

ملاحظة: مركز جيداً أثناء المحاولة

تمرين شامل في المتتاليات العددية

(I) (d_n) متتالية هندسية متناقصة تماماً حدّها الأول d_0 وأساسها q' حيث :

$$(F) : \begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = -\frac{13}{27} \dots (1) \\ d_0 \times d_1 \times d_2 = -\frac{1}{729} \dots (2) \end{cases}$$

1 - احسب d_0 ، d_1 و d_2 ثم استنتج الأساس q' .

2 - اكتب d_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$.

3 - عين أكبر عدد طبيعي n حتى يكون : $d_n < -\frac{3}{10^3}$.

(II) a وسيط حقيقي موجب تماماً .

f_a الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; -a[\cup]-\frac{1}{a}; +\infty[$ كيلي : $f_a(x) = \ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + x$.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x)$.

(III) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب :

$$\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = e^{f_a(v_n) - v_n} \end{cases}$$

1 - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n \neq 0$.

2 - عين قيمة a حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

(IV) نفرض أنّ $a \neq 1$. b عدد حقيقي موجب تماماً يختلف عن $\frac{1}{a}$.

(w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $w_n = \frac{v_n - b}{v_n + b}$.

1 - أ - جد قيمة b حتى تكون المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين كل من أساسها q وحدّها الأول w_0 بدلالة a .

ب - من أجل قيمة b السابقة اكتب عبارة w_n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة كل من n و a .

ج - احسب كل من : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

2 - نضع في كلّ ممّا يلي $b = 1$ و $a = 3$.

أ - اكتب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

ب - اكتب بدلالة n المجموع s'_n حيث : $s'_n = \frac{1}{v_0 + 1} + \frac{1}{v_1 + 1} + \frac{1}{v_2 + 1} + \dots + \frac{1}{v_n + 1}$.

• احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n$ ، ثم استنتج طبيعة المتتالية (s'_n) .

ج - اكتب بدلالة n المجموع s''_n حيث : $s''_n = \frac{1}{(v_0 + 1)^2} + \frac{1}{(v_1 + 1)^2} + \frac{1}{(v_2 + 1)^2} + \dots + \frac{1}{(v_n + 1)^2}$.

د - اكتب بدلالة كل من n و m المجموع h_n حيث : $h_n = w_0^m + w_1^m + w_2^m + \dots + w_n^m$ مع m عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 .

هـ - اكتب بدلالة n الجداء G_n حيث : $G_n = |w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n|$.

• احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n$ ، ثم استنتج طبيعة المتتالية (G_n) .

و - اكتب بدلالة n الجداء E_n حيث : $E_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times e^{w_2} \times \dots \times e^{w_n}$.

• ماهي طبيعة المتتالية (E_n) ؟ برّر إجابتك .

ي - اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = w_0^{2020} \times w_1^{2020} \times w_2^{2020} \times \dots \times w_n^{2020}$.

• بيّن أنّ المتتالية (P_n) متقاربة .

3 - أ - تحقّق أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإنّ : $\frac{2}{1 + \alpha^{n+2}} - 1 = \frac{1 - \alpha^{n+2}}{1 + \alpha^{n+2}}$.

ب - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{2}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ثم احسب من جديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

$$(V) \quad f_3 \text{ الدالة العددية المعرفة على } [1; 4] \text{ كيلي : } f_3(x) = \ln \left(\frac{3+x}{1+3x} \right) + x$$

ونسَمي (C_{f_3}) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$:

1 - ادرس تغيّرات الدالة f_3 على المجال $[1; 4]$.

2 - بين أنّ $\ln \left(\frac{3+x}{1+3x} \right) = \ln \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x} \right)$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_{f_3}) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ على $[1; 4]$.

3 - أنشئ المنحنى (C_{f_3}) على المجال $[1; 4]$.

4 - برهن أنّه إذا كان $x \in [1; 4]$ فإنّ $f_3(x) \in [1; 4]$.

$$(VI) \quad (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ } u_0 = 3 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = f_3(u_n)$$

1 - أ - برّر وجود المتتالية (u_n) .

ب - باستعمال المنحنى (C_{f_3}) والمستقيم (Δ) ، مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل (دون حسابها ومبرزا خطوط الإنشاء) .

ج - ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

2 - أ - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n < 4$.

ب - بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} \leq u_n$ ثم استنتج إتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج - أثبت أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثمّ أوجد نهايتها .

3 - أ - بين أنّه من أجل كل x من المجال $[1; 4]$ فإنّ $f'_3(x) \leq f'_3(4)$.

ب - احسب $f'_3(4)$.

ج - بين أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 \leq \frac{83}{91}(u_n - 1)$ (إرشاد : استعمل المتباينة $\int_1^{u_n} f'_3(x) dx \leq \int_1^{u_n} f'_3(4) dx$) .

د - بين أنّه من أجل كل n عدد طبيعي : $0 \leq u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n$ ، ثمّ استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4 - احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ حيث :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(\frac{1+3u_k}{u_k+3} \right) = \ln \left(\frac{1+3u_0}{3+u_0} \right) + \ln \left(\frac{1+3u_1}{3+u_1} \right) + \ln \left(\frac{1+3u_2}{3+u_2} \right) + \dots + \ln \left(\frac{1+3u_{n-1}}{3+u_{n-1}} \right)$$

(VII) نضع في هذا الجزء : $a = 5$.

(L_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $L_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $L_{n+1} = 2L_n f_5(L_n) - L_n^2$.

- نأخذ أنّ g الدالة المعرفة على $[0; 1]$ بـ : $g(x) = 2x \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x^2$ ، متزايدة ، وأنّ $g(x) - x = 0$ لـ $x = 1$.

1 - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $0 \leq L_n \leq 1$.

2 - أ - بين أنّه من أجل كل $x \in [0; 1]$: $2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x \geq 1$.

ب - أثبت أنّ المتتالية (L_n) متزايدة (تذكر أنّ حدود المتتالية (L_n) موجبة) .

ج - بين أنّ (L_n) متقاربة ثمّ أوجد نهايتها .

3 - بين أنّ المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان .

_____ بالتوفيق والنجاح إن شاء الله في البكالوريا _____

قال الإمام عبد الحميد ابن باديس رحمه الله تعالى :

كم عالم يسكن بيتاً بالكرا *** وجاهد يملك دوراً وقرى

لما قرأت قوله سبحانه *** نحن قسمنا بينهم زلزالاً

الصحيح المفصل للتمرين الشامل في المتاليات

الجزء الأول

1 حساب d_0 ، d_1 و d_2 ثم استنتاج الأساس q'

لدينا بما أن المتتالية (d_n) هندسية فإن: $d_1^2 = d_0 \times d_2$ بالتعويض في المعادلة (2) نجد: $d_1^3 = -\frac{1}{729}$ إذن $d_1 = -\frac{1}{9}$.
 الجملة (F) تصبح تكافئ: $\begin{cases} d_0 + d_2 = -\frac{10}{27} \\ d_0 \times d_2 = \frac{1}{81} \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} d_0 = -\frac{10}{27} - d_2 \dots (3) \\ d_0 \times d_2 = \frac{1}{81} \dots (4) \end{cases}$ بتعويض المعادلة (3) في (4) نجد:
 $\left(-\frac{10}{27} - d_2\right) d_2 = \frac{1}{81}$ يكافئ: $-d_2^2 - \frac{10}{27}d_2 - \frac{1}{81} = 0$ ، بجل هذه الأخيرة نجد حلولها هي: $d_2 = -\frac{1}{3}$ و $d_2 = -\frac{1}{27}$ وبما أن المتتالية (d_n) متناقصة فإن $d_2 = -\frac{1}{27}$ وبالتعويض في المعادلة (3) نتحصل على $d_0 = -\frac{1}{3}$.
 أساس المتتالية (d_n) هو: $q' = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_0} = \frac{1}{3}$.

2 كتابة d_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$

المتتالية (d_n) هندسية ومنه: $d_n = d_0(q')^n$ إذن: $d_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 0$ لأن: $1 > \frac{1}{3} > -1$.

3 تعيين أكبر عدد طبيعي n حتى يكون: $d_n < -\frac{3}{10^3}$

لدينا: $d_n < -\frac{3}{10^3}$ يكافئ: $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < -\frac{3}{10^3}$ يكافئ: $\left(\frac{1}{3}\right)^n > \frac{9}{10^3}$ أي $\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n > \ln\left(\frac{9}{10^3}\right)$ معناه $n \ln\left(\frac{1}{3}\right) > \ln\left(\frac{9}{10^3}\right)$ ومنه $n < \frac{\ln\left(\frac{9}{10^3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ أي $n < 4.2877$ من هنا نجد أن أكبر عدد طبيعي n يحقق $d_n < -\frac{3}{10^3}$ هو: $n = 4$.

الجزء الثاني

1 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

الجزء الثالث

$$v_{n+1} = \frac{a + v_n}{1 + av_n} \text{ ومنه } v_{n+1} = e^{f_a(v_n) - v_n} = e^{\ln\left(\frac{a+v_n}{1+av_n}\right) + v_n - v_n} = e^{\ln\left(\frac{a+v_n}{1+av_n}\right)} \text{ لدينا:}$$

1 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n \neq 0$

- من أجل $n = 0$ لدينا: $v_0 = a$ ونعلم أن $a \neq 0$ ومنه $v_0 \neq 0$ إذن الخاصية " $v_n \neq 0$ " محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن $v_n \neq 0$ ونبرهن أن $v_{n+1} \neq 0$.

لدينا من الفرض: $v_n \neq 0$ يكافئ $v_n + a \neq a$ و $a \neq 0$ إذن $(*)$ $v_n + a \neq 0$ ومن جهة أخرى لدينا: $av_n \neq 0$ أي $av_n + 1 \neq 1$ يكافئ $(**)$ $\frac{1}{1+av_n} \neq 1$ بضرب $(*)$ في $(**)$ طرف بطرف نجد أن $v_{n+1} \neq 0$.
 إذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n \neq 0$.

2 تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة

المتتالية (v_n) ثابتة معناه $v_{n+1} = v_n = v_0 = a$ وعليه بالتعويض نجد: $a = \frac{a+a}{1+a \cdot a}$ يكافئ $a(1+a^2) = 2a$ أي $a^3 - a = 0$ معناه: $a(a^2 - 1) = 0$ حلول هذه المعادلة الأخيرة هي: $s = \{-1; 0; 1\}$ وبما أن $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإن قيمة a حتى تكون المتتالية (v_n) هي: $a = 1$.

1 إيجاد قيمة b حتى تكون المتتالية (w_n) هندسية مع تعيين كل من أساسها q وحدّها الأول w_0 بدلالة a

بما أنّ $1 - ba \neq 0$ فإنّه لدينا :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1} - b}{v_{n+1} + b} = \frac{\frac{a + v_n}{1 + av_n} - b}{\frac{a + v_n}{1 + av_n} + b} = \frac{a + v_n - b - b av_n}{a + v_n + b + b av_n} = \frac{(1 - ba) v_n + (a - b)}{(1 + ba) v_n + (a + b)} = \frac{1 - ba}{1 + ba} \cdot \frac{v_n + \frac{a - b}{1 - ba}}{v_n + \frac{a + b}{1 + ba}}$$

ومنه حتى تكون المتتالية (w_n) هندسية يجب أن يكون :

$$\begin{cases} \frac{a - b}{1 - ba} = -b \\ \frac{a + b}{1 + ba} = b \end{cases} \text{ يكافئ : } \begin{cases} a - b = -b + b^2 a \\ a + b = b + b^2 a \end{cases} \text{ معناه : } \begin{cases} a(b^2 - 1) = 0 \\ a(b^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

بما أنّ $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإنّ $b^2 - 1 = 0$: حلّوها هي : $b = 1$ و $b = -1$ وبما أنّ b عدد حقيقي موجب تماماً فإنّ $b = 1$.

إذن من أجل $b = 1$ نجد : $w_n = \frac{1 - a}{1 + a} \cdot \frac{v_n - 1}{v_n + 1} = \frac{1 - a}{1 + a} \cdot w_{n+1}$

وعليه من أجل $b = 1$ (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1 - a}{1 + a}$ وحدّها الأول $w_0 = \frac{v_0 - 1}{v_0 + 1} = \frac{a - 1}{a + 1}$.

من أجل قيمة b السابقة كتابة عبارة w_n ثم استنتاج عبارة v_n بدلالة كل من n و a

• (w_n) هندسية معناه : $w_n = w_0 \times q^n$ وعليه : $w_n = \frac{a - 1}{a + 1} \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^n = - \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}$ ومنه $w_n = - \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}$

• لدينا : $w_n = \frac{v_n - 1}{v_n + 1}$ يكافئ : $w_n(v_n + 1) = v_n - 1$ أي : $w_n \cdot v_n + w_n = v_n - 1$ معناه : $w_n + 1 = v_n(1 - w_n)$ ومنه :

بتعويض عبارة w_n في المعادلة الأخيرة نجد : $v_n = \frac{1 + w_n}{1 - w_n}$ إذن $v_n = \frac{1 - \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}}$ و $v_n = \frac{1 - \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}}$

حساب كل من : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

لدينا : $1 - a < 1 + a$ وعليه : $1 - \frac{1 - a}{1 + a} < 1 + \frac{1 - a}{1 + a}$ (واضح أنّ $1 + a$ عدد حقيقي موجب تماماً) ، ومنه :

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(- \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1} \right) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1} = 0$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1} \right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1} \right)} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{n+1}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

2 - نضع في كلّ ممّا يلي $b = 1$ و $a = 3$.

من أجل $a = 3$ لدينا : $w_0 = \frac{1}{2}$ و $q = -\frac{1}{2}$ كتابة بدلالة n المجموع s_n

$$s_n = w_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{3}$ لأنّ : $-1 < -\frac{1}{2} < 1$.

كتابة بدلالة n المجموع s'_n

لدينا : $w_n = \frac{v_n - 1}{v_n + 1}$ يكافئ : $w_n = \frac{v_n - 1}{v_n + 1} = \frac{v_n + 1 - 2}{v_n + 1} = \frac{v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2}{v_n + 1} = 1 - \frac{2}{v_n + 1}$ ومنه : $\frac{2}{v_n + 1} = 1 - w_n$ وبالتالي : $\frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - w_n)$

$$\begin{aligned} s'_n &= \frac{1}{v_0 + 1} + \frac{1}{v_1 + 1} + \frac{1}{v_2 + 1} + \dots + \frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - w_0) + \frac{1}{2}(1 - w_1) + \frac{1}{2}(1 - w_2) + \dots + \frac{1}{2}(1 - w_n) \\ &= \frac{1}{2}((1 - w_0) + (1 - w_1) + (1 - w_2) + \dots + (1 - w_n)) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 1 + \dots + 1 - (w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n)) \\ &= \frac{1}{2}((n + 1) - s_n) = \frac{1}{2}\left((n + 1) - \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

ومنه : $s'_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n$ ، ثم استنتاج طبيعة المتتالية (s'_n)

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) = +\infty$ ومنه المتتالية (s'_n) متباعدة .

كتابة بدلالة n المجموع s''_n

وجدنا في السؤال السابق : $\frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - w_n)$ وبترتيب الطرفين نجد : $\left(\frac{1}{v_n + 1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(1 - w_n)\right)^2$ إذن : $\frac{1}{(v_n + 1)^2} = \frac{1}{4}(1 - 2w_n + w_n^2)$ ومنه : $\frac{1}{(v_n + 1)^2} = \frac{1}{4}(1 - w_n)^2$

$$\begin{aligned} s''_n &= \frac{1}{(v_0 + 1)^2} + \frac{1}{(v_1 + 1)^2} + \frac{1}{(v_2 + 1)^2} + \dots + \frac{1}{(v_n + 1)^2} \\ &= \frac{1}{4}(1 - 2w_0 + w_0^2) + \frac{1}{4}(1 - 2w_1 + w_1^2) + \frac{1}{4}(1 - 2w_2 + w_2^2) + \dots + \frac{1}{4}(1 - 2w_n + w_n^2) \\ &= \frac{1}{4}(1 - 2w_0 + w_0^2 + 1 - 2w_1 + w_1^2 + 1 - 2w_2 + w_2^2 + \dots + 1 - 2w_n + w_n^2) \\ &= \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + \dots + 1 - 2(w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n) + (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2)) \\ &= \frac{1}{4}((n + 1) - 2s_n + (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2)) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + ((w_0 q^0)^2 + (w_0 q^1)^2 + (w_0 q^2)^2 + \dots + (w_0 q^n)^2)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + w_0^2(q^0)^2 + w_0^2(q^1)^2 + w_0^2(q^2)^2 + \dots + w_0^2(q^n)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + w_0^2(q^0 + q^{2(1)} + q^{2(2)} + \dots + q^{2(n)})\right) = \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + w_0^2\left(\frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2\left(\frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n + 1) - \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

ومنه : $s''_n = \frac{n}{4} - \frac{1}{12}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{6}$

كتابة بدلالة كل من n و m المجموع h_n

لدينا : $w_n^m = (w_0 q^n)^m = w_0^m (q^n)^m = w_0^m \cdot q^{n(m)} = w_0^m \cdot (q^m)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^n$
 ومنه المتتالية (w_n^m) هندسية أساسها هو : $q^m = \left(-\frac{1}{2}\right)^m$ وحدّها الأول هو : $w_0^m = \left(\frac{1}{2}\right)^m$ وعليه :

$$h_n = w_0^m \left(\frac{1 - (q^m)^{n+1}}{1 - q^m} \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^m} \right) = \frac{1^m}{2^m} \left(\frac{1 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^{n+1}}{1 - \frac{(-1)^m}{2^m}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^m} \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{\frac{2^m - (-1)^m}{2^m}} \right) = \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{2^m - (-1)^m} \right)$$

ومنه $h_n = \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{2^m - (-1)^m} \right)$ حيث m عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . (لاحظ أنّه لَمَّا $m = 1$ يُصبح $h_n = s_n$) .

كتابة بدلالة n الجداء G_n

لدينا : $\ln G_n = \ln |w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n| = \ln |w_0| + \ln |w_1| + \ln |w_2| + \dots + \ln |w_n|$ هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا : $\ln |w_n| = \ln |w_0 \cdot q^n| = \ln |w_0| + \ln |q^n| = \ln |w_0| + n \ln |q|$ إذن المتتالية $(\ln |w_n|)$ حسابية أساسها هو : $r = \ln |q| = \ln \left| -\frac{1}{2} \right| = \ln \left| \frac{1}{2} \right| = -\ln 2$ وحدها الأول هو : $\ln |w_0| = \ln \left| \frac{1}{2} \right| = -\ln 2$ إذن :

$$\ln G_n = \left(\frac{n+1}{2} \right) (\ln |w_0| + \ln |w_n|) = \left(\frac{n+1}{2} \right) (\ln |w_0| + \ln |w_0| + n \ln |q|) = \left(\frac{n+1}{2} \right) (2 \ln |w_0| + n \ln |q|)$$

$$= (n+1) \left(\ln |w_0| + \frac{n}{2} \ln |q| \right) = (n+1) \left(-\ln(2) - \frac{n \ln(2)}{2} \right) = -(n+1) \ln(2) \left(1 + \frac{n}{2} \right)$$

وعليه : $G_n = e^{-(n+1) \ln(2) \left(1 + \frac{n}{2} \right)}$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n$ ، ثم استنتاج طبيعة المتتالية (G_n)

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(n+1) \ln(2) \left(1 + \frac{n}{2} \right)} = 0$ لأنّ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -(n+1) \ln(2) \left(1 + \frac{n}{2} \right) = -\infty$ ومنه المتتالية (G_n) متقاربة .

كتابة بدلالة n الجداء E_n

$$E_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times e^{w_2} \times \dots \times e^{w_n} = e^{w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n} = e^{s_n} = e^{\frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)}$$

طبيعة المتتالية (E_n) مع تبرير الإجابة

إنّ المتتالية (E_n) متقاربة ، التبرير : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)} = e^{\frac{1}{3}}$ لأنّ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

كتابة بدلالة n الجداء P_n

$$P_n = w_0^{2020} \times w_1^{2020} \times w_2^{2020} \times \dots \times w_n^{2020} = (w_0 q^0)^{2020} \times (w_0 q^1)^{2020} \times (w_0 q^2)^{2020} \times \dots \times (w_0 q^n)^{2020}$$

$$= w_0^{2020} \cdot (q^0)^{2020} \times w_0^{2020} \cdot (q^1)^{2020} \times w_0^{2020} \cdot (q^2)^{2020} \times \dots \times w_0^{2020} \cdot (q^n)^{2020}$$

$$= w_0^{2020} \cdot w_0^{2020} \cdot w_0^{2020} \cdot \dots \cdot w_0^{2020} \times q^{2020(0)} \cdot q^{2020(1)} \cdot q^{2020(2)} \cdot \dots \cdot q^{2020(n)}$$

$$= (w_0^{2020})^{n+1} \times q^{2020(0+1+2+\dots+n)} = w_0^{2020(n+1)} \times q^{2020 \left(\frac{n+1}{2} \right) (0+n)} = w_0^{2020(n+1)} \times q^{1010n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{1010n(n+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1010n(n+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1) + 1010n(n+1)}$$

ومنه : $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1010(n+1)(2+n)}$

•  تبين أن المتتالية (P_n) متقاربة

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1010(n+1)(2+n)} = 0$ وبالتالي المتتالية (P_n) متقاربة .

3  التَّحَقَّق أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ $n \in \mathbb{N}$ وَ $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فَإِنَّ : $\frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - 1 = \frac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}$

$$\frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - 1 = \frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - \left(\frac{1+\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}\right) = \frac{2-1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}} = \frac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}$$

 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ثم حساب من جديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

• من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{0+1}} - 1 = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 4 - 1 = 3 = v_0$ ومنه الخاصية " $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ " محققة

• نأخذ $n = 0$.
• نفرض أن : $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ونبرهن أن : $v_{n+1} = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} - 1$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{3+v_n}{1+3v_n} = \frac{3+\left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right)}{1+3\left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right)} = \frac{2+\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}}{-2+\frac{6}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}} = \frac{2\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+2}{-2\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+6} \\ &= \frac{4+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{4-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{4\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{4\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} - 1 \end{aligned}$$

إذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$

ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right) = 1$ لأن : $-1 < -\frac{1}{2} < 1$

الجزء الخامس

1  دراسة تغيرات الدالة f_3 على المجال $[1;4]$

المشتقة

الدالة f_3 معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1;4]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f_3'(x) = \frac{1+3x-3(3+x)}{(1+3x)^2} + 1 = \frac{-8}{(3+x)(1+3x)} + 1 = \frac{-8+3+9x+x+3x^2}{(3+x)(1+3x)} = \frac{3x^2+10x-5}{(3+x)(1+3x)}$$

إشارة $f_3'(x)$ من إشارة $3x^2+10x-5$ لأن : $(3+x)(1+3x)$ موجب تماما على المجال $[1;4]$.

لنحل المعادلة التالية : $3x^2 + 10x - 5 = 0$ مميزها هو $\Delta = b^2 - 4ac = 100 + 60 = 160$ وعليه : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{160}$ إذن حلولها هي :
 $x_2 = \frac{-10 + \sqrt{160}}{6}$ و $x_1 = \frac{-10 - \sqrt{160}}{6}$ وتكون إشارة كثير الحدود $A(x) = 3x^2 + 10x - 5$ كالآتي :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$A(x)$	+	0	-	0	+

لكن : $x \in [1; 4]$ و $x_2 < 1$ ومنه : $f_3'(x) > 0$ إذن الدالة f_3 متزايدة تماماً على المجال $[1; 4]$. ويكون جدول تغيراتها كالآتي :

x	1	4
$f_3'(x)$		+
$f_3(x)$	1	$\ln\left(\frac{7}{13}\right) + 4$

2 **تبين أن** $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) = \ln\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x}\right)$

$$\ln\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{1+3x}{3+9x} + \frac{8}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{9+3x}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{3(3+x)}{3(1+3x)}\right) = \ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)$$

3 **دراسة وضعية المنحنى (C_{f_3}) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ على $[1; 4]$**

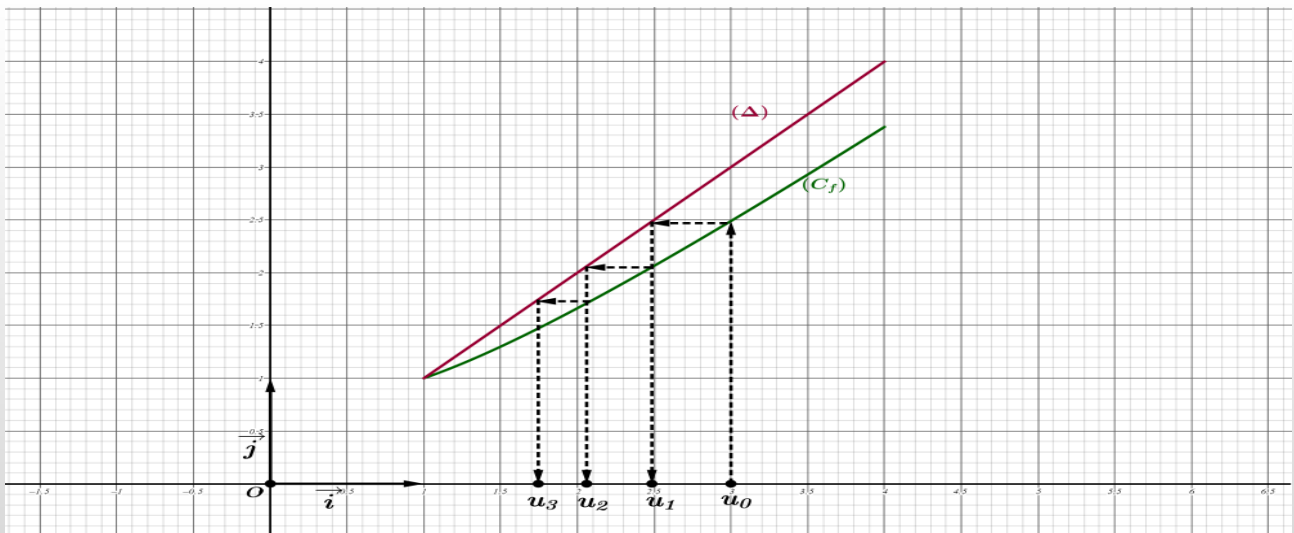
لدينا : $f_3(x) - y = f_3(x) - x = \ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) = \ln\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x}\right)$
 دراسة إشارة $f_3(x) - y$

$f_3(x) - y = 0$ معناه : $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) = 0$ أي : $\frac{3+x}{1+3x} = 1$ معناه : $3+x = 1+3x$ ومنه : $x = 1$.

لما $x > 1$ يكافئ : $9x > 9$ معناه : $9x + 3 > 12$ أي : $\frac{1}{9x+3} < \frac{1}{12}$ يكافئ : $\frac{1}{3} + \frac{1}{9x+3} < \frac{5}{12}$ وعليه : $\ln\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3+9x}\right) < \ln\left(\frac{5}{12}\right)$ ومنه : $f_3(x) - y < 0$.

- لما $x \in]1; 4]$ المنحنى (C_{f_3}) يقع تحت المستقيم (Δ) ويتقاطعان في النقطة $(1; 1)$.

3 **إنشاء المنحنى (C_{f_3}) على المجال $[1; 4]$**



إنشاء المنحنى (C_{f_3}) وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3

4 البرهان أنه إذا كان $x \in [1; 4]$ فإن $f_3(x) \in [1; 4]$

لدينا : $x \in [1; 4]$ معناه $1 \leq x \leq 4$ بما أن الدالة f_3 متزايدة فإن : $f_3(1) \leq f_3(x) \leq f_3(4)$ يكافئ : $1 \leq f_3(x) \leq \ln\left(\frac{7}{13}\right) + 4$ بما أن : $f_3(x) \in [1; 4]$ فإن : $1 \leq f_3(x) \leq 4$ ومنه : $f_3(x) \in [1; 4]$.

الجزء السادس

1 تبرير وجود المتتالية (u_n)

لدينا من السؤال 4 في الجزء الخامس فإن : $u_n \in [1; 4]$ وعليه المتتالية (u_n) موجودة .

تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 ممثلة في الرسم السابق .

وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال البيان نلاحظ أن حدود المتتالية (u_n) تتناقص وبالتالي تخمن أنها متناقصة كما نلاحظ أنها تتقارب نحو نقطة تقاطع المنحنى (C_{f_3}) مع المنصف الأول (المستقيم (Δ)) وعليه تخمن أنها متقاربة نحو النقطة ذات الفاصلة 1 .

2 البرهان بالترجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n < 4$

• من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3$ ونعلم أن : $1 \leq 3 < 4$ ومنه : $1 \leq u_0 < 4$ ومنه الخاصية " $1 \leq u_n < 4$ " محققة من أجل $n = 0$.

• نفرض أن : $1 \leq u_n < 4$ ونبرهن أن : $1 \leq u_{n+1} < 4$:

لدينا من الفرض : $1 \leq u_n < 4$ بما أن الدالة f_3 متزايدة فإن : $f_3(1) \leq f_3(u_n) < f_3(4)$ يكافئ : $1 \leq u_{n+1} < \ln\left(\frac{7}{13}\right) + 4$ بما أن : $1 \leq u_{n+1} < \ln\left(\frac{7}{13}\right) + 4$ فإن : $1 \leq u_{n+1} < 4$.

إذن حسب البرهان بالترجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n < 4$.

تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} \leq u_n$ ثم استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

وجدنا مما سبق أنه من أجل كل x من المجال $[1; 4]$ فإن : $f_3(x) - x \leq 0$ وعليه بما أن : $1 \leq u_n < 4$ فإن : $f_3(u_n) - u_n \leq 0$ أي : $f_3(u_n) \leq u_n$.
إذن : $u_{n+1} \leq u_n$ هذا ما يبين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

إثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n < 4$ معناه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1 وبما أنها متناقصة فإنها متقاربة نحو 1 .

إيجاد نهاية المتتالية (u_n)

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ حيث l عدد حقيقي .

إيجاد l

لدينا : $f_3(l) = l$ يكافئ : $\ln\left(\frac{3+l}{1+3l}\right) + l = l$ أي : $\ln\left(\frac{3+l}{1+3l}\right) = 0$ معناه : $\frac{3+l}{1+3l} = 1$ وبالتالي : $3+l = 1+3l$ ومنه : $l = 1$.

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3 تبين أنه من أجل كل x من المجال $[1; 4]$ فإن : $f'_3(x) \leq f'_3(4)$

الدالة f'_3 معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1; 4]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f_3''(x) = \frac{(6x+10)(3+x)(1+3x) - (6x+10)(3x^2+10x-5)}{(3+x)^2(1+3x)^2} = \frac{(6x+10)[3x^2+10x+3 - (3x^2+10x-5)]}{(3+x)^2(1+3x)^2}$$

ومنه : $f_3''(x) = \frac{16(3x+5)}{(3+x)^2(1+3x)^2}$ ، واضح أنه من أجل كل x من المجال $[1; 4]$ فإن : $f_3''(x) > 0$ ومنه الدالة f'_3 متزايدة تماما على $[1; 4]$.

لدينا : $x \leq 4$ وعليه بما أن الدالة f'_3 متزايدة تماما على المجال $[1; 4]$ فإن : $f'_3(x) \leq f'_3(4)$.

حساب $f'_3(4)$

$$f'_3(4) = \frac{3(4)^2 + 10(4) - 5}{(3+4)(1+3(4))} = \frac{3(16) + 40 - 5}{(7)(13)} = \frac{83}{91}$$

$$u_{n+1} - 1 \leq \frac{83}{91} (u_n - 1) : n \in \mathbb{N} \text{ تبين أنه من أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

لدينا : $f_3'(x) \leq f_3'(4)$ وبما أن الدالة f_3' مستمرة فإنها تقبل المكاملة على المجال $[1; 4]$ وبما أن : $1 \leq u_n < 4$ فإن : $\int_1^{u_n} f_3'(x) dx \leq \int_1^{u_n} f_3'(4) dx$: $\int_1^{u_n} f_3'(x) dx \leq f_3'(4) \int_1^{u_n} dx$ معناه : $\int_1^{u_n} f_3'(x) dx \leq f_3'(4) [x + c_2]_1^{u_n} = f_3'(4) [u_n - 1 + c_2 - 1 - c_2] = f_3'(4) (u_n - 1)$ - حيث c_1 و c_2 عددين حقيقيين -
وعليه : $f_3(u_n) - f_3(1) \leq f_3'(4) (u_n - 1)$ ومنه : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{83}{91} (u_n - 1)$ و.ه.م .

$$0 \leq u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n \text{ تبين أنه من أجل كل } n \text{ عدد طبيعي :}$$

باستعمال المتباينة السابقة - $u_{n+1} - 1 \leq \frac{83}{91} (u_n - 1)$ - لدينا :

$$n = 0 : u_1 - 1 \leq \frac{83}{91} (u_0 - 1)$$

$$n = 1 : u_2 - 1 \leq \frac{83}{91} (u_1 - 1)$$

$$n = 2 : u_3 - 1 \leq \frac{83}{91} (u_2 - 1)$$

⋮

$$n = n - 2 : u_{n-1} - 1 \leq \frac{83}{91} (u_{n-2} - 1)$$

$$n = n - 1 : u_n - 1 \leq \frac{83}{91} (u_{n-1} - 1)$$

بضرب المتباينات طرف بطرف نجد :

$$(u_1 - 1) (u_2 - 1) (u_3 - 1) \dots (u_{n-1} - 1) (u_n - 1) \leq \left(\frac{83}{91} \right)^n (u_0 - 1) (u_1 - 1) (u_2 - 1) \dots (u_{n-2} - 1) (u_{n-1} - 1)$$

إذن بعد الاختزالات نجد : $(u_n - 1) \leq \left(\frac{83}{91} \right)^n (u_0 - 1)$ يكافئ : $u_n - 1 \leq \left(\frac{83}{91} \right)^n (3 - 1)$ ومنه : $u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n$ هذا من جهة

ومن جهة أخرى لدينا : $u_n \leq 1$ وعليه : $u_n - 1 \leq 0$ إذن نجد : $0 \leq u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n$ و.ه.م .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ استنتاج}$$

لدينا : $0 \leq u_n - 1 \leq 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n$ وكذلك $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{83}{91} \right)^n = 0$ لأن : $\frac{83}{91} < 1$ إذن حسب النهايات بالحصص نحصل على :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 1) = 0 \text{ ومنه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n \text{ حساب}$$

4

لدينا : $f_3(u_k) = \ln \left(\frac{3 + u_k}{1 + 3u_k} \right) + u_k$ يكافئ : $-\ln \left(\frac{3 + u_k}{1 + 3u_k} \right) = u_k - f_3(u_k)$ ومنه : $\ln \left(\frac{1 + 3u_k}{3 + u_k} \right) = u_k - u_{k+1}$ إذن :

$$\begin{aligned} T_n &= \ln \left(\frac{1 + 3u_0}{3 + u_0} \right) + \ln \left(\frac{1 + 3u_1}{3 + u_1} \right) + \ln \left(\frac{1 + 3u_2}{3 + u_2} \right) + \dots + \ln \left(\frac{1 + 3u_{n-1}}{3 + u_{n-1}} \right) \\ &= (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{n-2} - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_n) \\ &= u_0 - u_n \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - u_n) = 3 - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 - 1 = 2 \text{ وعليه : } T_n = 3 - u_n$$

الجزء السابع

$$L_{n+1} = 2L_n f_5(L_n) - L_n^2 = 2L_n \left(\ln \left(\frac{5 + L_n}{1 + 5L_n} \right) + L_n \right) - L_n^2 = 2L_n \cdot \ln \left(\frac{5 + L_n}{1 + 5L_n} \right) + 2L_n^2 - L_n^2 = 2L_n \cdot \ln \left(\frac{5 + L_n}{1 + 5L_n} \right) + L_n^2$$

وعليه نلاحظ أن : $L_{n+1} = g(L_n)$

$$0 \leq L_n \leq 1 \text{ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن :}$$

1

• من أجل $n = 0$ لدينا : $L_0 = \frac{1}{5} \leq 1$ ونعلم أن : $0 \leq L_0 \leq 1$ إذن الخاصية " $0 \leq L_n \leq 1$ " محققة من أجل $n = 0$

• نفرض أنّ : $0 \leq L_n \leq 1$ ونبرهن أنّ : $0 \leq L_{n+1} \leq 1$.

لدينا من الفرض : $0 \leq L_n \leq 1$ بما أنّ الدالة g متزايدة فإنّ : $g(0) \leq g(L_n) \leq g(1)$ وعليه : $0 \leq L_{n+1} \leq 1$ إذن حسب البرهان بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $0 \leq L_n \leq 1$.

2 **تبين أنّه من أجل كل $x \in [0;1]$: $2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x \geq 1$**

نضع من أجل كل x من المجال : $[0;1]$: $h(x) = 2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x$:
الدالة h معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;1]$ ودالتها المشتقة هي :

$$h'(x) = 2 \left(\frac{\frac{1+5x-5(5+x)}{(1+5x)^2}}{\frac{5+x}{1+5x}} \right) + 1 = 2 \left(\frac{-24}{(1+5x)(5+x)} \right) + 1 = \frac{5x^2 + 26x - 43}{(1+5x)(5+x)}$$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $5x^2 + 26x - 43$ لأنّ : $(1+5x)(5+x)$ موجب تماما على المجال $[0;1]$.
لنحل المعادلة التالية : $5x^2 + 26x - 43 = 0$ مميزها هو $\Delta = b^2 - 4ac = 676 + 860 = 1536$ وعليه : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1536}$ إذن حلولها هي :
 $x_1 = \frac{-13 - 8\sqrt{6}}{5}$ و $x_2 = \frac{-13 + 8\sqrt{6}}{5}$. وتكون إشارة كثير الحدود $B(x) = 3x^2 + 10x - 5$ كالآتي :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$B(x)$		+	-	+

لكن : $x \in [0;1]$ و $x_1 < 0$ و $x_2 > 1$ ومنه : $h'(x) < 0$ إذن الدالة h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$.
وعليه لما $x \leq 1$ وبما أنّ الدالة h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$ فإنّ : $h(x) \geq h(1)$ أي : $h(x) \geq 1$ ومنه : $2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x \geq 1$ و.ه.م.

3 **إثبات أنّ المتتالية (L_n) متزايدة**

بما أنّ حدود المتتالية (L_n) موجبة فإنّ :

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2L_n f_5(L_n) - L_n^2}{L_n} = 2f_5(L_n) - L_n = 2 \left(\ln \left(\frac{5+L_n}{1+5L_n} \right) + L_n \right) - L_n = 2 \ln \left(\frac{5+L_n}{1+5L_n} \right) + L_n$$

وجدنا أنّه من أجل كل x من المجال $[0;1]$ فإنّ : $2 \ln \left(\frac{5+x}{1+5x} \right) + x \geq 1$ وبما أنّ : $0 \leq L_n \leq 1$ فإنّ : $2 \ln \left(\frac{5+L_n}{1+5L_n} \right) + L_n \geq 1$ وعليه :
 $\frac{L_{n+1}}{L_n} \geq 1$ ومنه : $L_{n+1} \geq L_n$ إذن : $L_{n+1} - L_n \geq 0$ لنجد في الأخير أنّ المتتالية (L_n) متزايدة و.ه.م.

4 **تبين أنّ (L_n) متقاربة ثم إيجاد نهايتها**

وجدنا أنّ : $0 \leq L_n \leq 1$ هذا معناه أنّ المتتالية (L_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 وبما أنّها متزايدة فهي متقاربة نحو 1.
إيجاد نهاية المتتالية (L_n)

بما أنّ (L_n) متقاربة فإنّ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{n+1} = l_1$ حيث l_1 عدد حقيقي.

لدينا : $l_1 = g(l_1)$ أي : $g(l_1) - l_1 = 0$ ومنه حسب ماهو مُعطى : $g(x) - x = 0$ لما $x = 1$ نجد أنّ : $l_1 = 1$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 1$.

3 **تبين أنّ المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان**

وجدنا ممّا سبق أنّ :

• المتتالية (u_n) متناقصة بينما المتتالية (L_n) متزايدة.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \bullet$$

إذن المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان.

بالتوفيق والنجاح إن شاء الله في شهادة البكالوريا

أعظم هندسة في العالم :

بناء جسرٍ من الأمل ... على نحرٍ من اليأس !!