \frac{6}{2k+1} \text{ وهذا معناه : } \frac{6}{2k+1} \in \mathbb{Z}$$

$2k+1$	-1	-2	-3	-6	1	2	3	6
$2k$	-2	-3	-4	-7	0	1	2	5
k	-1	$\times$	-2	$\times$	0	$\times$	1	$\times$

لدينا : $D_6 = \{-1; -2; -3; -6; 1; 2; 3; 6\}$

ومنه الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (*) حيث يكون $\frac{8x+24}{y+1}$ عددا صحيحا . هي :

$$S = \{(-4, -3); (-9, -7); (1, 1); (6, 5)\}$$

(د) تعيين N العدد الطبيعي الذي يكتب $\overline{\alpha 6}^9$ ويكتب $\overline{\beta 1 \beta \alpha}^2$

$$\text{لدينا : } N = \overline{\alpha 6}^{(9)} = 9\alpha + 6 \quad N = \overline{\beta 1 \beta \alpha}^{(2)} = \beta \times 2^3 + 1 \times 2^2 + \beta \times 2 + \alpha$$

$$N = 10\beta + \alpha + 4$$

إذن : $10\beta + \alpha + 4 = 9\alpha + 6$ ومنه $10\beta - 8\alpha = 2$ أي $5\beta - 4\alpha = 1$ أو $4\alpha - 5\beta = -1$

وهذه الاخيرة هي المعادلة (2) وحلولها هي : $\alpha = 5k + 1$ و $\beta = 4k + 1$ لكن مع شرط $\alpha < 2$ و $\beta < 2$

$$\text{اي } 5k + 1 < 2 \text{ ومنه } k < -\frac{1}{5} \text{ وبالتالي } k = 0 \text{ إذن } \alpha = 1 \text{ و } \beta = 1 \text{ ومنه } N = 15$$

التمرين (4)

- (1) - ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .
- (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11)$ يقبل القسمة على 10 .
- (3) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد $[10] \equiv 0 \pmod{7 \times 3^{n+1} - 1}$ و $10 < n \leq 25$
- (4) N عدد طبيعي يكتب $xx02102$ في نظام التعداد الذي أساسه 3 حيث $x \neq 0$ ويكتب $y67y$ في نظام التعداد الذي أساسه 9
- (أ) عين x و y
- (ب) أكتب N في النظام العشري
- (ج) أكتب N في نظام التعداد ذي الأساس 7

حل التمرين (4):

- (1) - دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .
- لدينا $3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$ ، $3^2 \equiv 9[10]$ أي $3^2 \equiv -1[10]$ ومنه $3^4 \equiv 1[10]$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $3^{4k} \equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ ، $3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 3^n على 10	1	3	9	7

(2) اثبات ان العدد $(33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11)$ يقبل القسمة على 10 :
لدينا : $33 \equiv 3[10]$ و منه $33^{16n+2} \equiv 3^{16n+2}[10]$ و بما ان $3^{16n+2} = 3^{4(4n)+2}$ فإن $33^{16n+2} \equiv 9[10]$.
و $109 \equiv 9[10]$ و منه $109^{8n+1} \equiv 9^{8n+1}[10]$ و بما ان $9^{8n+1} = 3^{16n+2}$ فإن $9^{8n+1} \equiv 9[10]$
و بالتالي $109^{8n+1} \equiv 9[10]$ و منه $2 \times 109^{8n+1} \equiv 8[10]$
ولدينا: $11 \equiv 1[10]$ و منه $33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 9 - 8 - 1[10] \equiv 0[10]$ اذن $33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0[10]$
(3) ايجاد الاعداد الطبيعية n حيث : $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$ و $10 < n \leq 25$.

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv$	0	2	8	6	[10]

منه $n = 4k / k \in \mathbb{N}$
بما ان $10 < n \leq 25$ فإن $10 < 4k \leq 25$ أي $\frac{10}{4} < k \leq \frac{25}{4}$ منه $k \in \{3; 4; 5; 6\}$

$n = 4k$ و بالتالي $n \in \{12; 16; 20; 24\}$

$$N = \overline{xx02102}^3 = \overline{y67y}^9 \quad (4)$$

(أ) تعيين x و y

لدينا : $0 < x < 3$ و $0 < y < 9$ مع x و y طبيعيان

و لدينا $\begin{cases} N = 65 + 972x \\ N = 549 + 730y \end{cases}$ أي $\begin{cases} N = 2 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + x \times 3^5 + x \times 3^6 \\ N = y + 7 \times 9 + 6 \times 9^2 + y \times 9^3 \end{cases}$

- اذا كان $x = 1$ فإن $y = \frac{244}{365} \notin \mathbb{N}$ مرفوض .

- إذا كان $x = 2$ فإن $y = 2$ اذن $(x; y) = (2; 2)$.

(ب) كتابة N في النظام العشري : $N = 65 + 972 \times 2 = 2009$ ، $N = 2009$.

(ج) كتابة N في النظام ذي الاساس 7 :

$$N = \overline{5600}^7 \quad \text{منه} \quad 5 = 0 \times 7 + \boxed{5}, \quad 41 = 5 \times 7 + \boxed{6}, \quad 287 = 41 \times 7 + \boxed{0}, \quad 2009 = 287 \times 7 + \boxed{0}$$

التمرين (5) :

(1) (أ) انشر $(n+3)(3n^2 - 9n + 16)$ حيث $n \in \mathbb{N}$

- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n+3$

(ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

(2) برهن انه من اجل كل الاعداد الطبيعية غير المعدومة a, b و c يكون : $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$

(3) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n اكبر او يساوي 2 : $PGCD(3n^3 - 11n; n+3) = PGCD(48; n+3)$:
(4) (أ) عين القواسم الطبيعية للعدد 48

(ب) استنتج الاعداد الطبيعية n بحيث يكون الكسر $\frac{3n^3 - 11n}{n+3}$ عددا طبيعيا

حل التمرين (5) :

(1) (أ) نشر العبارة : $(n+3)(3n^2 - 9n + 16) = 3n^3 - 11n + 48$ حيث $n \in \mathbb{N}$

واضح ان $n+3$ يقسم $3n^3 - 11n + 48$

(ب) برهان انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $3n^2 - 9n + 16 \neq 0$ عدد طبيعي غير معدوم

مميزه $\Delta = -111$ وبالتالي فانه من اجل $n \in \mathbb{N}$ فان كثير الحدود $3n^2 - 9n + 16$ لا يعدم واشارته من إشارة 3 وبالتالي فهو موجب تماما

(2) برهان ان : $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$ حيث a, b, c اعداد طبيعية

نضع : $PGCD(a; b) = d$ و $PGCD(bc - a; b) = d'$

$PGCD(a; b) = d$ تعني (d/a و d/b) ومنه $\begin{cases} d/b \\ d/bc - a \end{cases}$ ومنه d/d'

ومن جهة أخرى $PGCD(bc - a; b) = d'$ تعني $\begin{cases} d'/b \\ d'/bc - a \end{cases}$ ومنه d'/a وبالطرح نجد d'/a

ومنه $\begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases}$ وبالتالي : d'/d

وبما ان (d'/d و d/d') فان $d' = d$ ان $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$

(3) برهان انه من اجل $n \geq 2$: $PGCD(48; n+3) = PGCD(3n^3 - 11n; n+3)$

من السؤال السابق وبوضع : $a = 48$ و $b = n+3$ و $c = 3n^2 - 9n + 16$ نجد :

$$PGCD(a; b) = PGCD(48; n+3)$$

$$PGCD(bc - a; b) = PGCD((n+3)(3n^2 - 9n + 16) - 48; n+3)$$

$$= PGCD(3n^3 - 11n; n+3)$$

$$PGCD(48; n+3) = PGCD(3n^3 - 11n; n+3) \text{ ان}$$

(4) (أ) تعيين القواسم الطبيعية للعدد 48 : $48 = 2^4 \times 3$ عدد قواسمه الموجبة 10 وهي :

$$D_{48} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$$

(ب) استنتج قيم n بحيث يكون $\frac{3n^3 - 11n}{n+3}$ عددا طبيعيا :

$$\frac{3n^3 - 11n}{n+3} \in \mathbb{N} \text{ معناه } 3n^3 - 11n \text{ موجب و } (n+3) \text{ قاسم لـ } 3n^3 - 11n$$

من اجل $n = 0$ فان الكسر معدوم فهو طبيعي

$$\frac{3n^3 - 11n}{n+3} = -2 \notin \mathbb{N} \text{ فان } n=1$$

$$\frac{3n^3 - 11n}{n+3} \in \mathbb{N} \text{ فان } n \geq 2 \text{ اذا كان } (n+3) \mid (3n^3 - 11n)$$

$$PGCD(48; n+3) = n+3 \text{ أي } PGCD(3n^3 - 11n; n+3) = n+3 \text{ ومن المساواة السابقة نجد } PGCD(48; n+3) = n+3$$

$$n+3 \in D_{48} \text{ وبالتالي } n+3 \mid 48$$

$n+3$	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
n	لا يوجد	لا يوجد	0	امفروض	3	5	9	13	21	45

$$\{0; 3; 5; 9; 13; 21; 45\} : \frac{3n^3 - 11n}{n+3} \in \mathbb{N} \text{ حتى يكون الكسر } n \text{ اذن قيم } n$$



التمرين (6)

$$324x - 245y = 7 \dots (1) \text{ المعادلة في } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

(1) باستعمال خوارزمية اقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (1) ثم حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ هذه المعادلة

(2) اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فان : $x \equiv 0[7]$

(3) (أ) نضع $PGCD(x; y) = d$ حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (1) , عين القيم الممكنة للعدد d

(ب) عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $PGCD(x; y) = 7$

حل التمرين (6):

$$324x - 245y = 7$$

(1) تعيين حل خاص للمعادلة (1) :

$$324 = 245 \times 1 + 79 \text{ و } 245 = 79 \times 3 + 8$$

$$79 = 8 \times 9 + 7 \text{ ومنه } 7 = 79 - 8 \times 9$$

$$7 = 79 - 9 \times (245 - 79(3)) = 245(-9) + 79(28) = 245(-9) + 28(324 - 245)$$

$$7 = 324(28) - 245(37) \text{ ومنه الحل الخاص هو : } (28; 37)$$

-الحل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة :

$$\begin{cases} 324x - 245y = 7 \\ 324(28) - 245(37) = 7 \end{cases} \text{ لدينا } \text{ بالطرح نجد: } 324(x - 28) = 245(y - 37)$$

وهذا يعني 245 يقسم $324(x - 28)$ وبما ان 245 و 324 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة بيزو

$$245 \text{ يقسم } x - 28 \text{ أي } x - 28 = 245k \text{ ومنه } x = 28 + 245k \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح}$$

$$\text{وبالتعويض في } 324(x - 28) = 245(y - 37) \text{ نجد : } y = 37 + 324k$$

(2) اثبات ان $x \equiv 0[7]$:

$$324x - 245y = 7 \text{ تعني } 324x = 245y + 7 \text{ ومنه } 324x = 7(35y + 1)$$

هذه الاخير تعني 7 يقسم 324x وبما ان 7 لا يقسم 324 فانه حسب مبرهنة بيزو 7 يقسم x أي $x \equiv 0[7]$

(3) (أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d حيث $PGCD(x; y) = d$ حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (1) ،

$PGCD(x; y) = d$ تعني $(d/x \text{ و } d/y)$ ومنه $d/(324x - 245y)$ أي ان $d/7$ ومنه $d \in \{1, 7\}$

(ب) تعيين $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $PGCD(x; y) = 7$

$PGCD(x; y) = 7$ تعني $y \equiv 0[7]$ ومنه $37 + 324k \equiv 0[7]$ وينتج $2 + 2k \equiv 0[7]$ ($324 = 46 \times 7 + 2$)

اذن $2k \equiv 5[7]$ ومنه $6k \equiv 15[7]$ اي ان $-k \equiv 1[7]$ وبالتالي $k \equiv 6[7]$ اي ان $k = 7\alpha + 6$ حيث α طبيعي

وبالتالي قيم $(x; y)$ هي : $x = 28 + 245k = 28 + 245(7\alpha + 6)$ و $y = 37 + 324k = 37 + 324(7\alpha + 6)$

ومنه $(x; y) = (1715\alpha + 1498; 2268\alpha + 1981)$

التمرين (7) :

(1) من اجل كل عدد حقيقي t انشر العبارة $(t-6)(t^2+1)$.

(2) a و b و c اعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي : $a = \overline{102}$ ، $b = \overline{125}$ ، $c = \overline{13154}$.

(أ) جد قيمة العدد الحقيقي p علما ان $ab = c$

(ب) اكتب كلا من الاعداد a, b, c في النظام العشري .

(3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $38x - 53y = 15$(1)

(أ) بين انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فان $x \equiv 52[53]$.

(ب) استنتج حلول المعادلة (1) .

(4) نعتبر الان x و y عددين طبيعيين و نسمي d قاسمهما المشترك الاكبر .

(أ) عين القيم الممكنة للعدد d .

(ب) جد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$.

(5) (أ) ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7 .

(ب) من اجل كل $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2013^x \times 1432^{2y}$ على 7

حل التمرين (7) :

(1) نشر العبارة $(t-6)(t^2+1) = t^3 - 6t^2 + t - 6$ لدينا t لعدد حقيقي

(2) a ، b و c تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي : $a = \overline{102}$ ، $b = \overline{125}$ و $c = \overline{13154}$

(أ) إيجاد قيمة العدد الحقيقي p حيث $ab = c$

لدينا $b = 5 \times p^0 + 2 \times p^1 + p^2 = 5 + 2p + p^2$ ، $a = 2 \times p^0 + 0 \times p^1 + p^2 = 2 + p^2$
 $c = 4 \times p^0 + 5 \times p^1 + p^2 + 3p^3 + p^4 = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4$
 $ab = c$ معناه $(2 + p^2)(5 + 2p + p^2) = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4$
و يكافئ $10 + 4p + 2p^2 + 5p^2 + 2p^3 + p^4 = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4$
ومنه $p^3 - 6p^2 + p - 6 = 0$ ومما سبق نكتب : $(p-6)(p^2+1) = 0$ ومنه $p = 6$
(ب) كتابة كلا من الاعداد a ، b و c في النظام العشري .
 $a = 2 + 6^2 = 38$ ، $b = 5 + 2 \times 6 + 6^2 = 53$ و $c = 4 + 5 \times 6 + 6^2 + 3 \times 6^3 + 6^4 = 2014$

(3) نعتبر في Z^2 المعادلة : (1) $38x - 53y = 15$.
(أ) تبين ان الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) معناه $x \equiv 52[53]$
 $38x - 53y = 15$ يكافئ $38x = 15 + 53y$ و هذا يعني ان $38x \equiv 15[53]$ ولدينا $38 \equiv -15[53]$
ومنه $-15x \equiv 15[53]$ أي $x \equiv -1[53]$ وعليه $x \equiv 52[53]$
(ب) استنتاج حلول المعادلة (1) : $x \equiv 52[53]$ تعني $x = 53k + 52$
و $x = 53k + 52$ حيث $k \in Z$ وبالتعويض في (1) نجد $38(53k + 52) - 53y = 15$
ومنه $38(53k + 52) - 15 = 53y$ أي ان $38 \times 53k + 53 \times 37 = 53y$ ان $y = 38k + 37$ حيث $k \in Z$
و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$ من الشكل $(53k + 52; 38k + 37)$ و $k \in Z$

(4) نعتبر الان x و y عدداً طبيعيين و نسمي d قاسمهما المشترك الاكبر .
(أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d .
لدينا d يقسم x و d يقسم y ان d يقسم $38x - 53y$ أي d يقسم 15 و بالتالي $d \in \{1; 3; 5; 15\}$.
(ب) إيجاد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$.
نضع $x = 15x'$ و $y = 15y'$ حيث x' و y' اوليان فيما بينهما .
نحصل على $38 \times 15x' - 53 \times 15y' = 15$ و منه $38x' - 53y' = 1$ لدينا الثنائية $(7; 5)$ حلا خاصا للمعادلة .
و منه $\begin{cases} 38x' - 53y' = 1 \\ 38 \times 7 - 53 \times 5 = 1 \end{cases}$ بالطرح نجد $38(x' - 7) = 53(y' - 5) = 0$ أي $38(x' - 7) = 53(y' - 5)$
لدينا 53 يقسم $38(x' - 7)$ و العددان 38 و 53 اوليان فيما بينهما ان حسب مبرهنة غوص 53 يقسم $x' - 7$
ومنه $x' - 7 = 53\alpha$ أي $x' = 53\alpha + 7$ حيث $\alpha \in N$ و بالتعويض في $38(x' - 7) = 53(y' - 5)$ نجد
 $38 \times 53\alpha = 53(y' - 5)$ ومنه $y' - 5 = 38\alpha$ أي $y' = 38\alpha + 5$ حيث $\alpha \in N$
وبما ان $38x' - 53y' = 1$ فانه حسب مبرهنة بيزو يكون العددان x' و y' اوليان فيما بينهما و بالتالي
 $x = 15(53\alpha + 7)$ أي $x = 795\alpha + 105$ و $y = 15(38\alpha + 5)$ أي $y = 570\alpha + 75$ حيث $\alpha \in N$.

(5) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7 .
لدينا $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ و $4^3 \equiv 1[7]$ الدور هو 3
و عليه من اجل كل عدد طبيعي p ، $4^{3p} \equiv 1[7]$ ، $4^{3p+1} \equiv 4[7]$ و $4^{3p+2} \equiv 2[7]$.

(ب) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2013^x \times 1432^{2y}$ على 7 حيث $(x; y)$ حلول المعادلة
لدينا : $2013^x \times 1432^{2y} = 2013^{53k+52} \times 1432^{2(38k+37)}$
و $2013 \equiv 4[7]$ و $1432 \equiv 4[7]$ معناه $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{53k+52} \times 4^{2(38k+37)} [7]$
و يكافئ $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{129k+126} [7]$ و يكافئ $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{3(43k+42)} [7]$ أي
 $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 1[7]$ ومنه $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{3m} [7]$
اذن باقي القسمة الاقليدية للعدد $2013^x \times 1432^{2y}$ على 7 هو 1 .

التمرين (8) :

- نعتبر المعادلة $(E) : 7x + 4y = 1 ; (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- (1) (أ) اذكر نص المبرهنة التي تؤكد وجود حلول للمعادلة (E)
- (ب) عين حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل المعادلة
- (2) حل في $\mathbb{Z}$ الجملة التالية $(S) : \begin{cases} n \equiv 3[4] \\ n \equiv 2[7] \end{cases}$
- (3) (أ) ليكن k عددا طبيعيا . عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^{2k} على 4 وباقي القسمة للعدد 2^{3k} على 7
- (ب) تحقق ان العدد 2263 حل للجملة (S) ثم بين أن العدد $2263^{1008} - 1$ يقبل القسمة على 28
- (4) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(E') : 7x + 4y = 20$
- (أ) برهن أنه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E') فان $x \equiv 0[4]$. حل عندئذ المعادلة (E')
- (ب) ليكن $d = PGCD(x; y)$ حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (E') . عين القيم الممكنة لـ d
- (ج) عين مجموعة حلول (E') حيث $PGCD(x; y) = 4$
- (د) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ الجملة $\begin{cases} 7x + 4y = 20 \\ PGCD(x; y) = 4 \\ PPCM(x; y) = 308 \end{cases}$

حل التمرين (8) :

- (1) (أ) لدينا 7 و 4 اوليان فيما بينهما , فحسب مبرهنة بيزو فان هذا يكافئ يوجد عدنان صحيحان x و y حيث
 $7x + 4y = 1$

(ب) نلاحظ ان $(x_0; y_0) = (-1; 2)$ حل خاص للمعادلة (E) لان $7 \times (-1) + 4 \times 2 = 1$

$$\text{لدينا } \begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ 7x_0 + 4y_0 = 1 \end{cases} \text{ تعني : } 7(x - x_0) + 4(y - y_0) = 0 \text{ اذن } 7(x - x_0) = -4(y - y_0)$$

العدد 7 يقسم $-4(y - y_0)$ وبما ان 7 و 4 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص 7 يقسم $y - y_0$

$$\text{أي } y - y_0 = 7k \text{ أي } y = y_0 + 7k \text{ اذن بالتعويض نجد : } 7(x - x_0) = -4 \times (7k)$$

$$\text{وبالتالي } x - x_0 = -4k$$

$$\text{اذن : } \begin{cases} x = -4k + x_0 \\ y = 7k + y_0 \end{cases} \text{ ومنه الحلول } \begin{cases} x = -4k - 1 \\ y = 7k + 2 \end{cases}$$

$$\underline{\text{التحقق :}} \quad 7 \times (-4k - 1) + 4(7k + 2) = -7 + 8 = 1 \text{ اذن } k \in \mathbb{Z} \quad S_{\mathbb{Z}^2} = \{ -4k - 1 ; 7k + 2 \}$$

$$(2) \quad \begin{cases} n - 23 \equiv 0[4] \\ n - 23 \equiv 0[7] \\ 7 \wedge 4 = 1 \end{cases} \text{ أي ان } \begin{cases} n \equiv 23[4] \\ n \equiv 23[7] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} n = 3 + 20[4] \\ n = 2 + 21[7] \end{cases} \text{ تكافئ } (S) : \begin{cases} n \equiv 3[4] \\ n \equiv 2[7] \end{cases}$$

$$\text{اذن } n - 23 \equiv 0[4] \text{ وهذا يعني } n - 23 \equiv 0[4] \text{ أي } n - 23 \equiv 0[28] \Leftrightarrow n \equiv 23[28] \text{ اذن حلول } (S) \text{ هي : } (n = 23 + 28k ; k \in \mathbb{Z})$$

$$(3) \quad (\text{أ}) \text{ نعلم ان } 3^2 \equiv 1[4] \text{ ومنه } (3^2)^k \equiv 1[4] \text{ اذن } 3^{2k} \equiv 1[4]$$

$$\text{ولدينا أيضا : } 2^3 \equiv 1[7] \Leftrightarrow (2^3)^k \equiv 1[7] \text{ اذن } 2^{3k} \equiv 1[7]$$

$$(ب) \text{ لدينا } 2263 - 23 = 2240 = 80 \times 28 \text{ ومنه } 2263 - 23 \equiv 0[28] \Rightarrow 2263 \equiv 23[28]$$

اذن العدد 2263 حل للجملة (S)

$$\text{و } 1008 = 2 \times 504 \text{ و } 2263^{1008} \equiv 1[4]$$

$$\text{ومنه } 2263 \equiv 3[4] \text{ ومنه } 2263^{1008} \equiv 3^{1008}[4]$$

$$\text{ومنه } 2263 \equiv 2[7] \text{ ومنه } 2263^{1008} \equiv 2^{1008}[7] \text{ . العدد } 1008 \text{ يكتب : } 1008 = 3 \times 336 = 3k \text{ ومنه } 2263^{1008} \equiv 1[7]$$

$$(2263^{1008} \equiv 1[4] \text{ و } 2263 \equiv 2[7] \text{ و } 1008 = 3 \times 336 = 3k \text{ و } 2^{3k} \equiv 1[7])$$

$$\text{اذن } \begin{cases} 2263 - 1 \equiv 0[7] \\ 2263^{1008} - 1 \equiv 0[7] \\ 7 \wedge 4 = 1 \end{cases} \text{ وبالتالي : } 2263^{1008} - 1 \equiv 0[28]$$

$$(4) \quad (\text{أ}) \text{ برهان أنه اذا كانت الثنائية } (x; y) \text{ حلا للمعادلة } (E') \text{ فان } x \equiv 0[4]$$

$$7x + 4y = 20 \text{ تعني } 7x = 20 - 4y \text{ ومنه } 7x = 4(5 - y)$$

$$\text{وهذه تعني : } \begin{cases} 4 \mid 7x \\ 7 \wedge 4 = 1 \end{cases} \text{ وحسب مبرهنة غوص فان : } 4 \text{ يقسم } x \text{ أي } x \equiv 0[4]$$

$$\text{ومن } x \equiv 0[4] \text{ تعني } x = 4k' ; k' \in \mathbb{Z} \text{ وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد : } 7 \times 4k' + 4y = 20 \text{ اذن :}$$

$$y = 5 - 7k'$$

$$\text{التحقق : } 7(4k') - 4(5 - 7k') = 20 \text{ اذن حلول } (E') \text{ هي } S_{\mathbb{Z}^2} = \{ 4k' ; 5 - 7k' \} \quad k' \in \mathbb{Z}$$

(ب) $k' \in \mathbb{Z}$ حيث $y = 5 - 7k'$ و $x = 4k'$ و $d = \text{PGCD}(x, y)$
 $d \in \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$ اذن d يقسم $7x + 4y$ ومنه d يقسم 20

(ج) $\text{PGCD}(x, y) = 4$ و $x = 4k'$ و $y = 5 - 7k'$

واضح ان 4 يقسم x وبما انه يقسم y فهذا يعني $5 - 7k' \equiv 0[4]$ ومنه $1 - 7k' \equiv 0[4]$
 $-7k' \equiv 1[4]$

وتعني $7k' \equiv 1[4]$ أي $(8-1)k' \equiv 1[4]$ وتعني $-k' \equiv 1[4]$ اذن $k' \equiv -1[4]$ أي

مع $k' = 4p - 1$ مع $p \in \mathbb{Z}$

اذن حلول (E') هي : $x = 16p - 4$ و $y = 12 - 28p$ $S_{\mathbb{Z}^2} = \{ x = 16p - 4 ; y = 12 - 28p \}$

مع $x \wedge y = 4$

(د) تعيين الحلول للمعادلة : $7x + 4y = 20$ مع $x \wedge y = 4$ و $\text{PPCM}(x, y) = 308$

نعلم ان : $\text{PPCM}(x, y) \times \text{PGCD}(x, y) = x \times y$

$$|(x \wedge y)(x \vee y)| = |xy| = |(16p - 4)(12 - 28p)| = 4 \times 308$$

حيث : $x = 16p - 4 = 4(4p - 1)$ و $y = 12 - 28p = 4(3 - 7p)$

$$4 \left| (4p - 1)(3 - 7p) \right| = 4 \times 308 \quad \text{ومنه} \quad |(4p - 1)(3 - 7p)| = 77$$

$$(4p - 1)(3 - 7p) = 77 \quad \text{او} \quad (4p - 1)(3 - 7p) = -77$$

اذا كان $(4p - 1)(3 - 7p) = 77$ فان $-28p^2 + 19p - 80 = 0$ و مميزها سالب

$$\Delta = 361 - 4 \times (-28) \times (-80) = -8599 < 0$$

اذا كان $(4p - 1)(3 - 7p) = -77$ فان $-28p^2 + 19p + 74 = 0$ و مميزها

$$\Delta = 361 + 4 \times 28 \times 74 = 8649 = 93^2$$

$$p_2 = \frac{-19 + 39}{-56} = \frac{-72}{-56} \notin \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad p_1 = \frac{-19 - 39}{-56} = \frac{-112}{-56} = 2$$

وبالتالي من اجل $p_1 = 2$ نجد $x = 28$ و $y = -44$

التمرين (9)

(1) عين الاعداد الصحيحة x التي تحقق : $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$

(2) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9

(-) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $7^{2n} \equiv 4^n[9]$

(ب) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9

(ج) عين قيم العدد الطبيعي α حتى يكون : $4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} + \alpha - 4 \equiv 0[9]$
 $2010 \leq \alpha \leq 2020$

(3) ماهو باقي قسمة العدد : $5^{2010} + 25^{2011}$ على 9 ؟

(4) عين الاعداد الطبيعية n التي يكون من اجلها العدد : $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعفا للعدد 9

(5) عين الثنائيات الطبيعية (x, y) بحيث : $7^x + 4^y \equiv 2[9]$

حل التمرين (9)

(1) تعيين الاعداد الصحيحة x التي تحقق : $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$:

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
$x^2 \equiv$	0	1	4	0	7	7	0	5	1	[9]
$x^2 - x + 6 \equiv$	6	6	8	3	0	8	0	4	8	[9]

من الجدول نجد ان $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$ من اجل $x \equiv 4[9]$ او $x \equiv 6[9]$

أي ان $x = 9k + 4$ او $x = 9k + 6$ حيث k عدد صحيح

(2) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9 :

$$7^0 \equiv 1[9] \text{ و } 7^1 \equiv 7[9] \text{ و } 7^2 \equiv 4[9] \text{ و } 7^3 \equiv 1[9]$$

ومنه من اجل كل عدد طبيعي k فان بواقي القسمة هي متتالية دورية ودورها 3.

ومنه $7^{3k} \equiv 1[9]$ و $7^{3k+1} \equiv 7[9]$ و $7^{3k+2} \equiv 4[9]$ البواقي هي : 1 او 7 او 4

(-) تبين ان من اجل كل n : $7^{2n} \equiv 4^n[9]$

لدينا $7^2 \equiv 4[9]$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي n فان $(7^2)^n \equiv 4^n[9]$ اذن $7^{2n} \equiv 4^n[9]$

(ب) استنتاج بواقي قسمة 4^n على 9 :

لدينا من السؤال السابق $7^{2n} \equiv 4^n[9]$ ومنه بواقي قسمة 4^n على 9 هي نفسها بواقي قسمة 7^{2n}

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4
باقي قسمة 7^{2n} على 9	1	4	7
باقي قسمة 4^n على 9	1	4	7

(ج) تعيين قيم α بحيث : $\begin{cases} 4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} + \alpha - 4 \equiv 0[9] \\ 2010 \leq \alpha \leq 2020 \end{cases}$

$$4^n \times 21 + \alpha - 4 \equiv 0[9] \text{ أي } 4^n (1 + 4^1 + 4^2) + \alpha - 4 \equiv 0[9] \text{ معناه } 4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} + \alpha - 4 \equiv 0[9]$$

$$\text{و } 21 \equiv 3[9] \text{ ومنه نجد : } 3 \times 4^n + \alpha - 4 \equiv 0[9]$$

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 4^n على 9	1	4	7
باقي قسمة 3×4^n على 9	3	3	3

اذن من اجل كل عدد طبيعي n $3 \times 4^n \equiv 3[9]$ وبالتالي : $3 \times 4^n + \alpha - 4 \equiv 0[9]$

تكافئ $3 + \alpha - 4 \equiv 0[9]$ أي $\alpha - 1 \equiv 0[9]$ ومنه $\alpha \equiv 1[9]$ اذن $\alpha = 9p + 1$ حيث p عدد طبيعي

و لدينا $2010 \leq \alpha \leq 2020$ معناه $2010 \leq 9p + 1 \leq 2020$ أي $223.22 \leq p \leq 224.33$ و عليه $p = 224$

و بالتالي $\alpha = 2017$.

(3) تعيين باقي قسمة العدد $5^{2010} + 25^{2011}$ على 9 .

نعلم ان $2010 = 3 \times 670 = 3m$ و $2011 = 3 \times 670 + 1 = 3m + 1$
لدينا $25 \equiv 7[9]$ و منه $25^{2011} \equiv 7^{2011}[9]$ اذن $25^{2011} \equiv 7^{3m+1}[9]$ أي $25^{2011} \equiv 7[9]$
و لدينا $5 + 4 \equiv 0[9]$ و منه $5 \equiv -4[9]$ اذن $5^{2010} \equiv (-4)^{2010}[9]$ و عليه $5^{2010} \equiv 4^{3 \times m}[9]$ أي $5^{2010} \equiv 1[9]$
إن $5^{2010} + 25^{2011} \equiv 1 + 7[9]$ أي $5^{2010} + 25^{2011} \equiv 8[9]$ وبالتالي باقي قسمة العدد $5^{2010} + 25^{2011}$ على 9 هو 8
(4) تعيين الاعداد n بحيث: $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعفا للعدد 9 : من السؤال (2) (ب) نجد :

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4
باقي قسمة 7^{2n} على 9	1	4	7
باقي قسمة $7^{2n} - 7^n + 6$ على 9	6	3	0

اذا كان $n = 3k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$ فان العدد $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعف للعدد 9.
- يمكن استعمال نتيجة السؤال الاول للاجابة على هذا السؤال
 $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$ معناه $x \equiv 4[9]$ او $x \equiv 6[9]$.
و منه $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعفا للعدد 9 معناه $7^n \equiv 4[9]$ أي $n = 3k + 2$ او $7^n \equiv 6[9]$ و هذا غير ممكن لان
بواقي 7^n على 9 هي 1 ، 7 ، 4 .
(5) تعيين الثنائيات $(x; y)$ بحيث : $7^x + 4^y \equiv 2[9]$:

x	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 7^x على 9	1	7	4

y	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 4^y على 9	1	4	7

$7^x + 4^y \equiv 2[9]$ معناه $(x; y) = (3p; 3k)$ او $(x; y) = (3p+1; 3k+1)$ او $(x; y) = (3p+2; 3k+2)$
و عليه $(x; y) \in \{(3p; 3k), (3p+1; 3k+1), (3p+2; 3k+2)\}$.

التمرين (10) :

- لتكن المعادلة : $138x - 55y = 5$: (E) حيث $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- (1) بين انه اذا كانت $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فان x مضاعف للعدد 5
 - (2) (أ) عين حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) (ب) حل المعادلة (E)
 - (3) من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر العددين $a = 55n + 10$ و $b = 138n + 25$
 - (أ) بين انه من اجل كل طبيعي n الثنائية $(a; b)$ هي حل للمعادلة (E)
 - (ب) استنتج القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

(ج) عين مجموعة قيم العدد الصحيح n بحيث $PGCD(a;b)=5$

حل التمرين (10) :

$$(E): 138x - 55y = 5$$

$$(1) \text{ اذا كانت } (x; y) \text{ حلا للمعادلة } (E) \text{ فان } : 138x = 5 + 55y \text{ ومنه } 138x = 5(1 + 11y)$$

وبما ان $138 \wedge 5 = 1$ فان 5 يقسم x أي ان x مضاعف للعدد 5 حسب مبرهنة غوص

$$(2) \text{ (أ) باستعمال خوارزمية اقليدس للعددين 138 و 55 ولتكن المعادلة } (E'): 138x - 55y = 1 \text{ نجد :}$$

$$55 = 1 \times 28 + 27 \Leftrightarrow 27 = 55 - 1 \times 27 \text{ و } 138 = 2 \times 55 + 28 \Leftrightarrow 28 = 138 - 2 \times 55$$

$$\text{ و } 28 = 1 \times 27 + 1 \Leftrightarrow 1 = 28 - 1 \times 27 \text{ وبالتالي :}$$

$$1 = 28 - 27 = 28 - 55 + 28 = 2 \times 28 - 55 = 2(138 - 2 \times 55) - 55 = 2 \times 138 - 5 \times 55$$

$$\text{ ومنه } (u; v) = (2; 5) \text{ حلا خاصا للمعادلة } (E') \text{ وبالتالي } (x_0; y_0) = (5u; 5v) = (10; 25) \text{ حلا خاصا للمعادلة } (E)$$

$$\text{ (ب) لدينا } \begin{cases} 138x - 55y = 5 \\ 138 \times 10 - 55 \times 25 = 5 \end{cases} \text{ بطرح (2) من (1) نجد :}$$

$$138(x - 10) = 55(y - 25)$$

وبما ان $138 \wedge 55 = 1$ فان 55 يقسم $x - 10$ و 138 يقسم $y - 25$

$$\text{ ان } \begin{cases} x - 10 = 55k ; k \in \mathbb{Z} \\ y - 25 = 138k ; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ وبالتالي : } \begin{cases} x = 10 + 55k \\ y = 25 + 138k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ التحقق : } 138(10 + 55k) - 55(25 + 138k) = 1380 + 138 \times 55k - 1375 - 138 \times 55 = 5$$

$$\text{ ان مجموعة الحلول هي : } S_{\mathbb{Z}} = \{(10 + 55k ; 25 + 138k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(أ) $a = 55n + 10$ و $b = 138n + 25$ حسب السؤال الثاني (ب) فان $(a; b)$ حل للمعادلة (E) لان حلولها من الشكل :

$$x = 55k + 10 \text{ و } y = 138k + 25$$

(ب) نضع $PGCD(a; b) = d$ والمعادلة نكتب : $138a - 55b = 5$ ومنه d يقسم العددين a و b وبالتالي

يقسم $138a - 55b$ ان d يقسم 5 ومنه قيم d هي 1 او 5

(ج) $PGCD(a; b) = 5$ ومنه 5 يقسم b وهذا يعني 5 يقسم $138n + 25$

$$\text{ ومنه 5 يقسم } n \text{ أي ان قيم } n \text{ هي : } n = 5k ; k \in \mathbb{Z}$$

التمرين (11) :

- (1) n عدد طبيعي نعتبر العددين الطبيعيين : $a = 7n + 9$ و $b = 12n + 15$
- (أ) نضع $d = \text{PGCD}(a; b)$. بين ان $d \in \{1; 3\}$
- (ب) عين n بحيث $d = 3$
- (2) لتكن في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $(E): 12x - 7y = 3$
- (أ) بين انه اذا كانت $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فان $y \equiv 0[3]$
- (ب) عين حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E)
- (3) في عام 2000 لاحظ مركز طبي لرصد الامراض النادرة في مدينة مرضا نادرا A الذي يظهر دوريا كل 24 سنة بعد 6 سنوات يلاحظ المركز ظهور مرض نادر B الذي يظهر دوريا كل 14 سنة .
- نسمي z السنة التي سيظهر فيها مجددا المرضان معا في نفس الوقت
- (أ) ليكن x و y عدد الدورات التي يقوم بها المرضان A و B بين سنة 2000 و العام z
- بين ان $(x; y)$ حل للمعادلة (E)
- (ب) عين السنة z

حل التمرين (11) :

- (1) (أ) $d = \text{pgcd}(a; b)$, d يقسم العددين a و b ومنه d يقسم $12a - 7b$ أي يقسم 3 ان $d \in \{1; 3\}$
- (ب) لدينا $b = 3(4n + 5)$ وهذا يعني $b \equiv 0[3]$ و $d = 3$ إن $7n + 9 \equiv 0[3]$
- ومنه $7n \equiv 0[3]$ وهذا يعني $7n$ يقبل القسمة على 3 وبما أن 7 و 3 أوليان فيما بينهما فإن 3 يقسم n
- وبالتالي $n = 3k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
- (2) (أ) $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) ومنه $12x - 7y = 3 \Leftrightarrow 3(4x - 1) = 7y$
- 3 يقسم $7y$ و $3 \wedge 7 = 1$ ومنه 3 يقسم y أي ان $y \equiv 0[3]$
- (ب) $y \equiv 0[3]$. نأخذ $y = 3$ ومنه بالتعويض في المعادلة نجد : $12x - 21 = 3$ ان $x = 2$ ومنه $(x_0; y_0) = (2; 3)$ حل خاص للمعادلة (E)
- وباتباع نفس الخطوات المتبعة نجد $12(x - x_0) = 7(y - y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 7y = 3 \\ 12x_0 - 7y_0 = 3 \end{cases}$
- وحسب غوص نجد الحلول : $(x; y) = (2 + 7k; 3 + 12k)$; $k \in \mathbb{Z}$

التحقق: $12(2+7k)-7(3+12k)=3$

(3) x عدد دورات A الذي يظهر كل 24 سنة و y عدد دورات B الذي يظهر كل 14 سنة

بعد 6 سنوات يظهر B ومنه نجد : $24x=14y+6$

(أ) $24x=14y+6$ ومنه $12x-7y=3$ اذن (x,y) حل للمعادلة (E)

(ب) نبحث عن اصغر حل $x>0$ و $y>0$ ومنه $2+7k>0$ و $3+12k>0$ ($k \in \mathbb{Z}$)

أي $k > \frac{-2}{7}$ و $k > \frac{-1}{4}$ ومنه اصغر قيمة هي $k=0$

اذن $k=0$ ومنه $x=2$ و $y=3$ و بالتعويض نجد : $14 \times 3 + 6 = 48$; $2 \times 24 = 48$ ومنه

$z = 2048$ وهي السنة التي يظهر فيها المهرجان معا

التمرين (12)

الفرع الاول : عين الجواب الصحيح من بين الاجوبة المقترحة

(1) (x,y) ثنائية من الاعداد الصحيحة بحيث $5x+8y=11$. اذن

(أ) $p \gcd(x,y)=11$	(ب) $p \gcd(x,y)$ يقسم 11	(ج) $pgcg(x,y)$ مضاعف 11
----------------------	---------------------------	--------------------------

(2) (x,y) ثنائية من الاعداد الصحيحة . المعادلة : $24x-16y=25$

(أ) لا تقبل حلويا (ب) تقبل عددا غير منته من الحلول (ج) تقبل حلا وحيدا

(3) $p \gcd(5x^2+7; x^2+2)$ يقسم :

(أ) العدد 3 (ب) العدد 7 (ج) العدد 5

(4) نضع : $a=7n+5$ و $b=8n-1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$. اذا كان a و b غير اوليين فيما بينهما فان :

(أ) $a \wedge b = 56$	(ب) $a \wedge b = 7$	(ج) $a \wedge b = 47$
-----------------------	----------------------	-----------------------

(5) ليكن n عددا طبيعيا اكبر تماما من 3 . نضع : $\alpha = 2n^2 - 3n + 2$ و $\beta = n - 1$

(أ) $\alpha \wedge \beta = 2$	(ب) $\alpha \wedge \beta = n - 1$	(ج) $\alpha \wedge \beta = 1$
-------------------------------	-----------------------------------	-------------------------------

الفرع الثاني : عين الجواب او الاجوبة الصحيحة

(1) ليكن العددين الصحيحين a و b غير المعدومين , اذا كان العددان 6 و 15 قاسمان مشتركين لـ a و b فإن :

(أ) $a \vee b = 30$	(ب) $a \wedge b$ يقسم 30	(ج) 30 يقسم $a \vee b$	(د) $ax+by=21$ لا تقبل حلويا في $\mathbb{Z}^2$
---------------------	--------------------------	------------------------	--

(2) a و b عدنان طبيعيان غير معدومين حيث : $ab \wedge (a+b) = 5$ لدينا اذن :

(أ) 5 يقسم $a^2 + b^2$	(ب) 5 يقسم a^2 و b^2	(ج) $a \wedge b = 5$	(د) $a^2 \wedge b^2 = 5$
--------------------------	----------------------------	----------------------	--------------------------

(3) x و y عدنان من $\mathbb{Z}^2$ حيث $x \wedge y = 1$ (اوليان فيما بينهما) لدينا اذن :

(أ) $-3x \wedge 3y = 3$	(ب) $(x+y) \wedge (x-y) = 1$	(ج) $(x+y) \wedge (x-y) = 2$	(د) $2(x+y) \wedge (x-y) = 1$
-------------------------	------------------------------	------------------------------	-------------------------------

حل التمرين (12) :

الفرع الاول :

(1) $5x + 8y = 11$: اذا كان d هو القاسم . م. أ ل x و y فان d يقسم مجموع مضاعفاتهما ومنه يقسم 11

اذن الجواب الصحيح هو (ب)

(2) المعادلة $24x - 16y = 25$ لا تقبل حولا لان القاسم ق. م. أ ل 24 و 16 لا يقسم 25

اذن الجواب الصحيح هو (أ)

(3) نضع $\alpha = 5x^2 + 7$ و $\beta = x^2 + 2$ ومنه $\alpha - 5\beta = 5x^2 + 7 - 5x^2 - 10 = -3$

اذن $(5x^2 + 3) \wedge (x^2 + 2) = 3$ اذن الجواب الصحيح هو (أ)

(4) $a = 7n + 5$ و $b = 8n - 1$ ومنه نجد :

$$8a - 7b = 8(7n + 5) - 7(8n - 1) = 56n + 40 - 56n + 7 = 47$$

ومنه $a \wedge b = 47$ اذن الجواب الصحيح هو (ج)

(5) $\alpha = 2n^2 - 3n + 2$ و $\beta = n - 1$ مع $n > 3$

$$\alpha - (2n - 1)\beta = 2n^2 - 3n + 2 - (2n - 1)(n - 1) = 2n^2 - 3n + 2 - 2n^2 + 3n - 1 = 1$$

اذن الجواب الصحيح هو (ج)

الفرع الثاني:

(1) اذا كان العدنان 6 و 15 قاسمان مشتركين لـ a و b فإن : 6 يقسم a ويقسم b و 15 يقسم a ويقسم b

نعتبر المثال المضاد التالي : $a = 60$ و $b = 120$ و منه $a \wedge b = 60 \neq 30$ و 60 لا يقسم 30

$$a \vee b = 120$$

اذن الجوابان (أ) و (ب) خاطئان

ولدينا أيضا 15 يقسم a ويقسم b ومنه ينتج أيضا 5 يقسم a و 5 يقسم b ومن المعطيات أيضا 6 يقسم a ويقسم b

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 0[5] \\ a \equiv 0[6] \\ (5, 6) = 1 \end{array} \right. \text{ اذن يكون لدينا : } \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 0[30] \\ b \equiv 0[30] \end{array} \right. \text{ ونفس الشيء نجد : } a \equiv 0[30] \text{ و } b \equiv 0[30]$$

وهذا يعني 30 يقسم $ppcm(a, b)$

ولدينا $30/p \gcd(a, b)$. مثلا : $ax + by = 21$ تقبل حلا اذا فقط اذا كان $p \gcd(a, b) / 21$ لكن المقترح هو $30/p \gcd(a, b)$ أي ان $30/21$ وهذا مستحيل اذن الجواب (د) خاطئ

وبالتالي الجواب الصحيح هو (ج)

$$(2) \quad p \gcd(ab, a+b) = 5 \quad * \quad \text{تعني : } 5/ab \text{ ومنه } 5/2ab \text{ و } 5/(a+b) \text{ ومنه : } 5/(a+b)^2$$

ومن كل هذا ينتج أن : $5/(a+b)^2 - 2ab$ اذن $5/a^2 + b^2$ ومنه الجواب (أ) صحيح

* - ومن المعطيات أيضا نجد : $5/a(a+b) - ab$ ومنه $5/a^2$

ولدينا أيضا : $5/b(a+b) - ab$ ومنه $5/b^2$ أي ان : 5 يقسم a^2 و b^2 ومنه الجواب (ب) صحيح

* لدينا $5/a^2$ و العدد 5 اولي ومنه $5/a$ و أيضا 5 يقسم b ومنه $5/p \gcd(a, b)$ (1)

نضع $d = p \gcd(a, b)$ ومنه d يقسم a و يقسم b اذن d/ab و $d/(a+b)$

وبالتالي d يقسم $p \gcd(ab, a+b)$ اذن $d/5$ (2)

ومن (1) و (2) $5/p \gcd(a, b)$ و $d/5$ نجد ان $d = 5$ اذن الجواب (ج) صحيح

* من اجل $b = 10$; $a = 5$ مثلا فان $a + b = 15$ و $ab = 50$ اذن $p \gcd(ab, a+b) = 5$ ومنه

$$p \gcd(a^2, b^2) = 5^2 \quad \text{اذن الجواب (د) خاطئ}$$

ومنه الاجوبة الصحيحة هي : (أ) و (ب) و (ج)

$$(3) \quad (x, y) = 1 \quad \text{و منه}$$

$$p \gcd(-3x, 3y) = p \gcd(|-3x|, |3y|) = p \gcd(3|-x|, 3|y|) = p \gcd(3x, 3y) = 3p \gcd(x, y) = 3$$

اذن الجواب (أ) صحيح

- ليكن $d = p \gcd((x+y), (x-y))$ ومنه $d/x+y$ و $d/x-y$ اذن $d/(x+y) + (x-y)$ أي ان $d/2x$

و بنفس العمل نجد $d/(x+y) - (x-y)$ أي ان $d/2y$

ومنه $d/p \gcd(2x, 2y)$ أي $d/2p \gcd(x, y)$ وبما ان $(x, y) = 1$ فان $d/2$ أي ان قيم d هي 1 او 2

اذن $p \gcd((x+y) \wedge (x-y))$ هو 1 او 2 وبالتالي الجوابان (ب) و (ج) خاطئان والجواب (د) صحيح

التمرين (13)

(1) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية : $3x - 8y = 5$(1)

(2) n و x و y اعداد صحيحة حيث : $n = 3x + 2$ و $n = 8y + 7$

-(أ) بين ان الثنائية (x, y) حل للمعادلة (1)

- نعتبر الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ (2) بين ان $n \equiv 23[24]$

(3) m عدد طبيعي ,

(أ) عين باقي قسمة 2^{2m} على 3 وباقي قسمة 7^{2m} على 8

(ب) تحقق ان العدد 1439 حل للجملة (2)

(ج) ماهو باقي قسمة 1439^{2018} على 24

حل التمرين (13) :

(1) حل المعادلة $3x - 8y = 5$ (1) نلاحظ ان الثنائية $(-1; -1)$ هو حل خاص لها

أي ان $3(-1) - 8(-1) = 5$ وبالطرح من المعادلة (1) نجد $3(x+1) - 8(y+1) = 0$ ومنه

$3(x+1) = 8(y+1)$. العدد 3 يقسم $8(y+1)$ وبما ان 3 اولي مع 8 فان العدد 3 يقسم $y+1$

أي ان $y+1 = 3k$ ومنه $y = 3k - 1$ وبالتعويض في المعادلة $3(x+1) = 8(y+1)$ نجد $x+1 = 8k$

ومنه $x = 8k - 1$ ان مجموعة الحلول هي : $(x; y) = (8k - 1; 3k - 1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(2) (أ) لدينا $n = 3x + 2$ و $n = 8y + 7$

وهذا يعني $3x + 2 = 8y + 7$ ومنه نجد : $3x - 8y = 5$ وهذا يعني الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (1)

(ب) الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ تكافئ ($n = 3\alpha + 2$ و $n = 8\beta + 7$) ومنه نجد $3\alpha + 2 = 8\beta + 7$ وبالتالي :

$3\alpha - 8\beta = 5$ وهي نفسها المعادلة (1) ان حلولها هي : $(\alpha; \beta) = (8k - 1; 3k - 1)$

ومن العلاقة $n = 3\alpha + 2$ نجد $n = 3(8k - 1) + 2 = 24k - 1$ ان $n = 24k - 1$

وهذا يعني $n \equiv -1[24]$ أي ان $n \equiv 23[24]$

(3)(أ) - تعيين باقي قسمة 2^{2m} على 3

نعلم ان $2^{2m} = (2^2)^m = 4^m$ ونعلم ان $4 \equiv 1[3]$ ان $4^m \equiv 1[3]$ ومنه $2^{2m} \equiv 1[3]$

تعيين باقي قسمة 7^{2m} على 8

نعلم ان $7 \equiv 7[8]$ ومنه $7 \equiv -1[8]$ ان $7^2 \equiv 1[8]$ وبالتالي $(7^2)^m \equiv 1[8]$ أي ان $7^{2m} \equiv 1[8]$

(ب) التحقق ان العدد 1439 حل للجملة (2) : وذلك بقسمة العدد 1439 على 3 يكون الباقي 2

وبقسمة على 8 يكون الباقي 7 وهذا محقق وهذا يعني $\begin{cases} 1439 \equiv 2[3] \\ 1439 \equiv 7[8] \end{cases}$

(ج) تعيين باقي قسمة 1439^{2018} على 24

من السؤال السابق لدينا $\begin{cases} 1439 \equiv 2[3] \\ 1439 \equiv 7[8] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 1439^{2018} \equiv 2^{2018}[3] \\ 1439^{2018} \equiv 7^{2018}[8] \end{cases}$ ومن السؤال (أ) لدينا :

$2^{2018} \equiv 1[3]$ أي ان $2^{2(1009)} \equiv 1[3]$ وبالتالي $2^{2018} \equiv 1[3]$

و $7^{2018} \equiv 1[8]$ أي ان $7^{2(1009)} \equiv 1[8]$ وبالتالي : $7^{2018} \equiv 1[8]$

ان $\begin{cases} 1439^{2018} \equiv 1[3] \\ 1439^{2018} \equiv 1[8] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 1439^{2018} - 1 \equiv 0[3] \\ 1439^{2018} - 1 \equiv 0[8] \end{cases}$ وبما ان العددين 3 و 8 اوليين فيما بينهما فان $1439^{2018} - 1 \equiv 0[24]$ وبالتالي : $1439^{2018} \equiv 1[24]$ ومنه باقي قسمة 1439^{2018} على 24 هو 1

التمرين (14) :

(1) a عدد طبيعي حيث $a > 5$ و y عدد طبيعي يكتب $\overline{4452}$ في نظام التعداد ذي الأساس a و يكتب $\overline{2020}$ في نظام التعداد ذي الأساس $(a+2)$.

أ - بين أن a يحقق : $a(2a^2 - 8a - 21) = 18$

ب - استنتج قيمة a . ثم اكتب العدد y في النظام العشري.

(2) أ - أدرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9 .

ب - استنتج باقي قسمة العدد : $y^{1434} + y^{2012} + 4^{2013}$ على 9 .

حل التمرين (14)

(1) (أ) - بيان أن a يحقق : $a(2a^2 - 8a - 21) = 18$

لدينا $y = \overline{2020}^{(a+2)} = 0 + 2(a+2) + 0(a+2)^2 + 2(a+2)^3$ و $y = \overline{4452}^a = 2 + 5a + 4a^2 + 4a^3$

ومنه نجد $2 + 5a + 4a^2 + 4a^3 = 0 + 2(a+2) + 0(a+2)^2 + 2(a+2)^3$

ومنه $2 + 5a + 4a^2 + 4a^3 = 4a + 4 + 2a^3 + 12a^2 + 24a + 16$

وبالتالي : $a(2a^2 - 8a - 21) = 18$

(ب) استنتاج قيمة a : الكتابة السابقة تعني ان العدد a قاسم للعدد 18 ونعلم ان $a > 5$ أي ان $a \in \{6; 9; 18\}$

- إذا كان $a = 6$ فان المعادلة السابقة تكافئ : $a^2 - 4a - 12 = 0$ أي $(a-6)(a+2) = 0$

ومنه نجد $a = -2$ (مرفوض) او $a = 6$ ان $a = 6$.

- اذا كان $a = 9$ فان المعادلة تكافئ : $2a^2 - 8a - 23 = 0$ مميزها $\sqrt{\Delta} = \sqrt{248} = 15,74$

ومنه المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$

- اذا كان $a = 18$ فان المعادلة تكافئ : $2a^2 - 8a - 21 = 0$ وهذه مميزها $\sqrt{232} = 15,23$ لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$

- كتابة العدد y في النظام العشري : $y = 2 + 5(6) + 4(6)^2 + 4(6)^3$ ومنه $y = 1040$.

(2) (أ) - دراسة حسب قيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9

$5^0 \equiv 1[9]$ و $5^1 \equiv 5[9]$ و $5^2 \equiv 7[9]$ و $5^3 \equiv 8[9]$ و $5^4 \equiv 4[9]$ و $5^5 \equiv 2[9]$ و $5^6 \equiv 1[9]$

$n =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$	
$5^n \equiv \dots$	1	5	7	8	4	2	[9]

(ب) - استنتاج باقي قسمة العدد : $y^{1434} + y^{2012} + 4^{2013}$ على 9 .

لدينا $y = 1040 \equiv 5[9]$ و ولدينا $1434 = 6(239) = 6k$ ومنه $y^{1434} \equiv 5^{6k} \equiv 1[9]$
 ولدينا أيضا $2012 = 6(335) + 2 = 6k + 2$ ومنه $y^{2012} \equiv 5^{6k+2} \equiv 7[9]$
 ونعلم ان $2013 = 3(670) + 3$ ومنه $4^3 = 64 \equiv 1[9]$ ومنه $4^{2013} = (4^3)^{670} \times 4^3 \equiv 1[9]$
 ومنه نستنتج : $y^{1434} + y^{2012} + 4^{2013} \equiv 1 + 7 + 1 \equiv 0[9]$ الباقي هو 0 .

التمرين (15)

- من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $a = 3n + 4$ و $b = 2n + 1$.
- (1) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $2a - 3b = 5$ ، $a - b = n + 3$ ، $3(n + 3) - 5 = a$ ،
 $2(n + 3) - 5 = b$
 استنتج ان : $PGCD(a; b) = PGCD(n + 3, 5)$
- (2) استنتج تبعا لقيم n ، قيم $PGCD(a; b)$
- (3) x ، y ، z اعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها q عدد طبيعي غير معدوم .
- عين الاعداد q ، y ، x ، z علما ان : $PGCD(3z + 4y; 2z + y) = 10$
- (4) عين العددين الطبيعيين m ، n علما ان n اولي و $m^2 = a$

حل التمرين (15) :

- $a = 3n + 4$ و $b = 2n + 1$
- (1) التحقق من المساوات :
- $a - b = 3n + 4 - 2n - 1 = n + 3$ و $2a - 3b = 2(3n + 4) - 3(2n + 1) = 5$
 $3(n + 3) - 5 = 3(a - b) - (2a - 3b) = a$ و $2(n + 3) - 5 = 2(a - b) - (2a - 3b) = b$
 استنتج ان : $PGCD(a; b) = PGCD(n + 3, 5)$
- نضع $PGCD(a; b) = d$ و $PGCD(n + 3, 5) = d'$
- $\begin{cases} d / a \\ d / b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / a - b \\ d / 2a - 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / n + 3 \\ d / 5 \end{cases} \Rightarrow d / PGCD(n + 3, 5) \Rightarrow d / d'$
- $\begin{cases} d' / n + 3 \\ d' / 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' / 3(n + 3) - 5 \\ d' / 2(n + 3) - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' / a \\ d' / b \end{cases} \Rightarrow d' / PGCD(a; b) \Rightarrow d' / d$
- $PGCD(a; b) = PGCD(n + 3, 5)$ اي ان $d = d'$ ومنه $(d / d' \text{ و } d' / d)$
- (2) استنتج قيم $PGCD(a; b)$.
- لدينا $PGCD(a; b) = PGCD(n + 3, 5) = d$ ومنه $d / 5$ اذن القيم الممكنة هي $d = 1$ او $d = 5$
- اذا كان $d = 5$ فهذا يعني $5 \equiv 0[5]$ اي $n + 3 \equiv 0[5]$ وبالتالي $n = 5k + 2; k \in \mathbb{N}$

خلاصة : اذا كان $n = 5k + 2$ فان $PGCD(a; b) = 5$

اذا كان $n \neq 5k + 2$ فان $PGCD(a; b) = 1$

(3) تعيين الاعداد q, y, x, z علما ان : $PGCD(3z + 4y; 2z + y) = 10$

لدينا : $z = qy$ و $y = qx$

$$\begin{aligned} PGCD(3z + 4y; 2z + y) &= PGCD(3qy + 4y; 2qy + y) \\ &= PGCD(y(3q + 4); y(2q + 1)) = y \cdot PGCD(3q + 4; 2q + 1) \end{aligned}$$

ومنه نجد $PGCD(3z + 4y; 2z + y) = y \cdot PGCD(3q + 4; 2q + 1)$

وحسب السؤال السابق : $PGCD(a; b) = 5$ او $PGCD(a; b) = 1$

اي ان $PGCD(3q + 4; 2q + 1) = 5$ او $PGCD(3q + 4; 2q + 1) = 1$

في حالة : $q = 5k + 2$ فان $PGCD(3q + 4; 2q + 1) = 5$ ومنه $y \times 5 = 10$ اذن $y = 2$

$y = qx$ أي ان $x = \frac{y}{q}$ وهذا يعني q يقسم y ومنه $q / 2$ اذن $q = 2$ لان المتتالية ليست ثابتة

$q = 2$ نستنتج منه $x = 1; y = 2; z = 4$ و $PGCD(3z + 4y; 2z + y) = PGCD(20; 10) = 10$

في حالة $q \neq 5k + 2$ فان $PGCD(3q + 4; 2q + 1) = 1$ ومنه $y = 10$

$$y = qx \Rightarrow x = \frac{y}{q} \Rightarrow q / y \Rightarrow q / 10 \Rightarrow q \in \{1; 5; 10\}$$

- اذا كان $q = 1$ فان : $x = 10; y = 10; z = 10$; وعندئذ $PGCD(3z + 4y; 2z + y) = PGCD(70; 30) = 10$

- اذا كان $q = 5$ فان : $x = 2, y = 10, z = 50$; وعندئذ

$$PGCD(3z + 4y; 2z + y) = PGCD(170; 110) = 10$$

- اذا كان $q = 10$ فان : $x = 1, y = 10, z = 100$;

$$PGCD(3z + 4y; 2z + y) = PGCD(340; 110) = 10$$

(4) تعيين العددين الطبيعيين m, n علما ان n اولي و $m^2 = a$:

$$m^2 = a \Rightarrow m^2 = 3n + 4 \Rightarrow m^2 - 4 = 3n \Rightarrow (m - 2)(m + 2) = 3n$$

$$\begin{cases} 3n = (3k + 2)^2 - 4 \\ 3n = (3k' - 2)^2 - 4 \end{cases} \quad \text{او} \quad \begin{cases} m = 3k + 2 \\ m = 3k' - 2 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \text{وهذا يعني } (3 / (m - 2) \text{ او } 3 / (m + 2) \text{ اي}$$

$$\begin{cases} n = k(3k + 4) \\ n = k'(3k' - 4) \end{cases} \quad \text{اذن}$$

بما ان n اولي ، فان القيمة الوحيدة الممكنة للعددين k و k' هي 1 ، منه $n = 7$ او $n = -1$

(مستحيل لان n عدد طبيعي) ،

نستنتج اذن أن من اجل $k = 1$ نجد : $m = 3(1) + 2$ أي $m = 5$

و $m^2 = 3n + 4$ تعني $25 = 3n + 4$ ومنه $n = 7$

التمرين (16)

نعتبر المتتالية (u_n) التي حدها الأول $u_0 = 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 5n - 5$ (1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 5n$

* بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 .

* عبر عن الحد العام v_n ثم u_n بدلالة n . ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

* عين العدد الطبيعي n حيث $2^n = 2048$. استنتج أن 2008 حدا من حدود المتتالية (u_n) .

(3) * اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $2^{4k+1} \equiv 2[10]$.

* بين أن u_n عدد طبيعي .

* عين حسب قيم n رقم آحاد العدد u_n .

حل التمرين (16): $u_0 = 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 5n - 5$

(1) حساب u_1 ، u_2 ، u_3 .

$$u_2 = 2u_1 + 5 \times 1 - 5 = 2 \times 11 - 5 = 17 \quad , \quad u_1 = 2u_0 + 5 \times 0 - 5 = 2 \times 8 - 5 = 11$$

$$u_3 = 2u_2 + 5 \times 2 - 5 = 2 \times 17 + 5 = 39$$

$$u_{n+1} = 2u_n + 5n - 5 \quad \text{و} \quad v_n = u_n + 5n \quad (2)$$

اثبات ان (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 5(n+1) = 2u_n + 5n - 5 + 5n + 5 = 2u_n + 10n = 2(u_n + 5n) = 2v_n$$

$v_{n+1} = 2v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 .

* عبارة v_n و u_n بدلالة n

$$v_n = 2^{n+3} \quad \text{ومنه} \quad v_n = v_0 \times (2)^n = u_0 \times (2)^n = 8 \times 2^n = 2^{n+3}$$

$$u_n = 2^{n+3} - 5n \quad \text{اذن} \quad u_n = v_n - 5n = 2^{n+3} - 5n \quad \text{ومنه} \quad v_n = u_n + 5n$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ نكتب : } u_n = 2^n \times \left(8 - 5 \frac{n}{2^n} \right) \quad \text{و} \quad 0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{e^n}$$

$$\text{ونعلم ان } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \quad \text{ومنه نستنتج أن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

* تعيين العدد الطبيعي n بحيث $2^n = 2048$.

$$2^n = 2048 \quad \text{تكافئ} \quad 2^n = 2^{11} \quad \text{ومنه} \quad n = 11$$

* إيجاد العدد الطبيعي n بحيث : $u_n = 2008$

$$u_n = 2008 \quad \text{تكافئ} \quad v_n - 5n = 2008 \quad \text{أي} \quad 2^{n+3} - 5n = 2008 \quad \text{ومن السؤال السابق} \quad 2^n = 2048 \quad \text{نجد}$$

$$n=8 \quad 2^{n+3} - 5n = 2^{8+3} - 5 \times 8 \quad \text{ومنه} \quad 2^{n+3} - 5n = 2^{11} - 5 \times 8 \quad \text{أي} \quad 2^{n+3} - 5n = 2048 - 40$$

$$(3) \quad * \text{ نستعمل الاستدلال بالتراجع , نسمي } P(k) \text{ هذه الخاصية } 2^{4k+1} \equiv 2[10]$$

$$* P(0) \text{ صحيحة لأن } 2^1 \equiv 2[10] .$$

$$* \text{ نفرض } P(k) \text{ صحيحة أي } 2^{4k+1} \equiv 2[10] \text{ ونبرهن } P(k+1) \text{ أي } 2^{4(k+1)+1} \equiv 2[10]$$

$$\text{لدينا } 2^{4(k+1)+1} = 2^{4k+4+1} = 2^{4k+1} \times 2^4 \quad \text{نستنتج أن } 2^{4(k+1)+1} \equiv 2^{4k+1} \times 2^4$$

$$\text{أي } 2^{4(k+1)+1} \equiv 2[10] \times 16 \quad \text{ومنه } 2^{4(k+1)+1} \equiv 2[10]$$

$$\text{نستنتج أن مهما يكن العدد الطبيعي } k : 2^{4k+1} \equiv 2[10] .$$

$$- \text{ تبيان أن } u_n \text{ عدد طبيعي: حيث } u_n = 2^{n+3} - 5n$$

$$* \text{ بما أن } 2^{n+3} \text{ عدد طبيعي و } 5n \text{ عدد طبيعي و } 2^{n+3} > 5n \text{ فإن } u_n \text{ عددا طبيعيا .}$$

$$* \text{ تعيين رقم آحاد } u_n \text{ هو تعيين باقي قسمة } u_n \text{ على } 10 .$$

$$\text{لما } n = 4k + 1 \text{ فإن } u_n \equiv 8 \times 2^{4k+1} - 5(4k+1)[10] \text{ أي } u_n \equiv 8 \times 2 - 20k - 5[10] \text{ أي } u_n \equiv 1[10]$$

$$\text{نستنتج أن رقم آحاد } u_n \text{ هو } 1 \text{ لما } n = 4k + 1$$

$$\text{لما } n = 4k + 2 \text{ فإن } u_n \equiv 8 \times 2^{4k+2} - 5(4k+2)[10] \text{ أي } u_n \equiv 8 \times 2 \times 2 - 0[10] \text{ أي } u_n \equiv 2[10]$$

$$\text{نستنتج أن رقم آحاد } u_n \text{ هو } 2 \text{ لما } n = 4k + 2$$

$$\text{لما } n = 4k + 3 \text{ فإن } u_n \equiv 8 \times 2^{4k+3} - 5(4k+3)[10] \text{ أي } u_n \equiv 8 \times 2 \times 4 - 20k - 15[10] \text{ أي } u_n \equiv 8 \times 2 \times 4 - 20k - 15[10]$$

$$\text{أي } u_n \equiv 9[10]$$

$$\text{نستنتج أن رقم آحاد } u_n \text{ هو } 9 \text{ لما } n = 4k + 3$$

$$\text{لما } n = 4k \text{ فإن } u_n \equiv 8 \times 2^{4k} - 5(4k)[10] \text{ أي } u_n \equiv 8 \times 2^{4k+1} - 20k[10] \text{ أي } u_n \equiv 4 \times 2^{4k+1} - 20k[10]$$

$$\text{أي } u_n \equiv 4 \times 2 - 0[10] \text{ أي } u_n \equiv 8[10] \text{ نستنتج أن رقم آحاد } u_n \text{ هو } 8 \text{ لما } n = 4k$$

التمرين (17)

$$(1) \text{ نعتبر في } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة } (E_1) \text{ ذات المجهول } (x; y) : 11x + 8y = 79 .$$

$$(أ) \text{ بين انه اذا كانت الثنائية } (x; y) \text{ حل للمعادلة } (E_1) \text{ فإن } y \equiv 3[11] .$$

$$(ب) \text{ حل المعادلة } (E_1) .$$

$$(2) \text{ نعتبر في } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة } (E_2) \text{ ذات المجهول } (y; z) : 3y + 11z = 372 .$$

$$(أ) \text{ بين انه اذا كانت الثنائية } (y; z) \text{ حل للمعادلة } (E_2) \text{ فإن } z \equiv 0[3] .$$

$$(ب) \text{ حل المعادلة } (E_3) .$$

$$(3) \text{ حل في } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة } (E_3) \text{ ذات المجهول } (x; z) : 3x - 8z = -249 .$$

$$(4) \text{ السعر الكلي ل } 41 \text{ قلم ، موزعة في ثلاث علب هو } 480DA$$

- سعر كل قلم من العلبة الأولى هو $48DA$.
- سعر كل قلم من العلبة الثانية هو $36DA$.
- سعر كل قلم من العلبة الثالثة هو $4DA$.
- عين عدد الاقلام في كل علبة .

حل التمرين (17) :

(1) (أ) لدينا $11x + 8y = 79$ ومنه $8y - 79 = -11x$ إذن 11 يقسم $8y - 79$ أي $8y - 79 \equiv 0[11]$.
 $8y - 79 \equiv 0[11]$ تكافئ $8y \equiv 79[11]$ أي $8y \equiv 2[11]$ تكافئ $56y \equiv 14[11]$ أي $y \equiv 3[11]$.
 (ب) $y \equiv 3[11]$ تكافئ $y = 3 + 11k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و بعد التعويض بـ $y = 3 + 11k$ في المعادلة $11x + 8y = 79$ نجد $x = 5 - 8k$ و أخيرا مجموعة حلول المعادلة $11x + 8y = 79$ هي $S = \{(5 - 8k; 3 + 11k), k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) (أ) $3y + 11z = 372$ تكافئ $3y = 372 - 11z$ أي $11z = 3(124 - y)$.
 $11z = 3(124 - y)$ تعني 3 تقسم $11z$ و بما ان 3 اولي مع 11 فانه حسب مبرهنة غوص $z \equiv 0[3]$ أي $z = 3k$ ومنه $z = 3k$.
 (ب) $z \equiv 0[3]$ تكافئ $z = 3k'$ حيث $k' \in \mathbb{Z}$ نعوض في المعادلة $11z = 3(124 - y)$ فنجد $y = 124 - 11k'$.

اذن مجموعة حلول المعادلة $3y + 11z = 372$ هي $S' = \{(-83 + 8k', 3k'), k' \in \mathbb{Z}\}$.
 (3) $3x - 8z = -249$ تكافئ $3x + 249 = 8z$ تكافئ $3(x + 83) = 8z$.

3 يقسم $8z$ و بما ان 3 و 8 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص 3 يقسم z اي $z = 3k''$ حيث $k'' \in \mathbb{Z}$.
 نعوض في المعادلة $3(x + 83) = 8z$ فنجد $x = -83 + 8k''$.

اذن مجموعة حلول المعادلة $3x + 249 = 8z$ هي $(x; z) = \{(-83 + 8k''; 3k''), k'' \in \mathbb{Z}\}$.
 (4) ليكن x عدد اقلام العلبة الأولى و y عدد اقلام العلبة الثانية و z عدد اقلام العلبة الثالثة .

مجموع الاقلام هو 41 اذن (1) $x + y + z = 41$.

وأسعار الاقلام على التوالي هي: من العلبة الأولى $48DA$ و من العلبة الثانية هو $36DA$ و من الثالثة هو $4DA$.
 والسعر الكلي للاقلام هو $480DA$ ومنه نجد :

(2) $48x + 36y + 4z = 480$ أي (2) $12x + 9y + z = 120$.

لدينا اذن الجملة
$$\begin{cases} x + y + z = 41 \dots (1) \\ 12x + 9y + z = 120 \dots (2) \end{cases}$$
 ومن (1) نجد : $z = 41 - x - y$

وبالتعويض في (2) نجد : $12x + 9y + 41 - x - y = 120$ أي $11x + 8y = 79$ و هي المعادلة (E_1)

فحلولها اذن هي : $x = 5 - 8k$ و $y = 3 + 11k$. حيث k عدد صحيح

بما ان x يمثل عدد الأقلام فان $x > 0$ اي $5 - 8k > 0$ ومنه $k < \frac{5}{8}$ اذن $k = 0$

فنجد عندئذ $x = 5$ و $y = 3$ و $z = 41 - 5 - 3 = 33$

اذن عدد الاقلام في العلبة الأولى هو 5 وعدد الاقلام في العلبة الثانية هو 3 وعدد الاقلام في العلبة الثالثة هو 33

التمرين (18)

(1) عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 2772 , 1260 , 504

(2) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : (1) $2772x - 1260y = 504$...

(أ) عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق $2x_0^2 - 3y_0 = -4$.

(ب) باستعمال الحل الخاص المتحصل عليه في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حل المعادلة (1)

(3) نفرض ان $y; x$ عددان طبيعيان حيث $(x; y)$ هو حل للمعادلة (1) :

(أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

(ب) عين الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون العددين x و y اوليان فيما بينهما .

(4) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 10 ثم استنتج رقم احاد 2018^{1439} .

(5) عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (1) و تحقق $2^{y-2x} \equiv 8[10]$.

حل التمرين (18) :

(1) ايجاد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 504 و 1260 و 2772 بالتحليل الى جذاء عوامل اولية نجد :

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \text{ و } 1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \text{ و } 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

ومنه $PGCD(2772; 1260; 504) = 252$.

$$(2) \dots (1) \quad 2772x - 1260y = 504$$

(أ) تعيين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق $2x_0^2 - 3y_0 = -4$ لدينا (1) تكافئ $11x - 5y = 2$.

$$\text{الحل الخاص يحقق} \begin{cases} 2x_0^2 - 3y_0 = -4 \\ 11x_0 - 5y_0 = 2 \end{cases} \text{ وهذا يكافئ ان } \begin{cases} 10x_0^2 - 15y_0 = -20 \\ 33x_0 - 15y_0 = 6 \end{cases}$$

بالطرح نجد $10x_0^2 - 33x_0 + 26 = 0$ مميزها $\Delta = 49$ و منه للمعادلة حلين هما $x_0 = \frac{13}{10}$ مرفوض

و الحل الثاني مقبول وهو $x_0 = 2$ بالتعويض في المعادلة من الجملة نحصل $y_0 = 4$ و منه الحل الخاص هو $(2; 4)$

(ب) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (1) لدينا $\begin{cases} 11x - 5y = 2 \\ 11(2) - 5(4) = 2 \end{cases}$ بالطرح نجد $11(x - 2) = 5(y - 4)$

11 يقسم $5(y - 4)$ و العددين 11 و 5 اوليان فيما بينهما حسب مبرهنة غوص فان 11 قاسم للعدد $(y - 4)$

ومنه $y - 4 = 11k$ أي ان $y = 4 + 11k$ وبالتعويض في المعادلة نجد $x = 2 + 5k$

ومنه مجموعة الحلول هي $S = \{(2 + 5k; 4 + 11k); k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) (أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر للعددين x و y الطبيعيين حيث $(x; y)$ هو حل للمعادلة (1) :

نضع $PGCD(x; y) = d$ ومنه d قاسم للعددين x و y وبالتالي يقسم $11x - 5y$ أي يقسم 2

و منه القاسم المشترك الاكبر قاسم للعدد 2 و منه قيمه الممكنة هي 1 او 2

(ب) تعيين الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون العددين x و y اوليان فيما بينهما أي ان $PGCD(x; y) = 1$ و

$$\begin{cases} x = 2 + 5(2k' + 1) \\ y = 4 + 11(2k' + 1) \end{cases}; k' \in \mathbb{N} \text{ و هذا يعني ان } k \text{ عدد طبيعي فردي أي ان } k' \in \mathbb{N}$$

$$\text{و منه } \begin{cases} x = 7 + 10k' \\ y = 15 + 22k' \end{cases}; k' \in \mathbb{N} \text{ ومنه } (x; y) = (7 + 10k'; 15 + 22k') \text{ و } k' \in \mathbb{N}$$

(4) تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 10 لدينا :

$n =$	0	1	2	3	4	5	
$2^n \equiv \dots$	1	2	4	8	6	2	[10]

و منه وباقي قسمة 2^n على 10 تشكل متتالية دورية و دورها 4

لما $n = 4k + 1$ الباقي هو 2 و لما $n = 4k + 2$ الباقي هو 4

و لما $n = 4k + 3$ الباقي هو 8 و لما $n = 4k + 4$ الباقي هو 6

لدينا $2018 \equiv 2^3 [10]$ و منه $2018^{1439} \equiv 2^{4317} [10]$ و $2018^{1439} \equiv 2^{4317} [10]$ وهو من الشكل $n = 4k + 1$

باقي قسمة 2018^{1439} على 10 هو 2 أي ان $2018^{1439} \equiv 2 [10]$

رقم احاد العدد 2018^{1439} هو 2

(5) تعيين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي هي حلول المعادلة (1) و تحقق $2^{y-2x} \equiv 8 [10]$

$$\text{لدينا } \begin{cases} x = 2 + 5k \\ y = 4 + 11k \end{cases}; k \in \mathbb{N} \text{ ومنه } y - 2x = 4 + 11k - 2(2 + 5k) = k$$

بالتعويض نجد $2^{y-2x} \equiv 8 [10]$ تعني $2^k \equiv 8 [10]$ من دراسة البواقي نجد ان $k = 4\alpha + 3$

$$\text{و منه } \begin{cases} x = 2 + 5(4\alpha + 3) \\ y = 4 + 11(4\alpha + 3) \end{cases} \text{ اذن } \begin{cases} x = 17 + 20\alpha \\ y = 37 + 44\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{N}$$

و منه الثنائيات هي $(x; y) = (17 + 20\alpha; 37 + 44\alpha)$

التمرين (19)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مع التبرير:

- (1) من أجل كل عدد طبيعي n : 3 يقسم $2^{2n} - 1$
- (2) إذا كان n عددا صحيحا حلا للمعادلة : $n^2 + n \equiv 0[6]$ فإن : $n \equiv 0[3]$
- (3) إذا كان : $x^2 \equiv y^2[17]$ فإن : $x \equiv y[17]$
- (4) مجموعة حلول المعادلة : $12x - 5y = 3$ المعرفة في $\mathbb{Z}^2$ هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل : $(4 + 10k; 9 + 24k)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
- (5) إذا كان 2 هو باقي قسمة عدد طبيعي n على 5 فإن 4 يكون باقي قسمة n^2 على 5
- (6) $PGCD(18a; 24a) = a$ حيث : $a \in \mathbb{N}^*$
- (7) $PGCD(a; b) = PGCD(a; a + b)$, b, a عدنان طبيعيان .
- (8) توجد ثنائية وحيدة (a, b) من الاعداد الطبيعية حيث : $a < b$ و $PPCM(a, b) - PGCD(a, b) = 1$
- (9) N و M عدنان طبيعيان يكتبان كما يلي : $M = \overline{abc}^{10}$ و $N = \overline{bca}^{10}$
- إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ أيضا يقبل القسمة على 27
- (10) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : إذا كان $n \equiv 1[7]$ فإن $PGCD(3n + 4; 4n + 3) = 7$
- (11) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العدد : $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 5
- (12) $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $x \equiv 1[5]$

حل التمرين (19) :

(1) 3 يقسم $2^{2n} - 1$ تعني $2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$ أي $4^n - 1 \equiv 0[3]$ أي $4^n \equiv 1[3]$

وهذه الأخيرة صحيحة لان $4 \equiv 1[3]$ وبالتالي $4^n \equiv 1[3]$ اذن الجملة صحيحة

اذن $2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$

n	1	2	3	4	5	6	7
$2^{2n} - 1$	3	15	63	255	1023	4095	16383
reste	0	0	0	0	0	0	0

(2) $n^2 + n \equiv 0[6]$ فإن $n \equiv 0[3]$ هذه الجملة خاطئة , لانه من أجل $n = 1$ مثلا نجد :

$1^2 - 1 \equiv 0[6]$ محققة لكن $1 \not\equiv 0[3]$

(3) خطأ لانه إذا كان : $x^2 \equiv y^2[17]$ فإن $x^2 - y^2 \equiv 0[17]$ وهذه تعني $(x - y)(x + y) \equiv 0[17]$

ومنه نجد ($x - y \equiv 0[17]$ او $x + y \equiv 0[17]$) أي ($x \equiv y[17]$ او $x \equiv -y[17]$)

(4) المعادلة $12x - 5y = 3$ تقبل حلا خاصا هو $(-1; -3)$ ومنه $12(-1) - 5(-3) = 3$

وبالتالي نجد : $12(x + 1) = 5(y + 3)$ وهذه تعني 5 يقسم $12(x + 1)$ وبما ان 5 اولي مع 12

فانه حسب مبرهنة غوص 5 يقسم $(x + 1)$ أي $x + 1 = 5k$ ومنه $x = 5k - 1$

ونعوض نجد : $y + 3 = 12k$ أي $y = 12k - 3$

اذن الحلول هي : $(x; y) = (5k - 1; 12k - 3)$

والحلول المطروحة هي : $x = 4 + 10k$ و هذا الحل يعني $x = 4 + 10k$ أي $x \equiv 4 [5]$

وهذه تعني $x \equiv -1 [5]$ ومنه $x = 5k - 1$

و $y = 9 + 24k$ تعني $y = 9 + 12(2k)$ أي $y \equiv 9 [12]$ أي $y \equiv -3 [12]$ ومنه $y = 12k - 3$

اذن الجملة صحيحة والحلول هي نفسها

ملاحظة (1): يمكن الحل بطريقة أخرى وذلك بتعويض الحلول في المعادلة نجد انها محققة

(2) اذا اخذنا الحل الخاص (4;9) يكون : $\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12 \times 4 - 5 \times 9 = 3 \end{cases}$ ومنه $12(x - 4) - 5(y - 9) = 0$

اذن $12(x - 4) = 5(y - 9)$ ومنه $\begin{cases} x - 4 = 5k \\ y - 9 = 12k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 5k \\ y = 9 + 12k \end{cases}$

(5) $n \equiv 2 [5]$ فإن $n^2 \equiv 4 [5]$ صحيح لانه من خواص الموافقات $n \equiv 2 [5]$ تستلزم $n^2 \equiv 2^2 [5]$

أي $n^2 \equiv 4 [5]$

(6) خطأ لأن : $PGCD(18a; 24a) = PGCD(3(6a); 4(6a)) = 6a \times PGCD(3; 4) = 6a \times 1 = 6a$

(7) صحيح . نضع $d = PGCD(a; b)$ و $d' = PGCD(a; a + b)$

يمكن ان نبرهن ان $d = d'$

$d = PGCD(a; b)$ تعني d يقسم a ويقسم b وبالتالي d يقسم $a + b$ أي ان d يقسم d'

ومن جهة أخرى وبنفس العمل نجد ان d' يقسم d وبالتالي $d = d'$

(8) نضع $\begin{cases} a = a_1 k \\ b = b_1 k \end{cases}$ حيث $PGCD(a, b) = k$ لدينا اذن : $PPCM(a, b) - PGCD(a, b) = 1$

العلاقة (1) تعني : $\frac{a \times b}{k} - k = 1$ ومنه $\frac{a_1 k \times b_1 k}{k} - k = 1$ اذن $a_1 b_1 k - k = 1$ أي $k(a_1 b_1 - 1) = 1$

وهذا يعني ان k يقسم 1 ومنه $k = 1$ وبالتالي نجد من العلاقة (1) :

$ab - 1 = 1$ اذن $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow ab = 2$ حيث $a < b$

اذن توجد ثنائية وحيدة تحقق المطلوب

(9) $M = \overline{abc}^{10}$ و $N = \overline{bca}^{10}$ يقبل القسمة على 27 فان $M - N$ ايضا يقبل القسمة على 27

ومنه $M = \overline{abc} = 100a + 10b + c$ و $N = \overline{bca} = 100b + 10c + a$

اذن $M - N = 100a + 10b + c - 100b - 10c - a = 9(11a - 10b - c)$

يكون $M - N$ يقبل القسمة على 27 اذا كان $(11a - 10b - c)$ يقبل القسمة على 3 ونعلم ان $M = 100a + 10b + c = 27k$ تعني $10b + c = 27k - 100a$ و $M - N = 9(11a - (10b + c))$ نعوض اذن $10b + c$ نجد :
 $M - N = 9 \times 3(37a - 9k)$ و منه $11a - 10b - c = 11a - 27k + 100a = 111a - 27k = 3(37a - 9k)$
اذن $M - N$ يقبل القسمة على 27 وبالتالي الجملة صحيحة
(10) $n \equiv 1[7]$ تعني $n = 1 + 7k$ نعوض في العلاقة $3n + 4 = 3 + 21k + 4 = 7 + 21k = 7(1 + 3k)$
ونعوض ايضا $4n + 3 = 4(1 + 7k) + 3 = 7 + 28k = 7(1 + 4k)$
اذا كان القاسم المشترك الاكبر هو 7 فان العددين $1 + 3k$ و $1 + 4k$ يجب ان يكونا اوليين فيما بينهما
أي يوجد عدنان صحيحان u و v يحققان : $u(1 + 4k) + v(1 + 3k) = 1$ ومنه $\begin{cases} u + v = 1 \\ 4u + 3v = 0 \end{cases}$ اذن $\begin{cases} u = -3 \\ v = 4 \end{cases}$
اذن بالفعل $1 + 3k$ و $1 + 4k$ اوليان فيما بينهما وبالتالي $PGCD(3n + 4; 4n + 3) = 7$
الجملة اذن صحيحة

(11) الجملة خاطئة لان من الواضح ان العدد 5^{6n+1} يقبل القسمة على 5 لكن العدد 2^{3n+1} لا يقبل القسمة على 5
لانه قوى للعدد 2 . اذن مجموع العددين 5^{6n+1} و 2^{3n+1} لا يقبل القسمة على 5
(12) الاقتراح خاطئ

سنجرب جميع بواقي القسمة بترديد 5 نجد

$x \equiv \dots$	0	1	2	3	4	$[5]$
$x^2 + x + 3 \equiv \dots$	3	0	4	0	3	$[5]$

اذن خاطئة لانه توجد حالة اخرى تعتبر حلا وهي : $x \equiv 3[5]$

التمرين (20):

- (1) عين مجموعة الاعداد الصحيحة x بحيث : $4x \equiv 33[5]$
- (2) (أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $4x - 5y = 33$... (E)
(ب) استنتج حلول الجملة $\begin{cases} \lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4] \end{cases}$ حيث λ عدد صحيح
- (ج) عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $|x + y + 3| < 27$
- (3) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11
(ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases} \quad (\text{ج}) \text{ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي } n \text{ التي تحقق الجملة :}$$

(4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{abbaba}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 حيث $a \neq 0$, عين a و b بحيث يكون N قابلا القسمة على 33 ثم اكتب N في النظام العشري (لاحظ ان $11 \times 3 = 33$)

حل التمرين (20) :

(1) تعيين x بحيث : $4x \equiv 33[5]$ نعلم ان : $33 \equiv 3[5]$ و $4 \equiv -1[5]$ منه

$4x \equiv 33[5]$ تكافئ $-x \equiv 3[5]$ أي $x \equiv -3[5]$ ومنه $x \equiv 2[5]$ أي ان $x = 5k + 2$ حيث k عدد صحيح

(2) (أ) حل المعادلة : $4x - 5y = 33 \dots (E)$

(E) تكافئ $4x = 5y + 33$ وهذا يعني $4x \equiv 33[5]$ ومن السؤال السابق فان : $x = 5k + 2$

وبالتعويض في (E) نجد : $y = 4k - 5$ حيث k عدد صحيح

اذن حلول المعادلة هي الثنائيات : $(x; y) = (5k + 2; 4k - 5)$

(ب) استنتاج حلول الجملة : $\begin{cases} \lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4] \end{cases}$: وهذه الجملة تعني $\begin{cases} \lambda = 5u + 55 \\ \lambda = 4v + 22 \end{cases}$

أي ان $5u + 55 = 4v + 22$ ومنه $4v - 5u = 33$ وحلولها هي نفس حلول المعادلة (E)

أي ان : $(u; v) = (4k - 5; 5k + 2)$ ومنه $\lambda = 5u + 55 = 5(4k - 5) + 55$

أي ان $\lambda = 20k + 30$ حيث k عدد صحيح

(ج) تعيين حلول المعادلة (E) والتي تحقق $|x + y + 3| < 27$:

الحلول هي : $(x; y) = (5k + 2; 4k - 5)$ و $|x + y + 3| < 27$ تعني $|5k + 2 + 4k - 5 + 3| < 27$

ومنه $|9k| < 27$ أي $-27 < 9k < 27$ اذن $-3 < k < 3$ ومنه قيم k هي :

$(x; y) \in \{(-8; -13); (-3; -9); (2; -5); (7; -1); (12; 3)\}$ ومنه الحلول $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

(3) (أ) ادراسة بواقي قسمة العدد 5^n على 11 :

$5^0 \equiv 1[11]$, $5^1 \equiv 5[11]$, $5^2 \equiv 3[11]$, $5^3 \equiv 4[11]$, $5^4 \equiv 9[11]$ و $5^5 \equiv 1[11]$ الدور هو 5

اذن من اجل كل عدد طبيعي p فان بواقي القسمة الاقليدية هي كما يلي : $5^{5p} \equiv 1[11]$ و $5^{5p+1} \equiv 5[11]$ و

$5^{5p+2} \equiv 3[11]$ و $5^{5p+3} \equiv 4[11]$ و $5^{5p+4} \equiv 9[11]$

(ب) برهان ان من اجل $n \neq 0$: $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$

لدينا $10 \equiv -1[11]$ ومنه $10^{10n} \equiv 1[11]$

و $16 \equiv 5[11]$ ومنه $16^{5n-4} \equiv 5^{5n-4}[11]$ وتعني $16^{5n-4} \equiv 5^{5m+1}[11] \equiv 5[11]$

ومنه $16^{5n-4} \equiv 5[11]$

و $27 \equiv 5[11]$ ومنه $27^{5n+2} \equiv 5^{5n+2}[11] \equiv 3[11]$ ومنه $27^{5n+2} \equiv 3[11]$ ومنه $38 \equiv 5[11]$ ومنه $38^{5n+3} \equiv 5^{5n+3}[11] \equiv 4[11]$ ومنه $38^{5n+3} \equiv 4[11]$ ومنه $49 \equiv 5[11]$ ومنه $49^{5n-1} \equiv 5^{5n-1}[11] \equiv 9[11]$ وتعني $49^{5n-1} \equiv 5^{5n-1}[11] \equiv 9[11]$ ومنه $49^{5n-1} \equiv 9[11]$ اذن

ومنه : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 1+5+3+4+9[11] \equiv 22[11]$ اذن $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$

(ج) تعيين قيم n بحيث : $\begin{cases} n-5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$

$n \equiv 2[5]$ تعني $n = 5p + 2$ و $n - 5^n \equiv 0[11]$ تعني : $5^n \equiv n[11]$ حيث $n = 5p + 2$ $\begin{cases} n = 11\alpha + 3 \\ 11\alpha + 3 \equiv 2[5] \end{cases}$ وهذا يعني $\begin{cases} n = 11\alpha + 3 \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} n \equiv 3[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$ وبالتالي الجملة تصبح : $5^{5p+2} \equiv 3[11]$

ولدينا $10\alpha + \alpha + 5 \equiv 4[5]$ وبالتالي $\alpha \equiv 4[5]$ ومنه $\alpha = 5p + 4$

ومنه نستنتج ان $n = 11(5p + 4) + 3$ اذن : $n = 55p + 47$ حيث p طبيعي (4) لدينا $N = \overline{abbaba}^4$ و $a \neq 0$

تعيين a و b بحيث يكون N قابلا للقسمة على 33 أي $N \equiv 0[33]$

لدينا $N = \overline{abbaba}^4 = a \times 4^0 + b \times 4 + a \times 4^2 + b \times 4^3 + b \times 4^4 + a \times 4^5$

ومنه $N = 1041a + 324b$ و $N \equiv 0[33]$ تعني $N \equiv 0[3 \times 11]$ أي $(N \equiv 0[3] \text{ و } N \equiv 0[11])$ لان 3 و 11 اوليان فيما بينهما

و $1041a + 324b = 3(347a + 108b)$ ومنه N مضاعف للعدد 3 .

اذن يكفي ان نعين العددين a و b بحيث يكون N قابلا للقسمة على 11

$1041a + 324b \equiv 0[11]$ ونعلم $1041 \equiv 7[11]$ و $324 \equiv 5[11]$ ومنه نجد $7a + 5b \equiv 0[11]$

وبما ان $1 \leq a \leq 3$ و $0 \leq b \leq 3$ فان قيم $7a + 5b$ هي كما في الجدول التالي :

a	1	2	3	
b	0	1	2	3
$7a$	7	14	21	
$5b$	0	5	10	15

نلاحظ ان الحالة الوحيدة التي يكون فيها $7a + 5b$ مضاعف للعدد 11 هي الحالة $(7a, 5b) = (7, 15)$

ومنه $a = 1$ و $b = 3$

كتابة N في النظام العشري : $N = 1041a + 324b = 1041(1) + 324(3) = 2013$

التمرين (21)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية : $16x + 59y = 2006 \dots (1)$.
 (1) حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 2006 ، ثم استنتج أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن x يكون مضاعفا للعدد 59 .

(2) حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، المعادلة (1) .

(3) عين الحلول (x, y) للمعادلة (1) التي تنتمي إلى $\mathbb{N}^{*2}$.

(4) عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a و b التي تحقق $16m + 59d = 2006$ حيث

$$d = PGCD(a, b) \text{ و } m = PPCM(a, b)$$

حل التمرين (21)

(1) تحليل العدد : $2006 = 2 \times 17 \times 59$

- إذا كانت (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن : $16x + 59y = 2006$ تكافئ $16x = 2006 - 59y$

$$\text{ومنه } 16x = 59(34 - y) \text{ اذن } 16x = 2 \times 17 \times 59 - 59y = 59(34 - y)$$

هذه المعادلة تعني ان 59 يقسم $16x$ وبما ان 59 و 16 اوليين فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص 59 يقسم x اي ان x مضاعف للعدد 59 . ومنه $x = 59k$ حيث k عدد صحيح

(2) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، المعادلة (1) :

لدينا $x = 59k$ ونعوض في المعادلة $16x = 59(34 - y)$ نجد : $16k = (34 - y)$ ومنه $y = 34 - 16k$

اذن الحلول هي الثنائيات : $(x, y) = (59k; 34 - 16k)$ حيث k عدد صحيح

(3) تعيين الحلول (x, y) للمعادلة (1) التي تنتمي إلى $\mathbb{N}^{*2}$.

أي $x > 0$ و $y > 0$ ومنه $(59k > 0 \text{ و } 34 - 16k > 0)$ وهذا يعني : $(k > 0 \text{ و } 16k < 34)$

اذن $(k > 0 \text{ و } k < 2,12)$ أي ان قيم k هي 1 و 2

من اجل $k = 1$ نجد $(x, y) = (59; 18)$ و من اجل $k = 2$ نجد $(x, y) = (118; 2)$

(4) تعيين a و b التي تحقق $16m + 59d = 2006$ حيث $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$

من المعادلة (1) $16x + 59y = 2006$ وبما ان a و b موجبين فان : $m = 59$ و $d = 18$

لكن 18 لا يقسم 59 وبالتالي هذا الحل مرفوض

والحل الاخر هو $(m, d) = (118; 2)$ ومن العلاقة $m \times d = a \times b$ نجد : $a \times b = 118 \times 2 = 236$

حيث $a = da' = 2a'$ و $b = db' = 2b'$ و a', b' اوليان فيما بينهما

وبالتعويض في $a \times b = 236$ نجد : $4a' \times b' = 236$ اي $a' \times b' = 59$ وبما ان 59 اولي فان

$$(a'; b') \in \{(1; 59), (59; 1)\} \text{ وبالتالي قيم } a \text{ و } b \text{ هي } (a; b) \in \{(2; 118), (118; 2)\}$$

التمرين (22)

- (1) (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^{3n} على 31 .
 (ب) استنتج باقي قسمة كل من العددين 5^{3n+1} و 5^{3n+2} على 31
 (2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(5^{3n+2} + 6^{6n+2} + 36^{3n+1})$ على 31
 (3) عين قيم العدد الصحيح x التي يكون من اجلها $(5^{3n+2} + x + 36^{3n+1})$ يقبل القسمة على 31
 (4) عين قيم العدد الصحيح m التي يكون من اجلها $(5^{3m} + 36^{3m+1} + m^2) \equiv 3[31]$
 (5) n عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 3
 (أ) ماهي القيم الممكنة للعدد n
 (ب) اثبت ان : $(5^{2n} + 5^n + 1) \equiv 0[31]$

حل التمرين (22)

- (1) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^{3n} على 31 :
 لدينا $5^{3n} = (5^3)^n = 125^n \equiv 1[31]$ و $125 = 4 \times 31 + 1$ ومنه $125 \equiv 1[31]$ ومنه $125^n \equiv 1[31]$
 اذن من اجل كل عدد طبيعي n : $5^{3n} \equiv 1[31]$
 (ب) استنتاج باقي قسمة كل من العددين 5^{3n+1} و 5^{3n+2} على 31 :
 $5^{3n+1} = 5^{3n} \times 5 \equiv 1 \times 5[31] = 5[31]$ ومنه $5^{3n+1} \equiv 5[31]$ وبالتالي $5^{3n+1} \equiv 5[31]$ اذن باقي القسمة هو 5
 و $5^{3n+2} = 5^{3n} \times 5^2 \equiv 1 \times 25[31] = 25[31]$ ومنه $5^{3n+2} \equiv 25[31]$ اذن باقي القسمة هو 25
 (2) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(5^{3n+2} + 6^{6n+2} + 36^{3n+1})$ على 31
 لدينا $5^{3n+2} \equiv 25[31]$ و $6^{6n+2} = 6^{2(3n+1)} = 36^{3n+1} \equiv 5[31]$ و $36 \equiv 5[31]$ ومنه $6^{6n+2} \equiv 5^{3n+1}[31] \equiv 5[31]$
 ومن السؤال السابق فان $6^{6n+2} \equiv 5[31]$
 و $36^{3n+1} \equiv 5^{3n+1}[31] \equiv 5[31]$ ومنه $36^{3n+1} \equiv 5[31]$
 اذن $(5^{3n+2} + 6^{6n+2} + 36^{3n+1}) \equiv 25 + 5 + 5[31] = 35[31] \equiv 4[31]$ ومنه باقي قسمة $(5^{3n+2} + 6^{6n+2} + 36^{3n+1})$ على 31 هو 4
 (3) تعيين قيم العدد الصحيح x التي يكون من اجلها $(5^{3n+2} + x + 36^{3n+1})$ يقبل القسمة على 31
 لدينا سابقا : $5^{3n+2} \equiv 25[31]$ و $36^{3n+1} \equiv 5[31]$ ومنه $(5^{3n+2} + x + 36^{3n+1}) \equiv 25 + 5 + x[31] = 30 + x[31]$
 اذن يكون $(5^{3n+2} + x + 36^{3n+1})$ يقبل القسمة على 31 اذا كان $(30 + x) \equiv 0[31]$
 اي $30 + x \equiv 0[31]$ اي $x \equiv 1[31]$ ومنه قيم x هي : $x = 31k + 1$ حيث k عدد صحيح
 (4) تعيين قيم m التي يكون من اجلها $(5^{3m} + 36^{3m+1} + m^2) \equiv 3[31]$
 نعلم ان $5^{3m} \equiv 1[31]$ و $36^{3m+1} \equiv 5[31]$
 وبالتالي : $(5^{3m} + 36^{3m+1} + m^2) \equiv 3[31]$ تعني : $(1 + 5 + m^2) \equiv 3[31]$ اي $m^2 + 3 \equiv 0[31]$

ومنه $m^2 - 4 \times 31 + 3 \equiv 0[31]$ اي ان $m^2 - 121 \equiv 0[31]$ اي $(m-11)(m+11) \equiv 0[31]$

اذن $(m+11) \equiv 0[31]$ او $(m-11) \equiv 0[31]$ وبالتالي : $m \equiv 11[31]$ او $m \equiv -11[31]$

وبالتالي قيم m هي : $m = 31k + 11$ او $m = 31k + 20$ حيث k عدد صحيح

(5) n عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 3

(أ) بما ان n لا يقبل القسمة على 3 فان القيم الممكنة للعدد n هي : $n = 3\alpha + 1$ او $n = 3\alpha + 2$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$

(ب) اثبات ان $(5^{2n} + 5^n + 1) \equiv 0[31]$:

من اجل $n = 3\alpha + 1$ فان $5^{2(n)} + 5^n + 1 = 5^{2(3\alpha+1)} + 5^{(3\alpha+1)} + 1 = 5^{6\alpha+2} + 5^{3\alpha+1} + 1$

$(5^{2n} + 5^n + 1) \equiv 0[31]$ اذن $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 25 + 5 + 1[31]$ ومنه $5^{3\alpha+1} \equiv 5[31]$ و $(5^{3\alpha+1})^2 \equiv 5^2[31]$

من اجل $n = 3\alpha + 2$ فان : $5^{2n} + 5^n + 1 = 5^{2(3\alpha+2)} + 5^{(3\alpha+2)} + 1 = (5^{(3\alpha+2)})^2 + 5^{(3\alpha+2)} + 1$

ومنه $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]$ اذن $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 25^2 + 25 + 1[31] \equiv 651[31] \equiv 0[31]$

التمرين (23) :

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بحددهما الاول : $u_0 = 3$ و $v_0 = 1$ ومن اجل كل n :

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 \quad \text{و} \quad v_{n+1} = 2v_n + 3$$

(1) (أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل طبيعي فان : $u_n = 2^{n+1} + 1$

(ب) هل العددين u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما ؟

(2) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5

(ب) استنتج باقي قسمة العدد 2017^{1438} على 5

(3) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $2u_n - v_n = 5$ ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n

(4) (أ) عين القيم الممكنة للعدد : $PGCD(u_n; v_n)$

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها $PGCD(u_n; v_n) = 5$

حل التمرين (23) :

$$(1) \quad u_{n+1} = 2u_n - 1 \quad \text{و} \quad v_{n+1} = 2v_n + 3 \quad \text{و} \quad u_0 = 3 \quad \text{و} \quad v_0 = 1$$

(أ) البرهان بالتراجع ان : $u_n = 2^{n+1} + 1$:

لدينا $u_0 = 2^1 + 1 = 3$ ومنه الخاصية محققة من اجل $n = 0$

نفرض الخاصية صحيحة من اجل كل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي نفرض ان $u_n = 2^{n+1} + 1$

ونبرهن ان $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$

لدينا $u_{n+1} = 2u_n - 1$ و $u_n = 2^{n+1} + 1$ ومنه $u_{n+1} = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$

اذن $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

(ب) تبين ان كان العددين u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما :

لدينا $u_{n+1} = 2u_n - 1$ أي $2u_n - u_{n+1} = 1$ وحسب مبرهنة بيزو فانه يوجد عددين صحيحان $(\alpha; \beta) = (2; -1)$

يحققان $\alpha u_n + \beta u_{n+1} = 1$ ومنه u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

(2) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5 :

$2^4 \equiv 1[5]$, $2^3 \equiv 3[5]$, $2^2 \equiv 4[5]$, $2^1 \equiv 2[5]$, $2^0 \equiv 1[5]$ و $2^4 \equiv 1[5]$ و منه : $2^{4k} \equiv 1[5]$ و $2^{4k+1} \equiv 2[5]$ و $2^{4k+2} \equiv 4[5]$ و $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ حيث k عدد صحيح

(ب) استنتج باقي قسمة العدد 2017^{1438} على 5 :

$2017 \equiv 2[5]$ و $1438 = 4 \times 359 + 2 = 4k + 2$ ومنه $2017^{1438} \equiv 2^{1438} \equiv 2^{4k+2} \equiv 4[5]$ ومنه باقي القسمة هو 4

(3) البرهن بالتراجع ان : $2u_n - v_n = 5$ مع $u_{n+1} = 2u_n - 1$ و $v_{n+1} = 2v_n + 3$

من اجل $n = 0$ نجد $2u_0 - v_0 = 2(3) - 1 = 5$ محققة اذن الخاصية صحيحة من اجل $n = 0$

نفرض صحة الخاصية من اجل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي نفرض ان $2u_n - v_n = 5$ ونبرهن ان

$2u_{n+1} - v_{n+1} = 5$

$2u_{n+1} - v_{n+1} = 2(2u_n - 1) - (2v_n + 3) = 4u_n - 2v_n - 5 = 2(2u_n - v_n) - 5 = 2(5) - 5 = 5$

اذن الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n أي $2u_n - v_n = 5$

-استنتاج عبارة v_n بدلالة n : لدينا $2u_n - v_n = 5$ ومنه $v_n = 2u_n - 5$ و $u_n = 2^{n+1} + 1$

اذن : $v_n = 2(2^{n+1} + 1) - 5 = 2^{n+2} - 3$ ومنه عبارة v_n بدلالة n :

(4) (أ) تعيين القيم الممكنة للعدد : $PGCD(u_n; v_n)$: نضع $PGCD(u_n; v_n) = d$

لدينا $2u_n - v_n = 5$ و d يقسم u_n و v_n و منه d يقسم $2u_n - v_n$ وبالتالي d هو قاسم للعدد 5

أي ان القيم الممكنة للعدد $PGCD(u_n; v_n) = d$ هي 1 او 5 .

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها $PGCD(u_n; v_n) = 5$:

هذا يعني $u_n \equiv 0[5]$ و $v_n \equiv 0[5]$ أي ان $2^{n+1} + 1 \equiv 0[5]$ و $2^{n+2} - 3 \equiv 0[5]$

وهذا يعني ان $(2^{n+1} \equiv 4[5] \text{ و } 2^{n+2} \equiv 3[5])$

و لدينا من دراسة بواقي القسمة $2^{4k+2} \equiv 4[5]$ ومنه $2^{n+1} \equiv 4[5]$ يعني ان $n+1 = 4k+2$ $k \in \mathbb{N}$ اي

$n = 4k+1$ و بالتعويض في $2^{n+2} \equiv 3[5]$ نجد $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ وهذه محققة في دراسة البواقي

و منه من اجل كل عدد طبيعي n يكتب على الشكل $n = 4k+1$ و k عدد طبيعي يكون $PGCD(u_n; v_n) = 5$

التمرين (24)

- (1) (أ) عين حسب قيم العد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 7؛
- (ب) استنتج باقي قسمة 2^{1962} على 7
- (ج) استنتج باقي قسمة العدد $2016^{2017} + 2018^{2016}$ على 7
- (2) اثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $12 \times 2^{3n+1} + 10 \times 2^{12n} + 8 \equiv 0[7]$

$$(3) \text{ نعتبر } (u_n) \text{ متتالية هندسية متزايدة تماما حدودها موجبة والحد الأول } u_0 = 1 \text{ بحيث : } \begin{cases} u_2 + u_3 = 12 \\ u_2 \times u_3 = 32 \end{cases}$$

(أ) احسب كلا من u_2 ; u_3 ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ؛

(ب) اوجد باقي قسمة العدد $u_{n+1} - u_n$ على 7 من اجل $n = 2017$ ؛

(ج) اثبت ان : $PGCD(u_{n+1}; u_n) = 2^n$ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , ثم استنتج بطريقة أخرى قيمتي كلا من u_2 ; u_3 .

حالات تمرين (24)

(1) (أ) بواقي قسمة 2^n على 7 :

$$2^0 \equiv 1[7] ; 2^1 \equiv 2[7] ; 2^2 \equiv 4[7] ; 2^3 \equiv 1[7],$$

و منه من العلاقة $2^3 \equiv 1[7]$ وحسب خواص الموافقات لدينا :

$$(2^3)^p = 2^{3p} \equiv 1[7] \text{ من أجل كل عدد طبيعي } p .$$

لكن : $2 \equiv 2[7]$ و عليه : $2^{3p} \times 2 \equiv 1 \times 2[7]$ إذن : $2^{3p+1} \equiv 2[7]$

و كذلك : $2^2 \equiv 4[7]$ و عليه : $2^{3p} \times 2^2 \equiv 1 \times 4[7]$ إذن : $2^{3p+2} \equiv 4[7]$

و بالتالي لما $n = 3p$: $2^n \equiv 1[7]$ و لما $n = 3p + 1$: $2^n \equiv 2[7]$ و لما $n = 3p + 2$: $2^n \equiv 4[7]$

(ب) استنتاج باقي قسمة 2^{1962} على 7 :

$$\text{لدينا : } 1962 = 3 \times 654 \text{ و منه : } 1962 = 3p \text{ و منه : } 2^{1962} \equiv 1[7]$$

$$(ج) - \text{لدينا : } 2016 = 3 \times 672 = 3k \text{ و } 2017 = 3 \times 672 + 1 = 3k + 1$$

ولدينا أيضا $2018 \equiv 2[7]$ و $2016 \equiv 0[7]$ ومنه باستخدام خواص الموافقة نجد :

$$2016^{2017} + 2018^{2016} \equiv 0 + 2^{3k} [7] \text{ ان } 2016^{2017} + 2018^{2016} \equiv 1[7]$$

ومنه باقي قسمة العدد $2016^{2017} + 2018^{2016}$ على 7 هو 1

$$(2) - \text{إثبات أن : } 12 \times 2^{3n+1} + 10 \times 2^{12n} + 8 \equiv 0[7]$$

$$\text{لدينا : } 12 \equiv 5[7] \text{ و } 2^{3n+1} \equiv 2[7] \text{ و عليه : } 12 \times 2^{3n+1} \equiv 2 \times 5[7]$$

$$\text{ونعلم ان } 10 \equiv 3[7] \text{ إذن : } 12 \times 2^{3n+1} \equiv 3[7] \dots (1)$$

$$\text{و لدينا : } 2^{12n} = (2^{3n})^4 \text{ وبما أن : } 2^{3n} \equiv 1[7] \text{ فإن : } (2^{3n})^4 \equiv (1)^4 [7] \text{ أي : } 2^{12n} \equiv 1[7] \dots (2)$$

$$\text{و بالتالي من (1) و (2) نجد : } 12 \times 2^{3n+1} + 10 \times 2^{12n} + 8 \equiv 3 + 3 \times 1 + 8[7]$$

$$\text{إذن : } 12 \times 2^{3n+1} + 10 \times 2^{12n} + 8 \equiv 0[7] .$$

(3) - (أ) حساب الحدين u_2, u_3 : من الجملة $\begin{cases} u_2 + u_3 = 12 \\ u_2 \times u_3 = 32 \end{cases}$ نجد بتعويض $u_3 = 12 - u_2$ المعادلة التالية :

$$u_2^2 - 12u_2 + 32 = 0 \text{ مميزها } 16 \text{ ومنه الحلان: } u_2 = 4 \text{ او } u_2' = 8$$

ومنه $u_3 = 12 - 4 = 8$ او $u_3' = 12 - 8 = 4$ وبما ان المتتالية متزايدة فان $u_2 = 4$ و $u_3 = 8$

عبارة الحد العام u_n بدلالة n : تعيين الأساس : $u_3 = u_2 \times q$ ومنه $q = \frac{8}{4} = 2$

اذن عبارة الحد العام هي : $u_n = 2^n$

(ب) إيجاد باقي قسمة $u_{n+1} - u_n$ على 7 من أجل $n = 2017$:

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n (2 - 1) = 2^n \text{ نجد } u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n (2 - 1) = 2^n$$

من أجل $n = 2017$ يكون $2^n = 2^{2017} = 2^{3(672)+1} = 2^{3k+1}$ و $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ وبالتالي باقي قسمة $u_{n+1} - u_n$ على 7 هو 2

(ج) اثبات ان : $PGCD(u_{n+1}, u_n) = 2^n$ لدينا (u_n) متتالية هندسية واساسها 2 ومنه $u_{n+1} = 2 \times u_n$

وباستخدام خاصية $pgcd$. نجد. $pgcd(u_{n+1}, u_n) = pgcd(2u_n, u_n) = u_n \times pgcd(2, 1) = u_n = 2^n$

- إستنتاج بطريقة أخرى قيمتي كلا من u_2, u_3 :

من اجل $n = 2$ نكتب $pgcd(u_3, u_2) = 2^2 = 4$ ولدينا $u_2 + u_3 = 12$ ومنه يوجد عدنان α و β

اوليان فيما بينهما حيث $4\alpha + 4\beta = 12$ أي $\alpha + \beta = 3$ وبالتالي $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ لان المتتالية متزايدة

اذن $u_2 = 4\alpha = 4$ و $u_3 = 4\beta = 8$

التمرين (25) :

(1) نعتبر في مجموعة الاعداد الصحيحة المعادلة : $3x - 7y = 14 \dots (1)$

(أ) بين ان الثنائية $(7, 1)$ حلا للمعادلة (1) .

(ب) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (1) .

(ج) ما هي القيم الممكنة لـ (x, y) حتى يكون y قاسما لـ x ؟

(2) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7 .

(ب) ما هو باقي قسمة العدد $3 \times 4^{2010} - 2 \times 4^{1945}$ على 7 ؟ .

(3) ليكن العدد الطبيعي A_n حيث : $A_n = 4^n - n + 1$.

(أ) عين قيم n حتى يقبل A_n القسمة على 7 .

(ب) استنتج باقي قسمة $A_{2010} - A_{2009}$ على 7 .

حل التمرين (25) :

(1) (أ) تبين ان الثنائية (7,1) حل للمعادلة (1) $3x - 7y = 14$...

$$3(7) - 7(1) = 21 - 7 = 14 \text{ واضح}$$

(ب) تعيين (x,y) حلول المعادلة : ادينا $\begin{cases} 3x - 7y = 14 \\ 3(7) - 7(1) = 14 \end{cases}$ بالطرح نجد : $3(x-7) = 7(y-1)$

7 يقسم $3(x-7)$ وبما ان 7 اولي مع 3 فانه حسب مبرهنة غوص 7 يقسم $(x-7)$ أي ان $x-7 = 7k$ ومنه $x = 7 + 7k$ حيث k عدد صحيح

وبالتعويض في $3(x-7) = 7(y-1)$ نجد $y-1 = 3k$ أي $y = 1 + 3k$

اذن حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x,y) = (7k+7, 3k+1)$

(ج) القيم الممكنة لـ (x,y) حتى يكون y قاسما لـ x : هذا يعني x يقبل القسمة على y أي $x \equiv 0[y]$

وهذا يكافئ $7k+7 \equiv 0[3k+1]$ وبما ان $y \equiv 0[y]$ نجد الجملة التالية : $\begin{cases} 7k+7 \equiv 0[3k+1] \\ 3k+1 \equiv 0[3k+1] \end{cases}$

ومنه نجد $\begin{cases} 3(7k+7) \equiv 0[3k+1] \\ 7(3k+1) \equiv 0[3k+1] \end{cases}$ وبالطرح نحصل على : $14 \equiv 0[3k+1]$ اي 14 يقبل القسمة على

$3k+1$ اي ان $3k+1 \in D_{14} = \{-1; -2; -7; -14; 1; 2; 7; 14\}$ ومنه نحصل على النتائج التالية في هذا الجدول

$3k+1$	1	-1	2	-2	7	-7	14	-14
k	0			-1	2			-5
(x,y)	(7;1)			(0;-2)	(21;7)			(-28;-14)

(2) (أ) باقي قسمة العدد 4^n على 7 :

$$4^3 \equiv 1[7], 4^2 \equiv 2[7], 4^1 \equiv 4[7], 4^0 \equiv 1[7]$$

ومنه من اجل كل عدد طبيعي k : $4^{3k} \equiv 1[7]$ و $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ و $4^{3k+2} \equiv 2[7]$

(ب) تعيين باقي قسمة العدد $3 \times 4^{2010} - 2 \times 4^{1945}$ على 7 :

لدينا $2010 = 3 \times 670 = 3k$ و $1945 = 3 \times 648 + 1 = 3m + 1$

ومما سبق ينتج : $[7] \equiv 3 \times 4^{3k} - 2 \times 4^{3m+1}$

اذن $3 \times 4^{2010} - 2 \times 4^{1945} \equiv 2[7]$

ومنه باقي قسمة العدد $3 \times 4^{2010} - 2 \times 4^{1945}$ على 7 هو 2

(3) (أ) تعيين قيم n حتى يقبل A_n القسمة على 7 : اي $A_n = 4^n - n + 1 \equiv 0[7]$

$$4^n - n + 1 \equiv 0[7]$$

- اذا كان $n = 3k$ فان $4^{3k} - (3k) + 1 \equiv 0[7]$ تعني $3k \equiv 2[7]$ ومنه $15k \equiv 10[7]$ وبالتالي $k \equiv 3[7]$

اذن $k = 7\alpha + 3$ وبالتالي : $n = 3(7\alpha + 3) = 21\alpha + 9$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$

- اذا كان $n = 3k + 1$ فان $4^{3k+1} - (3k+1) + 1 \equiv 0[7]$ تعني $3k \equiv 4[7]$ ومنه $15k \equiv 20[7]$ اذن $k \equiv 6[7]$ ومنه $k = 7\alpha + 6$ وبالتالي : $n = 3(7\alpha + 6) + 1 = 21\alpha + 19$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$

- اذا كان $n = 3k + 2$ فان $4^{3k+2} - (3k+2) + 1 \equiv 0[7]$ تعني $3k \equiv 1[7]$ ومنه $15k \equiv 5[7]$ اذن $k \equiv 5[7]$ ومنه $k = 7\alpha + 5$ وبالتالي : $n = 3(7\alpha + 5) + 2 = 21\alpha + 17$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$

(ب) استنتاج باقي قسمة $A_{2010} - A_{2009}$ على 7 :

$$\text{لدينا } 2010 = 21 \times 95 + 5 = 21p + 5 \text{ و } 2009 = 21 \times 95 + 4 = 21p + 4$$

$$\text{ومنه } A_{2010} \equiv 5[7] \text{ و } A_{2009} \equiv 4[7] \text{ اذن } A_{2010} - A_{2009} \equiv 5 - 4[7] \text{ اي } A_{2010} - A_{2009} \equiv 1[7]$$

اذن باقي قسمة $A_{2010} - A_{2009}$ على 7 هو 1

التمرين (26)

(1) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : (1) $3x - 2y = 1$...

(2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم

(أ) بين ان الثنائية $(14n+3; 21n+4)$ حل للمعادلة (1)

(ب) استنتج ان العددين $21n+4$ و $14n+3$ اوليان فيما بينهما

(3) ليكن d هو القاسم المشترك الاكبر للعددين $21n+4$ و $2n+1$

(أ) عين القيم الممكنة للعدد d

(ب) بين انه اذا كان $d = 13$ فان $n \equiv 6[13]$

(4) من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ نضع : $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

(أ) بين ان العددين A و B يقبلان في $\mathbb{Z}$ القسمة على $n-1$

(ب) عين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B

حل التمرين (26):

(1) حل المعادلة $3x - 2y = 1$: واضح ان الثنائية $(1,1)$ حل لها ومنه ينتج :

$$\text{وبالطرح نجد : } \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(x-1) - 2(y-1) = 1 \end{cases}$$

ويما ان 2 لا يقسم العدد 3 فانه حسب غوص 2 يقسم $(x-1)$ ومنه $(x-1) = 2k$ وبالتالي : $x = 2k + 1$

ونعوض في $3(x-1) = 2(y-1)$ نجد $y = 3k + 1$

(2) (أ) تبيان ان $(14n+3; 21n+4)$ حل للمعادلة (1) :

$$\text{نعوض نجد } 3x - 2y = 3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$$

(ب) استنتاج ان العددين $21n+4$ و $14n+3$ اوليان فيما بينهما :

بما ان $(14n+3; 21n+4)$ حل للمعادلة فان $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$ اي انه يوجد عددان $u = 3$

و $v = -2$ صحيحان يحققان $u(14n+3) + v(21n+4) = 1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو العددان $21n+4$

و $14n+3$ اوليان فيما بينهما

$$(3) \quad d = PGCD(21n+4; 2n+1) \text{ حيث } d \text{ تعين القيم الممكنة للعدد } d$$

هذا يعني ($d/21n+4$ و $d/2n+1$) ومنه $d/(21(2n+1)-2(21n+4))$ اي ان $d/13$ وبالتالي القيم الممكنة للعدد d هي 1 او 13

(ب) تبين انه اذا كان $d=13$ فان $n \equiv 6[13]$:

$$d=13 \text{ تعني } \begin{cases} 21n+4 \equiv 0[13] \\ 2n+1 \equiv 0[13] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 8n+4 \equiv 0[13] \\ 2n \equiv 12[13] \end{cases} \text{ ومنه نجد أيضا } \begin{cases} 8n \equiv 9[13] \\ 2n \equiv 12[13] \end{cases}$$

$$\text{ومنه } \begin{cases} 8n \equiv 9+3(13)[13] \\ 2n \equiv 12[13] \end{cases} \text{ اي } \begin{cases} 8n \equiv 48[13] \\ 2n \equiv 12[13] \end{cases} \text{ اذن نستنتج } n \equiv 6[13]$$

$$(4) \quad A = 21n^2 - 17n - 4 \text{ و } B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 \text{ حيث } n \geq 2$$

(أ) تبين ان A و B يقبلان القسمة على $n-1$:

$$A = 21n^2 - 17n - 4 = (n-1)(21n+4) \text{ نجد : على } n-1$$

$$\text{و بقسمة } B \text{ على } n-1 \text{ نجد : } B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 = (n-1)(28n^2 + 20n + 3)$$

وهذا يعني A و B يقبلان القسمة على $n-1$

(ب) تعيين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B :

$$PGCD(A; B) = PGCD((n-1)(21n+4); (n-1)(28n^2 + 20n + 3)) \text{ ومنه من خواص القاسم}$$

$$\text{المشترك الاكبر نجد : } PGCD(A; B) = (n-1) \times PGCD((21n+4); (28n^2 + 20n + 3)) \text{ ومنه}$$

$$PGCD(A; B) = (n-1) \times PGCD((21n+4); (14n+3)(2n+1))$$

وبما ان العددين $21n+4$ و $14n+3$ اوليان فيما بينهما حسب السؤال (2) (ب) فاننا نستنتج ان :

$$PGCD(A; B) = (n-1) \times PGCD((21n+4); (2n+1))$$

ومن السؤال (3) (أ) وجدنا ان القيم الممكنة لـ $PGCD(21n+4; 2n+1)$ هي 1 او 13 ومنه نستنتج ان :

$$PGCD(A; B) = (n-1) \times 13 \text{ اذا كان } n \equiv 6[13] \text{ أي } n = 13k + 6$$

$$\text{و } PGCD(A; B) = (n-1) \text{ اذا كان } n \neq 13k + 6$$

التمرين (27)

نعتبر المتتالية (u_n) التي حدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n + 4n - 4$

(1) هل المتتالية حسابية ؟ هل هي هندسية ؟ برر اجابتك

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$

(أ) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

(ب) أكتب v_n ثم u_n بدلالة n

(ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- (3) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 13
 (ب) استنتج باقي قسمة العدد S_{2016} على 13
 (ج) عين باقي قسمة العدد $2018^{1438} + 2016^{1437} + 2015^{1436} + 2014^{1435}$ على 13

حل التمرين (27)

$$u_{n+1} = 3u_n + 4n - 4$$

(1) تكون المتتالية (u_n) حسابية اذا تحقق $u_{n+1} - u_n = r$

لكن $u_{n+1} - u_n = 3u_n + 4n - 4 - u_n = 2u_n + 4n - 4$ ليس ثابت وبالتالي ليست حسابية

و $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3u_n + 4n - 4}{u_n} = 3 + \frac{4n - 4}{u_n}$ وهو متعلق بالعدد n وبالتالي ليست هندسية

$$(2) \quad v_n = u_n + \alpha n + \beta \quad \text{و} \quad 3u_n + 4n - 4$$

(أ) تعيين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية :

$$v_{n+1} = 3u_n + 4n - 4 + \alpha n + \alpha + \beta \quad \text{ومنه} \quad v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3u_n + 4n - 4 + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$\text{ولدينا} \quad u_n = v_n - \alpha n - \beta \quad \text{ومنه}$$

$$v_{n+1} = 3(v_n - \alpha n - \beta) + 4n - 4 + \alpha n + \alpha + \beta = 3v_n + (4 - 2\alpha)n + (\alpha - 2\beta - 4)$$

وبالتالي تكون (v_n) هندسية اذا كان $(4 - 2\alpha)n + (\alpha - 2\beta - 4) = 0$ من اجل كل n

$$\text{أي اذا كان} \quad (4 - 2\alpha) = 0 \quad \text{و} \quad (\alpha - 2\beta - 4) = 0 \quad \text{ومنه نجد} \quad \boxed{\alpha = 2} \quad \text{و} \quad \boxed{\beta = -1}$$

اذن من اجل القيم $\alpha = 2$ و $\beta = -1$ تكون (v_n) هندسية اساسها 3 وحدها الاول : $v_0 = u_0 + 2(0) + (-1) = 1$

(ب) كتابة u_n و v_n بدلالة n :

$$u_n = 3^n - 2n + 1 \quad \text{ومنه} \quad u_n = v_n - \alpha n - \beta \quad \text{و} \quad v_n = v_0 \times q^n = 3^n$$

(ج) حساب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\text{ومنه} \quad S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (3^0 - 2(0) + 1) + (3^1 - 2(1) + 1) + \dots + (3^n - 2n + 1)$$

$$\text{ومنه} \quad S_n = (3^0 + 3^1 + \dots + 3^n) - 2(0 + 1 + \dots + n) + \dots + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n+1}$$

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} - n^2 + 1 \quad \text{أي} \quad S_n = 1 \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} - 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

(3) (أ) دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 13 :

$$3^0 \equiv 1[13] \quad \text{و} \quad 3^1 \equiv 3[13] \quad \text{و} \quad 3^2 \equiv 9[13] \quad \text{و} \quad 3^3 \equiv 1[13] \quad \text{بواقي القسمة هي متتالية دورية ودورها 3}$$

$$\text{من اجل كل عدد طبيعي } k : 3^{3k} \equiv 1[13] \quad \text{و} \quad 3^{3k+1} \equiv 3[13] \quad \text{و} \quad 3^{3k+2} \equiv 9[13]$$

(ب) استنتاج باقي قسمة العدد S_{2016} على 13 :

لدينا $S_{2016} = \frac{3^{2017}-1}{2} - (2016)^2 + 1$ ولدينا $2016 \equiv 1[13]$ ومنه $2016^2 \equiv 1[13]$
و $2017 = 3(672) + 1 = 3m + 1$ وبالتالي $3^{2017} \equiv 3^{3m+1} [13] \equiv 3[13]$ ومنه $3^{2017} - 1 \equiv 2[13]$
اذن $\frac{3^{2017}-1}{2} \equiv 1[13]$ وبالتالي : $S_{2016} \equiv 1 - 1 + 1[13] \equiv 1[13]$ اذن الباقي هو 1
(ج) تعيين باقي قسمة العدد $2014^{1435} + 2015^{1436} + 2016^{1437} + 2018^{1438}$ على 13
لدينا $2014 \equiv -1[13]$ و $2015 \equiv 0[13]$ و منه $2014^{1435} \equiv -1[13]$ و $2015^{1436} \equiv 0[13]$
و $2016 \equiv 1[13]$ و منه $2016^{1437} \equiv 1[13]$
و $2018 \equiv 3[13]$ و $2018^{1438} \equiv 3^{1438} [13] \equiv 3[13]$ ومنه $2014^{1435} + 2015^{1436} + 2016^{1437} + 2018^{1438} \equiv -1 + 0 + 1 + 3[13] \equiv 3[13]$
ومنه بالجمع نجد : $2014^{1435} + 2015^{1436} + 2016^{1437} + 2018^{1438} \equiv -1 + 0 + 1 + 3[13] \equiv 3[13]$ اذن الباقي هو 3

التمرين (28)

- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : (x+1)^2 = 9 + 5y$.
- (1) بين انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فان $x \equiv 1[5]$ او $x \equiv 2[5]$.
 - (2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .
 - (3) بين انه ، اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $PGCD(x; y)$ يقسم 8.
 - (4) حل في $\mathbb{Z}^2$ الجملة : $\begin{cases} \overline{121}^x = \overline{59}^y \\ PGCD(x; y) = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$.

حل التمرين (28)

- (1) تبين ان $x \equiv 1[5]$ او $x \equiv 2[5]$ حيث $(x+1)^2 = 9 + 5y$
معناه $(x+1)^2 \equiv 9[5]$ أي $(x+1)^2 \equiv 4[5]$
نعلم ان كل عدد صحيح يكتب على الشكل : $5k$ او $5k+1$ او $5k+2$ او $5k+3$ او $5k+4$

$x \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$x+1 \equiv$	1	2	3	4	0	$[5]$
$(x+1)^2 \equiv$	1	4	4	1	0	$[5]$

(1) تبين ان $x \equiv 1[5]$ او $x \equiv 2[5]$ حيث $(x+1)^2 = 9 + 5y$
معناه $(x+1)^2 \equiv 9[5]$ أي $(x+1)^2 \equiv 4[5]$

(2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

اذا كان $x \equiv 1[5]$ أي $x = 5k + 1$ لدينا $(5k+1+1)^2 = 9 + 5y$ ومنه $25k^2 + 20k + 4 = 9 + 5y$

يكافئ $5y = 25k^2 + 20k - 5$ أي $y = 5k^2 + 4k - 1$ و عليه $(x; y) \in (5k+1, 5k^2 + 4k - 1)$
 إذا كان $x \equiv 2[5]$ أي $x = 5k + 2$ لدينا $(5k+2+1)^2 = 9 + 5y$ ومنه $25k^2 + 30k + 9 = 9 + 5y$
 يكافئ $5y = 25k^2 + 30k$ أي $y = 5k^2 + 6k$ و عليه $(x; y) \in (5k+2, 5k^2 + 6k)$.
 (3) تبيان انه اذا كانت $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $PGCD(x; y)$ يقسم 8 .
 لدينا $(x+1)^2 = 9 + 5y$ تكافئ $x^2 + 2x + 1 = 9 + 5y$ ومنه $x^2 + 2x - 5y = 8$ أي $x(x+2) - 5y = 8$
 نسمي $PGCD(x; y) = d$, ومنه d يقسم x ويقسم y وبالتالي يقسم $x(x+2)$ و يقسم $5y$
 ومنه نستنتج ان d يقسم $x(x+2) - 5y = 8$ اذن d يقسم 8

$$(4) \text{ حل في } \mathbb{N}^2 \text{ الجملة : } \begin{cases} \overline{121}^x = \overline{59}^y \\ PGCD(x; y) = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases} (1)$$

$$(1) \text{ تكافئ } \begin{cases} 1 + 2x + x^2 = 9 + 5y \\ PGCD(x; y) = 8 \\ x = 5k + 1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 1 \times x^0 + 2x + 1 \times x^2 = 9 \times y^0 + 5y \\ PGCD(x; y) = 8 \\ x = 5k + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5k + 1 \\ y = 5k^2 + 4k - 1 \end{cases} \text{ و عليه } \begin{cases} (x+1)^2 = 9 + 5y \dots (E) \\ PGCD(x; y) = 8 \\ x = 5k + 1 \end{cases}$$

$PGCD(x; y) = 8$ يعني $(x \equiv 0[8] \text{ و } y \equiv 0[8])$ ومنه $5k+1 \equiv 0[8]$ اي $5k \equiv -1[8]$ و معناه

$$25k \equiv -5[8] \text{ اذن } 24k + k \equiv 3[8] \text{ أي } k \equiv 3[8] \text{ ومنه } k = 8\alpha + 3 \text{ مع } \alpha \in \mathbb{N}$$

$$\text{و بالتالي } \begin{cases} x = 5(8\alpha + 3) + 1 \\ y = 5(8\alpha + 3)^2 + 4(8\alpha + 3) - 1 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 40\alpha + 16 \\ y = 320\alpha^2 + 272\alpha + 56 \end{cases} \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N} .$$

التمرين (29)

- (I) (1) - ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .
- (2) - استنتج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10 .
- (3) - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10.
- (4) - جد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث : $13^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$.
- (II) (1) - حل المعادلة التفاضلية التالية : $y' = (\ln 3)y$
- (2) - نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0) = 1$ بين أن $f(x) = 3^x$
- (3) ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- (4) ماهو رقم احاد العدد $f(1432) + f(2011)$

(5) نعتبر المجموع $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ ، حيث S_n احسب S_n ، ثم جد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2Sn$ يقبل القسمة على 10
حل التمرين (29) :

(I) (1) - دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .
لدينا $3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$ ، $3^2 \equiv 9[10]$ ، $3^3 \equiv -1[10]$ ومنه $3^4 \equiv 1[10]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k : $3^{4k} \equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ ، $3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 3^n على 10	1	3	9	7

(2) - استنتاج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10 :
لدينا $2015 = 4 \times 503 + 3$ إذن $3^{2015} \equiv 7[10]$.
(3) - تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10 .
لدينا $7 \equiv -3[10]$ ومنه $7^{4n+1} \equiv (-3)^{4n+1} \equiv -3[10]$ أي $7^{4n+1} \equiv -3[10]$ وعليه $7^{4n+1} \equiv -3[10]$ ولدينا $2011 \equiv 1[10]$ ومنه $2011^n \equiv 1^n[10]$ أي $2011^n \equiv 1[10]$ ولدينا $2009 \equiv -1[10]$ ومنه $2009^{2n} \equiv (-1)^{2n} \equiv 1[10]$ أي $2009^{2n} \equiv 1[10]$ إذن $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1 \equiv -3 + 1 + 1 + 1 \equiv 0[10]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10 .

(4) - إيجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث : $13^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$.
لدينا $13^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$ معناه $3^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$ ومنه $3 + 3n \equiv 0[10]$ أي $3(1+n) \equiv 0[10]$ ولدينا العددان 3 و 10 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص $1+n \equiv 0[10]$ يكافئ $n \equiv -1[10]$ أي $n \equiv 9[10]$ وعليه $n = 10k + 9$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

(II) (1) - حل المعادلة التفاضلية التالية : (1) $y' = (\ln 3)y$
المعادلة (1) من الشكل $y' = ay$ حلولها هي دوال من الشكل $x \mapsto ce^{ax}$ ومنه $y = ce^{x \ln 3}$ أي $y = c \times 3^x$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

(2) - نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0) = 1$
تبيان أن : $f(x) = 3^x$: $f(x) = c \times 3^x$ مع $f(0) = 1$
معناه $f(0) = 1$ معناه $c \times 3^0 = 1$ ومنه $c = 1$ وعليه $f(x) = 3^x$.

(3) دراسة تغيرات الدالة f
لدينا $f(x) = 3^x = e^{x \ln 3}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln 3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = (\ln 3)e^{x \ln 3}$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

جدول تغيرات الدالة f :

(4) رقم احاد العدد $f(1432) + f(2011)$:

لدينا $3^{1432} \equiv 1[10]$ إذن $1432 = 3 \times 358$ و $f(1432) + f(2011) = 3^{1432} + 3^{2011}$

و $3^{2011} \equiv 7[10]$ إذن $2011 = 3 \times 502 + 3$

وعليه $[10] 7 + 1 \equiv 3^{2011} + 3^{1432} \equiv 8[10]$ أي

وبالتالي رقم احاد العدد $f(1432) + f(2011)$ هو 8 .

(5) نعتبر المجموع S_n ، حيث $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$

-حساب S_n : $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^n$

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 .

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \quad \text{اذن}$$

- إيجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10

$2S_n \equiv 0[10]$ تعني $3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$ وتكافئ $3^{n+1} \equiv 1[10]$ ومنه $n+1 = 4k$ أي $n = 4k - 1$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

التمرين (30):

من أجل كل عدد صحيح n نضع: $A(n) = n^2 - n + 2007$

(1) (أ) حل إلى جداء عوامل أولية العددين 4014 و $A(1)$

(ب) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و $A(1)$

(2) بين أنه إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$. هل العكس صحيح؟ برر إجابتك .

(3) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n : $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n$

(ب) بين أنه إذا كان $A(n)$ عددا فرديا فإن $A(n+1)$ عدد فردي .

(4) عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$ يقسم $A(1)$

حل التمرين (30):

لدينا $A(n) = n^2 - n + 2007$

(1) (أ) التحليل إلى جداء عوامل أولية :

$$A(1) = 2007 = 3^2 \times 223 \quad 4014 = 2A(1) = 2 \times 3^2 \times 223$$

(ب) تعيين: $PGCD(4014; A(1))$:

$$PGCD(A(1); 4014) = PGCD(A(1); 2 \times A(1)) = A(1)$$

(2) إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم n^2 وكذلك 3 يقسم $-n$ ونعلم أيضا ان $2007 = 3 \times 669$

وبالتالي 3 يقسم $A(n)$. وبالتالي إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$

هل العكس صحيح؟

- العكس غير صحيح و التبرير: $A(4) = 4^2 - 4 + 2007 = 2019$

3 يقسم $A(n)$ من أجل $n = 4$ ($A(4) = 4^2 - 4 + 2007 = 2019 = 3 \times 673$) لكن 3 لا يقسم 4.

(3) (أ) التحقق من صحة العلاقة : بالحساب نجد :

$$(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n$$

(ب). نبين أنه إذا كان $A(n)$ عددا فرديا فإن $A(n+1)$ عدد فردي :

إذا كان $A(n)$ فرديا فإنه يوجد عدد صحيح k حيث: $A(n) = 2k + 1$

$$\text{ومنه: } A(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) + 2007 \text{ أي أن}$$

$$A(n+1) = A(n) + 2n = 2k + 1 + 2n = 2(k+n) + 1$$

نضع: $k' = k + n$ ومنه: $A(n+1) = 2k' + 1$ ، k' عدد صحيح وهذا يعني $A(n+1)$ فردي

إذن: إذا كان $A(n)$ عددا فرديا فإن $A(n+1)$ عدد فردي.

(4). تعيين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$ يقسم $A(1)$:

$A(n)$ يقسم $A(1)$ معناه $(n^2 - n + 2007)$ يقسم 2007 ،

مجموعة قواسم 2007 هي: $\{-2007; -669; -223; -9; -3; -1; 1; 3; 9; 223; 669; 2007\}$

$$(n^2 - n + 2007) \text{ يقسم } 2007 \text{ معناه } n^2 - n + 2007 = -1 \text{ أو } n^2 - n + 2007 = 1$$

$$\text{أو } n^2 - n + 2007 = 2007 \text{ أو } n^2 - n + 2007 = -2007 \text{ أو } n^2 - n + 2007 = 669$$

$$\text{أو } n^2 - n + 2007 = -669 \text{ أو } n^2 - n + 2007 = 9 \text{ أو } n^2 - n + 2007 = -9$$

$$\text{أو } n^2 - n + 2007 = 223 \text{ أو } n^2 - n + 2007 = -223$$

كل هذه المعادلات لا تقبل حلا الا المعادلة $n^2 - n + 2007 = 2007$ ومنه $n^2 - n = 0$ ان $n = 0$ او $n = 1$

التمرين (31)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الآتية : $(E) \quad 11x - 5y = 2$

(1) (أ) برهن أن إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.

(ب) * استنتج حلول المعادلة (E)

(2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضع $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$

(أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

(ب) عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a, b) = 2$

(ج) استنتج قيم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما

(3)(أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

(ب) استنتج رقم آحاد العدد 7^{2014} .

(ج) عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $7^{y-2x} \equiv 9[10]$.

حل التمرين (31)

(1) / (أ) إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.

لدينا (E) تكافئ $-5y \equiv 2[11]$ ومنه $6y \equiv 2[11]$

إذن $2 \times 6y \equiv 2 \times 2[11]$ ومنه $y \equiv 4[11]$

(ب) استنتاج حلول المعادلة (E)

مما سبق لدينا $y \equiv 4[11]$ ومنه $y = 11k + 4$ ، بالتعويض في المعادلة (E) نجد $x = 5k + 2$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = 11k + 4 \end{cases}$

(2) (أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

نفرض أن $PGCD(a, b) = d$ إذن d يقسم a و d يقسم b ومنه d يقسم $11a - 5b$

ومنه نستنتج أن d يقسم 2 إذن $d \in \{1; 2\}$

(ب) تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a, b) = 2$

لدينا $PGCD(a, b) = 2$ ومنه 2 يقسم a و 2 يقسم b ومنه 2 يقسم $b - 2a$ إذن 2 يقسم

$$(11n + 4) - 2(5n + 2)$$

أي 2 يقسم n ومنه قيم n المطلوبة هي $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (أي n عدد طبيعي زوجي)

(ج) استنتاج قيم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما

a و b أوليان فيما بينهما معناه $PGCD(a, b) = 1$

وهذا يكافئ $PGCD(a, b) \neq 2$ ومنه قيم n المطلوبة هي $n = 2\alpha + 1$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (أي عدد طبيعي فردي)

(3)(أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

$4k' + 3$	$4k' + 2$	$4k' + 1$	$4k'$	n
3	9	7	1	البواقي

(ب) استنتاج رقم آحاد العدد 7^{2014} .

رقم آحاد العدد 7^{2014} هو باقي قسمته على 10

لدينا $2014 = 4 \times 503 + 2$ ومنه 2014 يكتب على الشكل $4k' + 2$

إذن حسب الجواب السابق رقم آحاد العدد 7^{2014} هو 9

(ج) تعيين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) ونحقق: $7^{y-2x} \equiv 9[10]$

لدينا $7^{y-2x} = 7^{11k'+4-10k'-4} = 7^{k'} \equiv 9[10]$ ومنه $7^{y-2x} \equiv 9[10]$ تكافئ $7^{k'} \equiv 9[10]$

ومنه $k' = 4\lambda + 2$

ومنه الحلول هي: $(k \in \mathbb{Z})$: $\begin{cases} x = 5(4\lambda + 2) + 2 = 20\lambda + 12 \\ y = 11(4\lambda + 2) + 4 = 44\lambda + 26 \end{cases}$

التمرين (32) :

(1) (أ) عين عددين صحيحين u و v بحيث: $8u - 81v = 1$

(ب) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $8x - 81y = 65$

(ج) عين اصغر عدد طبيعي n بحيث: $\begin{cases} n \equiv 5[8] \\ n \equiv 70[81] \end{cases}$

(2) عين عددين طبيعيين a و b يحققان: $\begin{cases} 8a - 81b = 65 \\ PPCM(a; b) = 480 \end{cases}$

حل التمرين (32) :

(1) (أ) تعيين u و v بحيث: $8u - 81v = 1$

واضح ان الثنائية $(u; v) = (-10; -1)$ حل لها لان: $8(-10) - 81(-1) = 1$

(ب) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $8x - 81y = 65$

من السؤال (أ) نجد أن الثنائية: $(x_0; y_0) = (65(-10); 65(-1)) = (-650; -65)$ حل لها

لدينا ان: $\begin{cases} 8x - 81y = 65 \\ 8x_0 - 81y_0 = 65 \end{cases}$ ومنه $8(x - x_0) = 81(y - y_0)$

8 يقسم $81(y - y_0)$ وبما ان $8 \wedge 81 = 1$ (8 و 81 أولي مع 8) فان 8 يقسم $(y - y_0)$ ومنه $y - y_0 = 8k$

اذن $y = 8k + y_0$

وبالتعويض في المعادلة نجد: $8(x - x_0) = 81(8k)$ ومنه $x - x_0 = 81k \Rightarrow x = 81k + x_0$

$$\begin{cases} x = 81k + x_0 = 81k - 650 \\ y = 8k + y_0 = 8k - 65 \end{cases} \quad \text{اذن حلول المعادلة هي :}$$

$$\text{التحقق : } 8(81k - 650) - 81(8k - 65) = 65$$

(ج) تعيين اصغر عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} n \equiv 5[8] \\ n \equiv 70[81] \end{cases} \quad \text{تعني } \begin{cases} n = 5 + 8p \\ n = 70 + 81p' \end{cases} \quad \text{ومنه } 5 + 8p = 81p' + 70 \quad \text{أي ان } 8p - 81p' = 65 \quad \text{حلولاها هي حلول}$$

$$\text{المعادلة السابقة : } (p; p') = (81k - 650; 8k - 65)$$

$$n \equiv 5[8] : \text{ وبالتالي } n = 5 + 8 \left(\frac{81k - 650}{m} \right)$$

$$n = 70 + 81 \left(\frac{8k - 65}{k} \right) \quad \text{أي } n = 70 + 81p' \quad \text{اذن } n = 70 + 81(8k - 65) \Leftrightarrow n = 648k - 5195$$

$$\text{ومنه } n = 648k + 637 = 648k - 8(648) - 11 = 648k - 5195 \quad \text{اذن } n \equiv -11[648] \quad \text{أي } n \equiv 637[648] \quad \text{اذن}$$

$$n = 648k + 637$$

$$\text{وبما ان } n \in \mathbb{N} \quad \text{فان } 648k + 637 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{-637}{648} \quad \text{اذن } k = 0$$

$$\text{ومنه الحل هو : } S_{\mathbb{N}} = \{637\}$$

$$(2) \text{ تعيين عددين طبيعيين } a \text{ و } b \text{ يحققان : } \begin{cases} 8a - 81b = 65 \\ PPCM(a; b) = 480 \end{cases}$$

$$\text{ليكن } d = PGCD(a; b) \quad \text{ومنه } d \text{ يقسم } 8a \text{ ويقسم } 81b \text{ وبالتالي يقسم } 8a - 81b = 65$$

$$\text{اذن } d \text{ يقسم } 65 \quad \text{ومنه } d \in \{1; 5; 13; 65\} \quad \text{(العددان } a \text{ و } b \text{ غير اوليين فيما بينهما اذن } d \neq 1)$$

$$\text{ولدينا ايضا } d \text{ يقسم } PPCM(a; b) = 480 \quad \text{والعدد } 5 \text{ يقسم } 480 \text{ بينما } 13 \text{ و } 65 \text{ لا يقسمان } 480$$

$$\text{اذن } d = 5 \quad \text{و بالتالي } 5 \text{ يقسم } a \text{ و } b \quad \text{ومنه } a \equiv 0[5], \quad b \equiv 0[5] \quad \text{حيث:}$$

$$(a = 81k - 650; b = 8k - 65)$$

$$81k - 650 \equiv 0[5] \quad \text{أي } 81k \equiv 650[5] \quad \text{أي } k(16 \times 5 + 1) \equiv 0[5] \quad \text{اذن } k \equiv 0[5] \quad \text{اذن } 1k \equiv 16 \times 5[5] \equiv 0[5] \quad \text{ومنه}$$

$$k = 5\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\text{و } b \equiv 0[5] \quad \text{اذن } 8k - 65 \equiv 0[5] \quad \text{ومنه } 8k \equiv 65[5] \quad \text{وبالتالي } k \equiv 0[5] \quad \text{وتعني } k = 5\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\text{اذن الحلول هي } \alpha \in \mathbb{Z} \quad ; \quad (a; b) = (81(5\alpha) - 650; 8(5\alpha) - 65) \quad \text{وبما ان } (a; b) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{فان}$$

$$(a; b) = (81k - 650; 8k - 65) \quad \text{مع } 480 \geq 81(5\alpha) - 650 > 0 \quad \text{و } 480 \geq 8(5\alpha) - 65 > 0$$

$$480 + 65 \geq 8(5\alpha) > 65 \quad \text{و } 480 + 650 > 81(5\alpha) > 560$$

$$\frac{545}{40} \geq \alpha > \frac{65}{40} \quad \text{و } \frac{1130}{405} \geq \alpha > \frac{650}{405} \quad \text{مع } \alpha \in \mathbb{Z} \quad \text{ومنه } 2.7 > \alpha > 1.62 \quad \text{و } 13.62 > \alpha > 1.62$$

$$\text{اذن } \alpha = 2$$

$$\text{اذن قيم } a \text{ و } b \text{ هي } a = 81 \times 5 \times 2 - 650 = 160 \quad , \quad b = 8 \times 5 \times 2 - 65 = 15$$

$$\begin{cases} 8 \times (160) - 81 \times 15 = 65 \\ PPCM(160; 15) = 480 \end{cases} \quad \text{التحقق :}$$

التمرين (33) :

(1) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $(E): 2x + 3y = 5$

(2) في ما يأتي الأعمار تقدر بالسنوات

في 2009 كان سن الاب هو n ومحصور بين 50 و 55 . وله ولدان A و B سنهما على الترتيب a و b
 - نفرض أن : - في 2001 سن الاب كان ضعف سن الابن A
 - في 2006 كان سن الاب يفوق ثلاثة اضعاف سن الابن B ب 3 سنوات

(أ) بين ان الاعداد n و a و b تحقق العلاقة :

$$\begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases}$$

(ب) بين أن $(a; -b)$ هو حل للمعادلة (E)

(ج) استنتج الاعمار n و a و b للاب وولديه

حل التمرين (33) :

(1) واضح ان الثنائية $(1;1)$ حل للمعادلة $(E): 2x + 3y = 5$ اذن : $2(1) + 3(1) = 5$

$2x + 3y = 2(1) + 3(1)$ وبالتالي : $2(x-1) = 3(1-y)$

ومنه حسب مبرهنة غوص : 2 يقسم $3(1-y)$ وبما انه اولي مع 3 فانه يقسم $1-y$ أي $1-y = 3k$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(1+3k, 1-2k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

(2) (أ) n هو سن الاب في 2009 ومنه كان سنه في 2001 : $n-8$

وسن الابن A في 2001 كان $a-8$

وسن الابن B في 2006 هو $b-3$ وسن الاب $n-3$

اذن من المعطيات نجد : $n-8 = 2(a-8)$ و $n-3 = 3(b-3)+3$ اذن :

$$\begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases} \text{ وهو المطلوب}$$

(ب) الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة (E) حيث $n = 2a - 8$ و $n = 3b - 3$ أي $2a - 8 = 3b - 3$

ومنه $2a - 3b = 5$ أي $2a + 3(-b) = 5$ أي ان $(a; -b)$ حل للمعادلة (E)

(ج) من السؤال الأول وجدنا مجموعة الحلول اذن $a = x$ ومنه $a = 1 + 3k$

و $y = -b$ أي $b = -1 + 2k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي

$$n = 2a - 8 = 2(1 + 3k) - 8 = 6(k - 1) \text{ اذن } n = 6(k - 1) \text{ وهو عدد مضاعف لـ } 6$$

وبما ان سن الاب محصور بين 50 و 55 فان $50 < 6(k-1) < 55$ أي ان $50 + 6 < 6k < 55 + 6$

$10, 16 < k < 9, 33$ ومنه $k = 10$ وبالتالي سن الاب هو $n = 54$ وسن الابن A هو $a = 31$

وسن الابن B هو $b = 19$

التمرين (34)

- (1) (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7 .
 (ب) عين باقي قسمة كل من العددين 5^{2017} و 5^{1438} على 7
 (ج) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 6^{2n} على 7
 (د) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ يقبل القسمة على 7
 (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3)$ يقبل القسمة على 7 .
 (3) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n)$ يقبل القسمة على 7 .
 (4) n عدد طبيعي . نضع $\alpha_n = n^2 + n$ و $\beta_n = n + 2$
 (أ) تحقق ان : $n\beta_n - \alpha_n = n$
 (ب) اثبت ان $PGCD(\beta_n; \alpha_n) = PGCD(\beta_n; n)$
 (ج) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(\beta_n; \alpha_n)$

حل التمرين (34) :

- (1) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7 :
 $5^0 \equiv 1[7]$ و $5^1 \equiv 5[7]$ و $5^2 \equiv 4[7]$ و $5^3 \equiv 6[7]$ و $5^4 \equiv 2[7]$ و $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$
 نلاحظ ان بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية و دورها 6 ومنه باقي قسمة 5^n على 7 :
 لما $n = 6k$ الباقي هو 1 و لما $n = 6k + 1$ الباقي هو 5 و لما $n = 6k + 2$ هو 4
 و لما $n = 6k + 3$ هو 6 و لما $n = 6k + 4$ هو 2 و لما $n = 6k + 5$ هو 3 . حيث k عدد طبيعي .
 (ب) لدينا $1438 = 6(239) + 4$ هو من الشكل $n = 6k + 4$ اذن باقي قسمة 5^{1438} على 7 هو 2 .
 و لدينا $2017 = 6(336) + 1$ هو من الشكل $n = 6k + 1$ اذن باقي قسمة 5^{2017} على 7 هو 5 .
 (ج) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد 6^{2n} على 7:
 لدينا $6 \equiv -1[7]$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي n : $6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7]$ اذن $6^{2n} \equiv 1[7]$ ومنه باقي القسمة هو 1
 (د) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ يقبل القسمة على 7 :
 لدينا $6^{2n} \equiv 1[7]$ و $(5^n + 6^{2n} + 3) \equiv 0[7]$ يعني $5^n + 6^{2n} + 3 \equiv 0[7]$ تعني $5^n + 4 \equiv 0[7]$ ومنه $5^n \equiv 3[7]$
 اذن نجد $5^n + 1 + 3 \equiv 0[7]$ اي $5^n + 4 \equiv 0[7]$ ومنه $5^n \equiv 3[7]$ نجد (1)
 ومن السؤال (1) نجد $5^n \equiv 3[7]$ محققة من اجل $n = 6k + 5$ حيث k عدد طبيعي
 (2) اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n العدد $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3$ يقبل القسمة على 7 :
 لدينا $26 \equiv 5[7]$ بالرفع الى قوى $6n + 5$ نجد $26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7]$

و مما سبق نستنتج ان $5^{6n+5} \equiv 3[7]$ ومنه نجد (1)..... $26^{6n+5} \equiv 3[7]$.
 و لدينا $47 \equiv 5[7]$ بالرفع الى قوى نجد $47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2} [7]$ و مما سبق نستنتج ان $5^{6(2n)+2} \equiv 4[7]$ و منه
 $47^{12n+2} \equiv 4[7]$ بالضرب في 2 نجد $2 \times 47^{12n+2} \equiv 8[7]$ و $8 \equiv 1[7]$ اذن (2)..... $2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7]$ بجمع (1) و
 (2) نجد $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} \equiv 4[7]$ بإضافة 3 نجد $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 7[7]$ و $7 \equiv 0[7]$ ومنه
 $26^{6n+5} + 2 \times 27^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$ اذن $26^{6n+5} + 2 \times 27^{12n+2} + 3$ يقبل القسمة على 7 .
 (3) لدينا مما سبق $26^{6n+5} + 2 \times 27^{12n+2} \equiv 4[7]$ بإضافة $5n$ نجد $26^{6n+5} + 2 \times 27^{12n+2} + 5n \equiv 4 + 5n[7]$
 العدد $26^{6n+5} + 2 \times 27^{12n+2} + 5n$ قابلا للقسمة على 7 يعني ان $4 + 5n \equiv 0[7]$ أي ان $5n \equiv -3[7]$.
 يكافئ $5n \equiv 4[7]$ بالضرب في 3 نجد $15n \equiv 12[7]$ أي ان $n \equiv 5[7]$ (لان $15 \equiv 1[7]$ و $12 \equiv 5[7]$)
 ومنه قيم n المطلوبة هي $n = 7k + 5 : k \in \mathbb{Z}$.

$$(4) \text{ أ) التحقق ان : } n\beta_n - \alpha_n = n \text{ لدينا } \begin{cases} n\beta_n = n^2 + 2n \\ \alpha_n = n^2 + n \end{cases} \text{ بالطرح نجد } n\beta_n - \alpha_n = n$$

ب) اثبات ان : $PGCD(\beta_n; \alpha_n) = PGCD(\beta_n; n)$ نضع
 $PGCD(\beta_n; \alpha_n) = d$, $PGCD(\beta_n; n) = d'$ لدينا d قاسم α_n , β_n فهو قاسم للعدد
 $n\beta_n - \alpha_n$ و منه فهو قاسم للعدد n اذن d قاسم للعددين n و β_n ومنه d قاسم لـ d' (3).
 $PGCD(\beta_n; n) = d'$ يعني ان d' قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم للعدد $n(n+1)$ و منه d' قاسم للعدد
 α_n و منه d' قاسم للعددين n و β_n اذن d' قاسم للعدد d (4) .
 من (3) و (4) نجد ان $d = d'$ أي ان $PGCD(\beta_n; \alpha_n) = PGCD(\beta_n; n)$.
 ج) نضع $PGCD(\beta_n; \alpha_n) = d$ ومنه $PGCD(\beta_n; n) = d$ أي ان d قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم
 للعدد $\beta_n - n = n + 2 - n = 2$ ومنه القيم الممكنة للعدد $PGCD(\beta_n; \alpha_n)$ هي قواسم 2 أي 1 و 2 .

التمرين (35)

- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5x - 6y = 3$ (E) .
 (1) أ) اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: x مضاعف للعدد 3 .
 ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .
 ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$.
 د) حل الجملة (S) باستعمال خواص الموافقات
 (2) عين كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$.
 (3) a و b عدنان طبيعيان حيث : $a = 1\alpha 0\alpha 00$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \alpha\beta 0\alpha$ في النظام ذو الأساس 5
 - عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E) .

حل التمرين (35) :

- (1) أثبات انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف لـ 3 :
- اذا كانت $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $5x - 6y = 3$ تعني $5x = 6y + 3 = 3(y + 2)$ و منه حسب مبرهنة غوص $3/5x$ و 3 و 5 اوليان فيما بينهما اذن $3/x$ اي $x = 3k$ مضاعف لـ 3
- (ب) استنتاج حل خاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) :
- لدينا : $x_0 = 3k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ اذن (E) تكافئ : $(x_0; y_0)$ حل للمعادلة (E) معناه : $5x_0 - 6y_0 = 3$ اي $5(3k) - 6y_0 = 3$ أي : $5(k) - 2y_0 = 1$. ومنه $5(k) - 1 = 2y_0$ من اجل $k = 1$ مثلا نجد $y_0 = 2$ اذن $(x_0; y_0) = (3; 2)$ حل خاص للمعادلة
- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :
- لدينا : $\begin{cases} 5x - 6y = 3 \\ 5(3) - 6(2) = 3 \end{cases}$ و منه $5x - 6y = 5(3) - 6(2)$ اي : $5(x - 3) = 6(y - 2)$
- وهذه المعادلة تعني $5/6(x - 3)$ و منه حسب غوص لدينا 6 و 5 اوليان فيما بينهما اي $6/(x - 3)$
- و منه $x = 6k + 3$ بتعويض $x = 6k + 3$ في المعادلة نجد $y = 5k + 2$ و منه الحلول هي الثنائيات : $(6k + 3; 5k + 2); k \in \mathbb{Z}$
- (ج) استنتاج حلول الجملة (S) :
- (S) تكافئ : $\begin{cases} x = 6\alpha - 1 \\ x = 5\beta - 4 \end{cases}$ و منه $6\alpha - 1 = 5\beta - 4$ اي : $5\beta - 6\alpha = 3$ و حسب السؤال (1) ب . نجد ان حلولها هي حلول (E) اذن $(\alpha; \beta) = (6k + 3; 5k + 2); k \in \mathbb{Z}$ بتعويض قيمة α او β في $x = 6\alpha - 1$ نجد : $x = 30k + 11; k \in \mathbb{Z}$
- (د) حل الجملة (S) باستعمال خواص الموافقات :
- (S) تكافئ : $\begin{cases} 5x \equiv -5[30] \\ 6x \equiv -24[30] \end{cases}$ اذن بالطرح نجد : $6x - 5x \equiv -19[30]$ اي : $x \equiv -19[30]$ و منه $x \equiv 11[30]$
- اذن : $x = 30k + 11; k \in \mathbb{Z}$
- (2) تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث : $x^2 - y^2 \leq 56$ و $(x; y) = (6k + 3; 5k + 2)$ و $x^2 - y^2 \leq 56$ و منه : $(6k + 3)^2 - (5k + 2)^2 \leq 56$ تكافئ
- $11k^2 + 16k - 51 \leq 0$
- دراسة إشارة $11k^2 + 16k - 51$ نجد : $11k^2 + 16k - 51 \leq 0$ لما $k \in \left[-3; \frac{17}{11}\right]$ اي : $k \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$
- و منه الثنائيات $(x; y)$ هي : $(-15; -13); (-9; -8); (-3; -3); (3; 2); (9; 7)$
- (3) تعيين α و β حتى يكون $(a; b)$ حلا للمعادلة (E) :
- لدينا : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00^3}$ و منه : $0 \leq \alpha < 3$ و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha^5}$ و منه : $0 \leq \beta < 5$ و لدينا كذلك :
- $a = 3^2 \times \alpha + 3^4 \times \alpha + 3^5 = 90\alpha + 243$ و $b = 5^0 \times \alpha + 5^2 \times \beta + \alpha \times 5^3 = 126\alpha + 25\beta$
- $(a; b)$ حلا للمعادلة (E) يكافئ $5a - 6b = 3$ و منه : $5(90\alpha + 243) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3$

اي $-306\alpha - 150\beta = -1212$ ومنه نجد $51\alpha + 25\beta = 202$ وبما ان $0 \leq \alpha < 3$ فإن $\alpha = \{0; 1; 2\}$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة $51\alpha + 25\beta = 202$ ينتج : $\beta = \left\{ \frac{202}{25}; \frac{151}{25}; \frac{100}{25} = 4 \right\}$

اذن : $\alpha = 2$ و $\beta = 4$. α و β طبيعيين

التمرين (36)

(1) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) : $4x - 9y = 5$...

(أ) اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فان : $x \equiv 8[9]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

(ب) α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في النظام ذو الأساس x ويكتب $\overline{98}$ في النظام ذو الأساس y حيث $y \leq 15$ و $x \leq 35$

عين القيم الممكنة لـ x و y ثم اكتب α في النظام العشري

(2) (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9 .

(ب) عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (E) حيث يكون $2011^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$

(3) نعتبر العددين a و b حيث : $a = 9n + 8$ و $b = 4n + 3$ وليكن d قاسمهما المشترك الاكبر

(أ) عين القيم الممكنة لـ d (لاحظ ان الثنائية $(a; b)$ حل للمعادلة (E))

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d = 5$

(4) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $A = 9n^2 + 17n + 8$ و $B = 4n^2 + 7n + 3$

(أ) بين ان العدد $(n+1)$ يقسم كلا من العددين A و B

(ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B

حل التمرين (36)

$$(1) 4x - 9y = 5$$

(أ) اثبات ان $x \equiv 8[9]$:

$(x; y)$ حلا للمعادلة (E) معناه $4x - 9y = 5$ وتعني $4x = 9y + 5$ اي $4x \equiv 5[9]$ ومنه بالضرب بالعدد 7

نجد : $28x \equiv 35[9]$ اي $x + 27x \equiv 27 + 8[9]$ وبالتالي $x \equiv 8[9]$

- استنتج حلول المعادلة (E) :

لدينا $x \equiv 8[9]$ ومنه $x = 9k + 8$ حيث k عدد صحيح وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y = 4k + 3$

ومنه حلول المعادلة (E) هي $(x; y) = (9k + 8; 4k + 3)$ حيث k عدد صحيح

(ب) تعيين القيم الممكنة لـ x و y :

لدينا $\alpha = \overline{43}^x$ و $\alpha = \overline{98}^y$ ومنه $\alpha = 4x + 3$ و $\alpha = 9y + 8$ وبالتالي : $4x + 3 = 9y + 8$

اذن : $4x - 9y = 5$ ومنه $(x; y)$ هي حلول المعادلة (E)

وبما ان α يكتب $\overline{43}$ في النظام ذو الأساس x فان $x \geq 5$ و $x \leq 35$ اذن $5 \leq x \leq 35$

ويكتب $\overline{98}$ في النظام ذو الأساس y فإن $y \geq 10$ و $y \leq 15$ ان $10 \leq y \leq 15$

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq 3 \\ 2 \leq k \leq 3 \end{cases} \text{ اي } \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq k \leq 3 \\ \frac{7}{4} \leq k \leq 3 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 5 \leq 9k+8 \leq 35 \\ 10 \leq 4k+3 \leq 15 \end{cases} \text{ وهذا يعني } \begin{cases} 5 \leq x \leq 35 \\ 10 \leq y \leq 15 \end{cases}$$

ان قيم k هي : 2 و 3

من اجل $k=2$ فإن $x=9 \times 2+8=26$ و $y=4 \times 2+3=11$ ان $(x,y)=(26;11)$

من اجل $k=3$ فإن $x=9 \times 3+8=35$ و $y=4 \times 3+3=15$ ان $(x,y)=(35;15)$

- كتابة α في النظام العشري :

من اجل $(x,y)=(26;11)$ فإن $\alpha=4x+3=4(26)+3=107$

و من اجل $(x,y)=(35;15)$ فإن $\alpha=4x+3=4(35)+3=143$

(2) (أ) دراسة حسب قيم n ، بواقي القسمة الاقلية للعدد 4^n على 9 :

$4^0 \equiv 1[9]$ و $4^1 \equiv 4[9]$ و $4^2 \equiv 7[9]$ و $4^3 \equiv 1[9]$ ومنه ينتج من اجل كل عدد صحيح k :

$4^{3k} \equiv 1[9]$ و $4^{3k+1} \equiv 4[9]$ و $4^{3k+2} \equiv 7[9]$ وبالتالي البواقي هي :

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
بواقي قسمة العدد 4^n على 9	1	4	7

(ب) تعيين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ حلول (E) حيث $2011^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$:

لدينا $2011 \equiv 4[9]$ وحلول (E) هي : $(x,y)=(9k+8;4k+3)$ حيث k طبيعي

ومنه $2011^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$ تعني $4^{9k+8} + 4^{4k+3} + 7 \equiv 0[9]$

ومن دراسة بواقي القسمة وجدنا الدور هو 3 ومنه نكتب العددين x و y كما يلي :

$x=9k+8=3(3k+2)+2=3k'+2$ و $y=4k+3=3k+3+k=3(k+1)+k=3k''+k$

وبالتالي : $4^{9k+8} + 4^{4k+3} + 7 \equiv 0[9]$ تكافئ $4^{3k'+2} + 4^{3k''+k} + 7 \equiv 0[9]$ ومن البولي نجد :

$4^k \equiv 4[9]$ ومنه $7+1 \times 4^k + 7 \equiv 0[9]$ ومنه من البواقي نجد ان $k=3m+1$

ومنه الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي تحقق $2011^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$ هي :

$(x,y)=(9(3m+1)+8;4(3m+1)+3)$ ان $(x,y)=(27m+17;12m+7)$ حيث m عدد طبيعي

$$(3) \quad a=9n+8 \quad \text{و} \quad b=4n+3 \quad \text{و} \quad PGCD(a,b)=d$$

(أ) تعيين القيم الممكنة لـ d : نلاحظ ان الثنائية (a,b) حل للمعادلة (E)

أي $4a-9b=5$ لان $4(9n+8)-9(4n+3)=36n-36n+32-27=5$

ان $4a-9b=5$ فاذا كان $PGCD(a,b)=d$ فان d يقسم $4a-9b$ وبالتالي d يقسم 5

ومنه القيم الممكنة لـ d هي 1 او 5

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d = 5$:

$d = 5$ معناه $a \equiv 0[5]$ أي $9n + 8 \equiv 0[5]$ ومنه $5n + 4n + 5 + 3 \equiv 0[5]$ اذن $4n + 3 \equiv 0[5]$

ومنه $4n \equiv 2[5]$ ومنه $16n \equiv 8[5]$ وبالتالي $n \equiv 3[5]$ أي ان $n = 5p + 3$ حيث p عدد طبيعي

(4) لدينا $A = 9n^2 + 17n + 8$ و $B = 4n^2 + 7n + 3$

(أ) تبيان ان العدد $(n+1)$ يقسم كلا من العددين A و B :

بالقسمة الاقليدية للعدد $9n^2 + 17n + 8$ على $(n+1)$ نجد : $A = 9n^2 + 17n + 8 = (n+1)(9n+8)$

و نجد أيضا $B = 4n^2 + 7n + 3 = (n+1)(4n+3)$ ومنه $(n+1)$ يقسم كلا من العددين A و B

(ب) استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B :

لدينا $A = (n+1)(9n+8) = (n+1) \times a$ و ايضا $B = (n+1)(4n+3) = (n+1) \times b$

$PGCD(A; B) = PGCD((n+1) \times a; (n+1) \times b) = (n+1) PGCD(a; b)$

ومن السؤال (3) (أ) القيم الممكنة لـ $PGCD(a; b) = d$ هي 1 او 5

ومنه من اجل $d = 1$ فان $PGCD(A; B) = (n+1) \times 1 = (n+1)$

ومن اجل $d = 5$ فان $PGCD(A; B) = 5(n+1)$

التمرين (37)

(1) عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha = 475\beta + m$ حولا في $\mathbb{Z}^2$

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x - 475y = -19$... (1)

(أ) عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0 - 4x_0 = 1$

(ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

(ج) اذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) حيث x و y من $\mathbb{N}$, بين ان العددين x و y اوليين فيما بينهما

(د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n \equiv 4[25]$ وباقي قسمة n على 106 هو 17

(هـ) عين كل الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول (1) بحيث يكون العدد $x + y$ مضاعف للعدد 10

حل التمرين (37) :

(1) تعيين قيم m بحيث تقبل : $2014\alpha = 475\beta + m$ حولا في $\mathbb{Z}^2$:

$2014\alpha = 475\beta + m$ تكافئ $2014\alpha - 475\beta = m$

لدينا : $PGCD(2014; 475) = 19$ و هكذا $2014\alpha = 475\beta + m$ تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$ يكافئ

$19(106\alpha - 25\beta) = m$ و منه $19/m$ اي $m = 19h$ مع $h \in \mathbb{Z}$.

لدينا المعادلة $2014x - 475y = -19$... (1)

(2) (أ) تعيين الحل $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $y_0 - 4x_0 = 1$:

المعادلة (1) تكافئ $19(106x - 25y) = -19$ و تكافئ $106x - 25y = -1$ (*) ولدينا $y_0 - 4x_0 = 1$ بالتعويض في

المعادلة (*) نجد : $106x_0 - 25(4x_0 + 1) = -1$ بعد الحل نجد : $x_0 = 4$ اذن $y_0 = 17$ اي $(x_0; y_0) = (4; 17)$.

(ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) :

المعادلة (1) و المعادلة (*) متكافئتان لهما نفس مجموعة الحلول اذن نحل المعادلة $106x - 25y = -1$ (*) .

بما ان الثنائية $(4; 17)$ حل للمعادلة (*) فإن : $106(4) - 25(17) = -1$. (E) .

من (*) و (E) نجد : $106x - 25y = 106(4) - 25(17)$ اي : $106(x - 4) = 25(y - 17)$.

لدينا : $25 \mid 106(x - 4)$ و $25 \mid 106$ اوليان فيما بينهما حسب غوص $25 \mid (x - 4)$ اذن : $x = 25k + 4$.

بتعويض $x = 25k + 4$ نجد : $y = 106k + 17$ اذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات الصحيحة $(25k + 4; 106k + 17)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

(ج) تبيان ان x و y اوليان فيما بينهما حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (1) :

لدينا d قاسم مشترك لـ x و y اي $d \mid x$ و $d \mid y$ و منه $d \mid 106x$ و $d \mid 25y$ اذن $d \mid 106x - 25y$ اي $d \mid -1$ و $d \in \mathbb{N}$ ينتج $d = 1$ اي $d = 1$ اذن $PGCD(x; y) = 1$ و منه x و y اوليان فيما بينهما

(د) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n \equiv 4[25]$ و باقي قسمة n على 106 هو 17 :

اي نحل الجملة : $\begin{cases} n \equiv 4[25] \\ n \equiv 17[106] \end{cases}$ اذن : $\begin{cases} n = 25\alpha + 4 \\ n = 106\beta + 17 \end{cases}$ و منه $106\beta - 25\alpha = -13$ و منه

$106\beta - 25\alpha = -13$

لدينا الثنائية $(4; 17)$ حل خاص للمعادلة $106\beta - 25\alpha = -1$ و منه الثنائية $(4 \times 13; 17 \times 13)$ حل خاص للمعادلة $106\beta - 25\alpha = -13$ بعد ذلك نحل المعادلة $106\beta - 25\alpha = -13$ باتباع نفس الطريقة في السؤال 2.

نجد : $p \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} \beta = 25p + 52 \\ \alpha = 106p + 221 \end{cases}$ لكن $n = 106\beta + 17$ بالتعويض نجد $n = 106(25p + 52) + 17$ و منه :

$n = 2650p + 5529; p \in \mathbb{N}$

(هـ) تعيين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث : $x + y$ مضاعف لـ 10 :

لدينا $x + y = 25k + 4 + 106k + 17 = 131k + 21$ و لدينا $x + y$ مضاعف لـ 10 معناه $x + y \equiv 0[10]$

اي : $131k + 21 \equiv 0[10]$ اي $k + 1 \equiv 0[10]$ اي $k \equiv -1[10]$ اي $k \equiv 9[10]$ و منه $k = 10t + 9$

و منه : $(x; y) = \{(250t + 229; 1060t + 971); t \in \mathbb{Z}\}$.

التمرين (38)

(1) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $35x - 42y = \alpha \cdots (1)$ حيث $\alpha \in \mathbb{Z}$ ما هو الشرط اللازم والكافي الذي يحققه α حتى يكون للمعادلة (1) حلول في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(2) (أ) نضع $\alpha = 21$

اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فان x مضاعف للعدد 3 ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة

(ب) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (1)

(ج) عين E مجموعة الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) بحيث $x^2 - y^2 < 96$

(3) ليكن c عددا طبيعيا اكبر تماما من 5 وليكن a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب في نظام التعداد الذي

اساسه c كما يلي : $\overline{21}$ و $\overline{15}$

(أ) اذا علمت ان الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (1) عين العدد c ثم عين العددين a و b

(ب) تحقق ان $(a; b)$ تنتمي الى المجموعة E

حل التمرين (38)

$$(1) \quad 35x - 42y = \alpha \quad \text{حيث } \alpha \in \mathbb{Z}$$

تعيين الشرط اللازم والكافي الذي يحققه α حتى تقبل المعادلة (1) حولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

المعادلة (1) تكافئ $7(5x - 6y) = \alpha$ ومنه الشرط اللازم والكافي حتى تقبل حولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ هو ان يكون

α من مضاعفات 7

$$(2) \quad (\text{أ}) \quad \alpha = 21$$

اثبات ان x مضاعف للعدد 3

المعادلة (1) تصبح $7(5x - 6y) = 21$ أي $5x - 6y = 3$ ومنه $5x = 6y + 3$ أي $5x = 3(2y + 1)$

هذه المعادلة تعني ان 3 يقسم $5x$ وبما ان 3 اولي مع 5 فانه حسب مبرهنة غوص 3 يقسم x

أي ان x مضاعف للعدد 3 أي $x = 3k$

- استنتاج حل خاص للمعادلة (1) :

من اجل $k = 1$ فان $x_0 = 3$ ومنه $5(3) - 6y = 3$ وبالتالي $y = 2$ اذن الثنائية $(3; 2)$ حل خاص للمعادلة

$$(ب) \quad \text{حل في } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ للمعادلة (1) : لدينا الجملة : } \begin{cases} 5x - 6y = 3 \\ 5(3) - 6(2) = 3 \end{cases} \text{ وبالطرح نجد :}$$

$$5(x - 3) = 6(y - 2)$$

وهذه الأخيرة تعني 6 يقسم الجداء $5(x - 3)$ وبما ان 5 و 6 اوليان فيما بينهما فان 6 يقسم $x - 3$

اذن $x - 3$ مضاعف للعدد 6 ومنه $x - 3 = 6k$ أي ان $x = 6k + 3$ حيث k عدد صحيح

وبالتعويض في المعادلة $5(x - 3) = 6(y - 2)$ نجد : $5 \times 6k = 6(y - 2)$ ومنه $y = 5k + 2$

اذن الحلول هي $(x; y) = (6k + 3; 5k + 2)$ حيث k عدد صحيح

(ج) تعيين (E) مجموعة الثنائيات $(x; y)$ بحيث $x^2 - y^2 < 96$:

$x^2 - y^2 < 96$ تعني $(6k + 3)^2 - (5k + 2)^2 < 96$ بعد التبسيط نجد : $11k^2 + 16k - 91 < 0$

$$\Delta = 4260 \quad \text{ومنه} \quad k_1 = \frac{-16 - \sqrt{4260}}{2(11)} \approx -3,69 \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{-16 + \sqrt{4260}}{2(11)} \approx 2,23$$

ومنه $-3,69 < k < 2,23$ اذن القيم الممكنة هي : $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

بالتعويض بهذه القيم في $(x; y) = (6k + 3; 5k + 2)$ نجد :

$$E = \{(-15; -13), (-9; -8), (-3; -3), (3; 2), (9; 7), (15; 12)\}$$

$$(3) \quad c > 5 \quad \text{و} \quad a = \overline{21}^c \quad \text{و} \quad b = \overline{15}^c$$

(أ) تعيين العدد c حيث $(a; b)$ حل للمعادلة (1)

$$1 + 2c = 6k + 3 \text{ ومنه } a = 6k + 3 \text{ و } a = \overline{21}^c = 1 + 2c$$

$$5 + c = 5k + 2 \text{ ومنه } b = 5k + 2 \text{ و } b = \overline{15}^c = 5 + c$$

$$\text{وبحل الجملة } \begin{cases} 1 + 2c = 6k + 3 \\ 5 + c = 5k + 2 \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} 1 + 2c = 6k + 3 \\ 10 + 2c = 10k + 4 \end{cases} \text{ وبالطرح نجد : } 4k + 1 = 9 \text{ ومنه } k = 2$$

$$\text{وبالتالي } 5 + c = 5k + 2 \text{ تعني } c = 5(2) + 2 - 5 = 7 \text{ اذن } \boxed{c = 7}$$

- تعيين العددين a و b :

$$b = 5 + c = 5 + 7 = 12 \text{ و } a = 1 + 2c = 1 + 2(7) = 15$$

(ب) التحقق ان $(a; b)$ تنتمي الى المجموعة E :

واضح ان الثنائية $(15; 12)$ تنتمي الى E اذن $(a; b)$ تنتمي الى E

التمرين (39) :

(1) تحقق ان $5^6 \equiv 1[7]$ و استنتج باقي قسمة 5^{2016} على 7

(2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$.

(أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4S_n = 5^{n+1} - 1$ و استنتج ان S_n و 5^n اوليان فيما بينهما .

(ب) ليكن العدد الصحيح a بين ان $4S_n \equiv a[7]$ اذا و فقط اذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.

(ج) بين ان $4S_{2015} \equiv 0[7]$ و استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7 .

(د) عين اصغر عدد طبيعي n غير معدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

(3) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم , نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 5^n x + S_n y = 1$

تحقق ان الثنائية $(5, -4)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

حل التمرين (39)

$$(1) \quad 5^6 = 15625 \text{ ومنه } 5^6 \equiv 1[7]$$

ندرس بواقي قسمة 5^n على 7 .

$$5^0 \equiv 1[7] \text{ و } 5^1 \equiv 5[7] \text{ و } 5^2 \equiv 4[7] \text{ و } 5^3 \equiv 6[7] \text{ و } 5^4 \equiv 2[7] \text{ و } 5^5 \equiv 3[7] \text{ و } 5^6 \equiv 1[7]$$

بواقي القسمة هي متتالية دورية و دورها 6 ومنه من اجل كل عدد طبيعي k : $5^{6k} \equiv 1[7]$

$$5^{2016} \equiv 5^{6(336)} \equiv 1[7] \text{ ومنه } 2016 = 6 \times 336 = 6n \text{ و } 5^6 \equiv 1[7]$$

$$(2) \quad S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$$

(أ) بيان من اجل كل عدد طبيعي n و $4S_n = 5^{n+1} - 1$ لذلك نحسب :

$$S_n = 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 + \dots + 5^n \text{ هو مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها } q = 5$$

$$4S_n = 5^{n+1} - 1 \text{ ومنه } S_n = 1 \left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} \right)$$

لدينا $4S_n = 5^{n+1} - 1$ وهذه تكتب على الشكل $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ يوجد ثنائية من الاعداد الصحيحة $(5, -4)$ بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ ومنه حسب بيزو فان $5^n, S_n$ اوليان فيما بينهما

(ب) تبين انه اذا كان $4S_n \equiv a[7]$ فإن $S_n \equiv 2a[7]$.

لدينا $4S_n \equiv a[7]$ ومنه بالضرب في 2 نجد $8S_n \equiv 2a[7]$ و $7S_n + S_n \equiv 2a[7]$ ومنه $S_n \equiv 2a[7]$

العكس : تبين انه اذا كان $S_n \equiv 2a[7]$ فإن $4S_n \equiv a[7]$

لدينا $S_n \equiv 2a[7]$ بالضرب في العدد 4 نجد $4S_n \equiv 8a[7]$ و $8a \equiv a[7]$ ومنه $4S_n \equiv a[7]$

(ج) بيان ان : $4S_{2015} \equiv 0[7]$.

باستعمال السؤال (1) نجد $5^{2016} \equiv 1[7]$ ومنه $5^{2016} - 1 \equiv 0[7]$ و لدينا $4S_n = 5^{n+1} - 1$ اي

$$4S_{2015} = 5^{2016} - 1$$

$$4S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1[7] \text{ وبما ان } 5^{2016} - 1 \equiv 0[7] \text{ فان } 4S_{2015} \equiv 0[7]$$

- استنتاج باقي قسمة S_{2015} على 7 :

لدينا حسب ما سبق : $4S_{2015} \equiv 0[7]$ ومنه حسب الخاصية $(4S_n \equiv a[7] \text{ فان } S_n \equiv 2a[7])$

نجد : $S_{2015} \equiv 2 \times 0[7] = 0$ ومنه باقي قسمة S_{2015} على 7 هو 0

(د) تعيين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

7 قاسم لـ S_n معناه : $S_n \equiv 0[7]$ اي $5^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$ ومنه $5^{n+1} \equiv 1[7]$ اي $5^{n+1} \equiv 5^0[7]$

ومن السؤال الأول فان : $(n+1=0 \text{ او } n+1=6)$ اي $(n=-1 \text{ مرفوضة او } n=5)$ و بالتالي $n=5$

(3) حل المعادلة $5^n x + S_n y = 1$:

$(5, -4)$ حل خاص للمعادلة معناه $5^n(5) + S_n(-4) = 1$ وهذه تعني $5^{n+1} - 4S_n = 1$ اي $4S_n = 5^{n+1} - 1$

وهي محققة حسب السؤال (2) (أ)

$$\text{نجد ان : } \begin{cases} 5^n x + S_n y = 1 \\ 5^n(x-5) + S_n(y+4) = 0 \end{cases} \text{ وبالطرح نجد : } \begin{cases} 5^n x + S_n y = 1 \\ 5^n(5) + S_n(-4) = 1 \end{cases}$$

ومنه $5^n(x-5) = -S_n(y+4)$ وهذه تعني 5^n يقسم $S_n(y+4)$ وبما ان $5^n, S_n$ اوليان فيما بينهما فانه

حسب غوص 5^n يقسم $-(y+4)$ اي ان $-(y+4) = k \cdot 5^n$ وبالتالي $y = -k \times 5^n - 4$

وبالتعويض في $5^n(x-5) = -S_n(y+4)$ نجد $x = kS_n + 5$

اذن حلول المعادلة (E) هي : $(x, y) = (kS_n + 5, -k \times 5^n - 4)$, $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين (40)

(1) ادرس حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 5 .

(2) (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r حيث r, U_0 عدنان طبيعيان غير معدومين..

- (أ) - عين U_0 و r علماً أن U_0 و r أوليان فيما بينهما و $U_0^2 = U_{10} - U_1$
- (ب) - نفرض $U_0 = 3$, $r = 1$ ونضع $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ و $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$.
 - احسب P_n و S_n بدلالة n .
 - عين العدد q بحيث : $2P_q = 2010!$ ثم تحقق أن : $3^q \equiv 2[5]$
 - عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $2S_n + 2 = 3^q [5]$

حل التمرين (40)

- (1) دراسة بواقي قسمة 3^n على 5 :
- $3^0 \equiv 1[5]$; $3^1 \equiv 3[5]$; $3^2 \equiv 4[5]$; $3^3 \equiv 2[5]$; $3^4 \equiv 1[5]$
 وعليه : $3^{4k} \equiv 1[5]$ و $3^{4k+1} \equiv 3[5]$; $3^{4k+2} \equiv 4[5]$; $3^{4k+3} \equiv 2[5]$
- (2) (أ) تعيين U_0 و r : $U_0^2 = U_{10} - U_1 \dots (1)$
 لدينا : $U_1 = U_0 + r$ و $U_{10} = U_0 + 10r$
 وبالتعويض في (1) نجد : $U_0^2 = (U_0 + 10r) - (U_0 + r)$ ومنه : $U_0^2 = 9r$
 لدينا : U_0 يقسم 9 و U_0 أولي مع r ومنه حسب مبرهنة غوص : U_0 يقسم 9 .
 إذن قيم U_0 الممكنة هي : 1 ، 3 ، 9 .
 * لما $U_0 = 1$: $1 = 9r$ أي : $r = \frac{1}{9}$ مرفوض .
 * لما $U_0 = 3$: $9 = 9r$ ومنه : $r = 1$.
 * لما $U_0 = 9$: $9^2 = 9r$ ومنه : $r = 9$ مرفوض لأن U_0 أولي مع r .
 ومنه : $U_0 = 3$ و $r = 1$.
 (ب) حساب S_n :
 لدينا : $S_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$ حيث : $U_0 = 3$ ، $U_n = U_0 + nr$ ،
 ومنه : $U_n = 3 + n$ وعليه : $S_n = \frac{n+1}{2}(6+n)$
 - حساب P_n : $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n = U_0 \times (U_0 + r) \times \dots \times (U_0 + nr)$
 $P_n = 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n+3)$
 $P_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n+3)}{1 \times 2} = \frac{(n+3)!}{2!}$
 - تعيين q : $2P_q = (2010)!$ ومنه : $(q+3)! = 2010!$
 إذن : $q+3 = 2010$ وعليه : $q = 2007$.
 - التحقق من أجل $3^{2007} \equiv 2[5]$:
 لدينا : $2007 = 4 \times 581 + 3$ ومنه : $3^{2007} \equiv 2[5]$.
 - تعيين n بحيث : $2S_n + 2 \equiv 3^q [5]$
 إذن : $(n+1)(6+n) + 2 \equiv 2[5]$ ومنه $6n + n^2 + 6 + n + 2 \equiv 2[5]$

$n^2 + 7n + 6 \equiv 0[5]$ ومنه $n^2 + 2n + 1 \equiv 0[5]$ إذن : $(n+1)^2 \equiv 0[5]$
 إذن : $n+1 \equiv 0[5]$ ومنه : $n \equiv -1[5]$ إذن : $n \equiv 4[5]$ وعليه $n = 5\alpha + 4$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$



التمرين (41) :

- (1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي بواقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 8^n و 9^n على 13
- (2) - اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(3^{6n+2} - 2 \times 64^{2n+1} + 2)$ يقبل القسمة على 13.
- (3) عيّن الاعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(3^{6n} - 2003^{2n+1} + 30n^2 - 1)$ مضاعفا للعدد 13 .
- (4) - عيّن الاعداد الطبيعية n بحيث يكون $8^n - 38^n \equiv 9[13]$

حل التمرين (41)

- (1) (أ) - تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13 .
 لدينا $8^0 \equiv 1[13]$ ، $8^1 \equiv 8[13]$ ، $8^2 \equiv 12[13]$ ومنه $8^2 \equiv -1[13]$ أي $8^4 \equiv 1[13]$
 ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $8^{4p} \equiv 1[13]$ ، $8^{4p+1} \equiv 8[13]$ ، $8^{4p+2} \equiv 12[13]$ ، $8^{4p+3} \equiv 5[13]$

$n = ..$	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
باقي قسمة 8^n على 13	1	8	12	5

- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 :
 لدينا $9^0 \equiv 1[13]$ ، $9^1 \equiv 9[13]$ ، $9^2 \equiv 3[13]$ ومنه $9^3 \equiv 1[13]$ انن الدور هو 3
 انن $9^{3k} \equiv 1[13]$ و $9^{3k+1} \equiv 9[13]$ و $9^{3k+2} \equiv 3[13]$

- (2) اثبات أن العدد $(3^{6n+2} - 2 \times 64^{2n+1} + 2)$ يقبل القسمة على 13:
 $(3^{6n+2} - 2 \times 64^{2n+1} + 2) = (3^2)^{3n+1} - 2 \times (8^2)^{2n+1} + 2 \equiv 9^{3n+1} - 2 \times 8^{4n+2} + 2[13]$
 $\equiv 9 - 2(12) + 2[13] \equiv 0[13]$

- (3) تعيين n بحيث يكون العدد $(3^{6n} - 2003^{2n+1} + 30n^2 - 1)$ مضاعفا للعدد 13:
 تعني $3^{6n} - 2003^{2n+1} + 30n^2 - 1 \equiv 0[13]$ ولدينا $2003 \equiv 1[13]$ و $30 \equiv 4[13]$
 ومنه $(3^2)^{3n} - 1 + 4n^2 - 1 \equiv 0[13]$ وبالتالي $9^{3n} + 4n^2 - 2 \equiv 0[13]$ اي $4n^2 - 1 \equiv 0[13]$
 ومنه $(2n+1)(2n-1) \equiv 0[13]$ انن $(2n-1) \equiv 0[13]$ او $(2n+1) \equiv 0[13]$ لان 13 اولي
 وعليه $(2n \equiv 1[13])$ او $(2n \equiv -1[13])$
 $2n \equiv 1[13]$ ومنه $7 \times 2n \equiv 7[13]$ اي $13n + n \equiv 7[13]$ وبالتالي : $n \equiv 7[13]$ اي $n = 13k + 7$
 و $2n \equiv -1[13]$ ومنه $2n \equiv 12[13]$ اي $n \equiv 6[13]$ وبالتالي : $n = 13k + 6$ حيث k عدد طبيعي
 (4) تعيين الاعداد n بحيث يكون $8^n - 38^n \equiv 9[13]$:
 لدينا $38 \equiv (-1)[13]$ ومنه $8^n - 38^n \equiv 9[13]$ تكافئ $8^n - 12^n \equiv 9[13]$ اي $8^n - (-1)^n \equiv 9[13]$

$n = ..$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	
$8^n \equiv ..$	1	8	12	5	[13]
$8^n - (-1)^n \equiv ..$	0	9	11	6	[13]

من هذه النتائج نجد ان $8^n - (-1)^n \equiv 9[13]$ محققة من اجل $n = 4k + 1$ حيث k عدد طبيعي

التمرين (42):

- (1) بينا أن العدد 2017 أولي.
- (2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x, y) : $14119x - 10085y = 22187$ (E)
 - (أ) عين القاسم المشترك الأكبر لاعداد 14119 , 10085 , 22187
 - (ب) بينا أن الثنائية (3; 2) حلا خاصا للمعادلة (E) ثم عين مجموعة حلولها
 - (ج) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x, y) = 11$
- (3) (أ) أدر حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11
 - (ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $5^n + 7^{2017}$ قابلا للقسمة على 11
 - (4) ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين كلا منهما أصغر من 8 ,
نعتبر العدد : $N = \overline{a01b}$ مكتوب في النظام العشري
 - (أ) تحقق ان $10^3 \equiv -1[11]$
 - (ب) عين قيم العدد الطبيعي N حيث باقي قسمته على 11 هو 4
 - (ج) أكتب هذا العدد في النظام مديا لاساس 11

حل التمرين (42):

- (1) العدد 2017 أولي لأنه لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 ولا على 7 ولا 11 ولا 13 ولا 17 ولا 19 ولا على 23 ولا 29 ولا 31 ولا 37 ولا 41 و $\sqrt{2017} \approx 44,91$ ومنه 2017 أولي
- (2) : $14119x - 10085y = 22187$ (E)

(أ) تعيين القاسم المشترك الأكبر لاعداد:

لدينا $14119 = 7 \times 2017$ و $10085 = 5 \times 2017$ و $22187 = 11 \times 2017$ ومنه

$$PGCD(22187, 10085, 14119) = 2017$$

(ب) المعادلة (E) تكافئ : $7x - 5y = 11$

الثنائية (3; 2) حلا خاصا للمعادلة (E) معناه : $11 = 7(3) - 5(2)$ محققة

- تعيين مجموعة الحلول :

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x - 5y = 11 \dots (1) \\ 7(3) - 5(2) = 11 \dots (2) \end{array} \right. \quad \text{لدينا وبالطرح نجد: } 7(x-3) = 5(y-2)$$

$(x-3) = 5/7$ وبما ان 5 اولي مع 7 فانه حسب مبرهنة غوص 5 يقسم $x-3$ اي

$$x-3 = 5k \quad \text{ومنه} \quad x = 5k + 3$$

وبالتعويض في المعادلة $7(x-3) = 5(y-2)$ نجد $y = 7k + 2$ حيث k عدد صحيح

(ج) تعيين (x, y) حلول (E) بحيث $PGCD(x; y) = 11$ و $(x, y) = (5k + 3; 7k + 2)$
 $PGCD(x; y) = 11$ تعني $x \equiv 0[11]$ و $y \equiv 0[11]$
 $x \equiv 0[11]$ تكافئ $5k + 3 \equiv 0[11]$ ومنه $5k \equiv -3[11]$ اي $5k \equiv 8[11]$ ومنه $2 \times 5k \equiv 16[11]$
اي $5[11] - k \equiv 5[11]$ تكافئ $k \equiv -5[11]$ اي $k \equiv 6[11]$ اذن $k = 11k' + 6$
وبالتالي $x = 5(11k' + 6) + 3 = 55k' + 33$ و $y = 7(11k' + 6) + 2 = 77k' + 44$
(3) (أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11 :
- بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11
 $5^0 \equiv 1[11]$ و $5^1 \equiv 5[11]$ و $5^2 \equiv 3[11]$ و $5^3 \equiv 4[11]$ و $5^4 \equiv 9[11]$ و $5^5 \equiv 1[11]$
لدينا : $5^5 \equiv 1[11]$ و عليه : $5^{5k} \equiv 1[11]$ حيث $k \in \mathbb{N}$

و بالتالي : $5^{5k+1} \equiv 5[11]$ ، $5^{5k+2} \equiv 3[11]$ ، $5^{5k+3} \equiv 4[11]$ ، $5^{5k+4} \equiv 9[11]$.

إذن البواقي هي : 1, 5, 3, 4, 9 حسب قيم n و هي :

$5k$ ، $5k+1$ ، $5k+2$ ، $5k+3$ ، $5k+4$ على الترتيب .

- بواقي قسمة 7^n على 11 حيث n عدد طبيعي

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1

عملية القسمة دورية دورها 10 و نكتب $7^{10k} \equiv 1[11]$

إذن بواقي قسمة 7^n على 11 حيث n عدد طبيعي كما يلي :

$n = 10k + m$	$m = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

(ب) تعيين قيم n حتى يكون $5^n + 7^{2017} \equiv 0[11]$ أي $5^n \equiv -7^{2017}[11]$ أي $5^n \equiv 4[11]$

لدينا $2017 = 10(201) + 7$ ومنه $7^{2017} = 7^{10(201)+7} \equiv 6[11]$

اذن $5^n + 7^{2017} \equiv 0[11]$ تعني $5^n + 6 \equiv 0[11]$ أي $5^n \equiv 5[11]$ ومن البواقي نجد : $n = 5k + 1$

(4) a و b طبيعيا نكلا منهما أصغر من 8 و : $N = \overline{a01b}^{10}$

(أ) التحقق ان $10^3 \equiv -1[11]$ واضح لان $1000 = 11(90) + 10$ أي $1000 \equiv 10[11]$ اذن $10^3 \equiv -1[11]$

(ب) تعيين قيم N حيث باق قسمة على 11 هو 4 : أي $N \equiv 4[11]$

$N = \overline{a01b}^{10} = a \times 10^3 + 1 \times 10 + b$ ومنه $N \equiv 4[11]$ تعني $1000a + b + 10 \equiv 4[11]$

$-a + b + 10 \equiv 4[11]$ ومنه $b - a \equiv -6[11]$ أي $b - a \equiv 5[11]$

وبما ان a و b طبيعيا نكلا منهما أصغر من 8 فان الموافقة $b - a \equiv 5[11]$ تكون محققة من اجل :

$(a; b) = (2; 7)$ او $(a; b) = (1; 6)$ او $(a; b) = (7; 1)$

ومنه نجد من $N = 1000a + b + 10$:
 $N = 1000(7) + 1 + 10 = \boxed{7011}$ و $N = 1000(2) + 7 + 10 = \boxed{2017}$ و $N = 1000 + 6 + 10 = \boxed{1016}$
 (ج) كتابة العدد N في النظام ذي الأساس 11 :
 $1016 = 92 \times 11 + \boxed{4}$ و $92 = 8 \times 11 + \boxed{4}$ و $8 = 0 \times 11 + \boxed{8}$ ومنه $1016 = \overline{844}^{11}$
 وهكذا نجد : $2017 = \overline{1574}^{11}$ و $7011 = \overline{52\alpha 4}^{11}$ حيث $\alpha = 10$

التمرين (43)

- (1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k حيث $1 \leq k \leq 10$ العدد C_{11}^k مضاعف للعدد 11.
- (2) استنتج أنه من أجل كل ثنائية (a, b) من الأعداد الصحيحة : $(a + b)^{11} \equiv (a^{11} + b^{11})[11]$
- (3) (أ) - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n^{11} \equiv n[11]$
 ثم بين أنه من أجل كل عدد صحيح سالب n : $n^{11} \equiv n[11]$
 (ب) - استنتج أن العدد $a^{11} + b^{11}$ مضاعف للعدد 11 إذا وفقط إذا كان $a + b$ مضاعف للعدد 11.
- (4) عين الأعداد الصحيحة x بحيث :
$$\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x^{11} + 2048 \equiv 0[11] \end{cases}$$

حل التمرين (43)

(1) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي k حيث $1 \leq k \leq 10$ العدد C_{11}^k مضاعف للعدد 11.
 لدينا
$$C_{11}^k = \frac{11!}{k!(11-k)!} = \frac{11 \times 10 \times \dots \times (k+1)}{k!}$$
 ومنه : $k! C_{11}^k = 11 \times 10 \times \dots \times (k+1)$

نستنتج أن 11 يقسم $k! C_{11}^k$ و $k < 11$ و العدد 11 أولي إذن $k!$ أولي مع 11 وبالتالي حسب غوص العدد 11 يقسم C_{11}^k أي العدد C_{11}^k مضاعف للعدد 11.

(2) نستنتج أنه من أجل كل ثنائية (a, b) من الأعداد الصحيحة : $(a + b)^{11} \equiv (a^{11} + b^{11})[11]$
 حسب دستور ثنائي الحد لنيوتن :

$$(a + b)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k a^{11-k} b^k = a^{11} + \sum_{k=1}^{10} C_{11}^k a^{11-k} b^k + b^{11}$$

لكن مما سبق لدينا إذا كان $1 \leq k \leq 10$ فإن $C_{11}^k \equiv 0[11]$

ومنه إذا كان a و b عددين صحيحين فإن : $\sum_{k=1}^{10} C_{11}^k a^{11-k} b^k + b^{11} \equiv 0[11]$

و بالتالي : $(a + b)^{11} \equiv (a^{11} + b^{11})[11]$

(3) أ- نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n^{11} \equiv n[11]$

نستعمل البرهان بالتراجع :

من أجل $n = 0$: $0^{11} \equiv 0[11]$

نفرض أن : $n^{11} \equiv n[11]$

ومنه حسب ماسبق: $(n+1)^{11} \equiv (n^{11} + 1^{11})[11]$ أي $(n+1)^{11} \equiv n+1[11]$ إذن الخاصية صحيحة من أجل: $n+1$.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n^{11} \equiv n[11]$

* نبين أنه من أجل كل عدد صحيح سالب n : $n^{11} \equiv n[11]$

من أجل كل عدد طبيعي n : $n^{11} \equiv n[11]$

من أجل كل عدد سالب n لدينا: $-n \geq 0$ ومنه: $n^{11} = (-1)(-n)^{11}$

و لدينا: $n^{11} \equiv -(-n)^{11}[11]$ أي $n^{11} \equiv -(-n)[11]$ أي $n^{11} \equiv n[11]$

ومنه من أجل كل n من Z : $n^{11} \equiv n[11]$

ب - نستنتج أن العدد $a^{11} + b^{11}$ مضاعف للعدد 11 إذا وفقط إذا كان $a+b$ مضاعف للعدد 11.

لدينا من أجل كل عددين a و b صحيحين لدينا: $(a+b)^{11} \equiv (a^{11} + b^{11})[11]$

أي $(a+b)^{11} \equiv a+b[11]$

ومنه $a^{11} + b^{11}$ مضاعف للعدد 11 إذا وفقط إذا كان $a+b$ مضاعف للعدد 11.

(4) تعيين الأعداد الصحيحة x بحيث: $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x^{11} + 2048 \equiv 0[11] \end{cases}$

لدينا: $2048 = 2^{11}$ و هو من الشكل: n^{11}

ومنه: $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x^{11} + 2048 \equiv 0[11] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x^{11} + 2^{11} \equiv 0[11] \end{cases}$ أي $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x+2 \equiv 0[11] \end{cases}$ (حسب ما سبق)

ومنه $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x+2 \equiv 11k \end{cases}$ مع $k \in Z$ ومنه $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x \equiv 11k-2 \end{cases}$

لدينا: $(-35 \leq x \leq 35)$ يكافئ $(-3 \leq k \leq 3)$

ومنه نجد: $S = \{-35; -24; -13; -2; 9; 20; 31\}$