

تمارين الروال اللوغاريتمية في البكالوريا

الشعبة: تسيير وإقتصاد

التمرين [1]

[باك 2010] [م1] [ن4]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس . ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري)

(1) أـ حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة : $f(x) = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا .
بـ حلل إلى $f(x)$ جداء عاملين .
جـ حل في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة : $2\ln(x) + 2 \geq 0$.

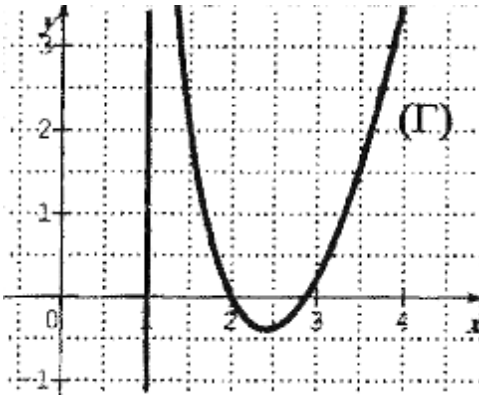
(2) أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

التمرين [2]

[باك 2010] [م2] [ن9]

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري)



و (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس كما هو في الشكل التالي :

(1) بقراءة بيانية ، عين عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.

(2) أحسب $g(2)$.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث : $2,87 < \alpha < 2,88$.

(4) استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ في المجال $]1; +\infty[$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أوجد نهاية الدالة f عند $+\infty$. (لاحظ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)
بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

جـ بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

دـ أوجد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f) .

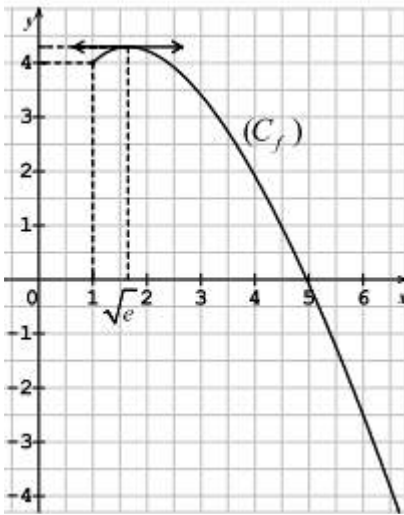
هـ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)
بـ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(3) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) = 3,9$)

(4) أـ عين مشتقة الدالة : $x \mapsto [\ln(x-1)]^2$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

بـ أحسب : $\int_2^5 f(x) dx$ ، فسر النتيجة هندسيا .



التمثيل البياني (C_f) المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعلاقة:

$$f(x) = ax + b + cx \ln x \text{ حيث } a, b, c \text{ أعداد حقيقية.}$$

(1) خمن بقراءة بيانية اتجاه تغير f و نهاية f عند $+\infty$.

(2) أـ أحسب بدلالة a و c عبارة $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة

للدالة f على $[1; +\infty[$.

بـ باستعمال معطيات في الشكل، وعلما أن $f(5) = 16 - 10 \ln 5$.

$$\text{بين أن : } f(x) = 3x + 1 - 2x \ln x$$

جـ تحقق من صحة تخمينك في السؤال 1، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-\infty; 1[$ ، ثم

$$\text{تحقق أن } 4,95 < \alpha < 4,96.$$

(4) نعرف العدد الحقيقي S كما يلي: $S = \int_1^{\alpha} f(x) dx$ (حيث α هو حل المعادلة $f(x) = 0$)

أـ بين أن الدالة $g : x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دالة أصلية للدالة f على المجال $[1; +\infty[$.

بـ أعط تفسيراً هندسياً للعدد S ، ثم أحسبه بدلالة α .

جـ بين أن: $S = \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) - 3$ ، ثم استنتج حصراً للعدد α .

(I) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2}$.

(1) عين، تبعا لقيم x ، إشارة $g(x)$.

(2) أـ تحقق أنه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$.

بـ استنتج الدوال الأصلية للدالة g على $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; 8[$ كما يلي: $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x} + \ln x$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ تحقق أن f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0; 8[$ والتي تنعدم عند 1.

بـ استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; 8[$.

جـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

دـ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين، أحدهما α ، حيث: $3,8 < \alpha < 3,9$.

(3) مثل بيانياً (C_f).

(III) الدالة العددية h معرفة على $]-\frac{2}{3}; 2[$ كما يلي: $h(x) = f(3x + 2)$.

(1) بين أنه إذا كان $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ فإن $0 < 3x + 2 \leq 2$ وإذا كان $0 \leq x \leq 2$ فإن $2 \leq 3x + 2 \leq 8$.

(2) أحسب $h'(x)$ (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة).

(3) شكل جدول تغيرات h .

(I) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (يعطى $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(2) أـ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

بـ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أـ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

بـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

(4) عين فاصلة النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (D) ثم أكتب معادلة للمماس (T).

(5) أرسم (D)، (T) و (C_f).

(6) أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1; 3]$.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) f دالة معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

(Γ) التمثيل البياني للدالة f ، المعطى في الشكل

المقابل، يقبل في النقطة $A(2; -1 + 3\ln 3)$ مماسا

موازيا لحامل محور الفواصل.

(1) بقراءة بيانية :

أـ ضع تخميناً حول $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

بـ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) باستعمال المعطيات المتوفرة، جد قيمة كل من a و b .

(II) نعتبر في هذا الجزء : $f(x) = -x + 1 + 3\ln(x+1)$.

(1) أحسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر.

(2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. (يعطى : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$)

(3) أـ عين النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازيا للمستقيم الذي معادلته $y = x$ ، ثم

أكتب معادلة للمماس (T).

بـ استنتج بيانياً، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تماماً.

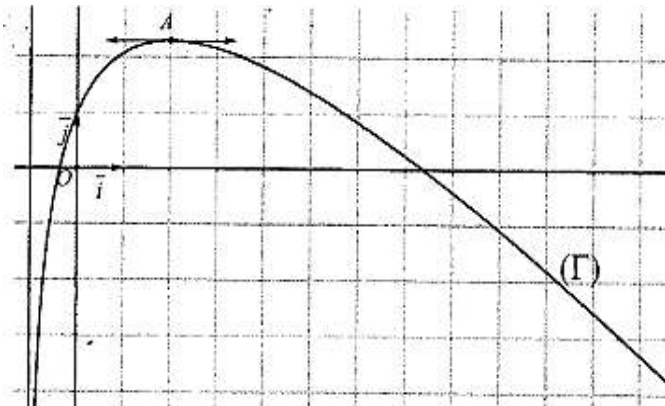
(4) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

أـ أحسب $g'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

بـ لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل،

بين أن : $\alpha \in]7, 37; 7, 38[$ و $\beta \in]-0, 37; -0, 36[$.

جـ أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = 0$.



د- تحقق أن : $S = \left(\frac{1}{2} \alpha^2 - 2\alpha - 1 \right) ua$ ، ثم عين حصرا لـ S . (ua وحدة مساحة)

(III) تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر .

تمنذج الكلفة الهامشية C_m (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0; 7]$ بالدالة f المعرفة في الجزء (II) ، أي من أجل $x \in [0; 7]$ لدينا $C_m(x) = f(x)$.
نرمزب $C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x قطعة .

(1) عين عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$.

(2) قدر الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة .

التعريف [7]

[باك 2016] [م1] [7, 5] (ن)

(I) g دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = ax + b + \ln x$ حيث a و b عددان حقيقيان .

(1) عين a و b بحيث : $g(1) = 2$ و $g'(2) = \frac{3}{2}$.

(2) نضع : $g(x) = x + 1 + \ln x$

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا α حيث : $0, 2 < \alpha < 0, 3$.

د- حدد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x \ln x}{x + 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (يعطى : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$) .

(3) تحقق أن : $f(\alpha) = -\alpha$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) أحسب $f(1)$ و $f(5)$ ثم أرسم (C_f) على المجال $[0; 5]$.

التعريف [8]

[باك 2016] [م2] [7] (ن)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -4 + 2x(1 + \ln x)$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. (يعطى : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$) .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1, 4 < \alpha < 1, 5$.

(4) حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = (2x - 4) \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. فسر النتيجة هندسيا .

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

(4) أـ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

بـ أنشئ (T) و (C_f) . (تعطى : $f(\alpha) \approx 0,41$)

(5) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $F(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x$.

أـ بين أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

بـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 1$ ، $y = 0$ و $x = 2$.

[باك 2017][م1] (8 ن)

التعريف [9]

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + 3 \ln x - 3$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,40 < \alpha < 1,41$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 1 - \frac{3 \ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

بـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . (تعطى : $f(\alpha) \approx 1,68$)

(6) أـ بين أن الدالة h حيث $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

بـ أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 1$ ، $x = e$ و $y = x + 1$.

[باك 2018][م1] (8 ن)

التعريف [10]

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2; 8[$ بـ : $f(x) = \ln(x + 2) + \ln(-x + 8) - \ln 16$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. نأخذ الوحدة البيانية : $2cm$.

(1) أحسب نهايتي الدالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2; 8[$ وفسر النتيجة بيانيا .

(2) تحقق أنه من أجل كل x من $]-2; 8[$: $f'(x) = \frac{-2x + 6}{(x + 2)(-x + 8)}$. f' هي الدالة المشتقة للدالة f

(3) أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2; 8[$ و شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

(5) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-2; 8[$: $(6 - x)$ ينتمي إلى $]-2; 8[$ و $f(6 - x) = f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

(6) أرسم المنحنى (C_f) .

(7) لتكن الدالة العددية F المعرفة على المجال $]-2; 8[$ بـ : $F(x) = (x + 2) \ln(x + 2) + (x - 8) \ln(-x + 8) - 2x - x \ln 16$

بين أن F دالة أصلية لـ f على المجال $]-2; 8[$.

(8) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = 4$.