



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسية e^x

5

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 19

(I) لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

(1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (ارشاد: ضع $t = x$ تارة و $t = 1-x$ تارة أخرى)

(2) نضع: $g(x) = e^x - x - 1$ حيث: $D_g = \mathbb{R}$

أ/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

(4) اثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث:

$$-1.14 < \alpha < -1.15 \quad \text{و} \quad 1.84 < \beta < 1.85$$

(5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) أ/ اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1 + g(x))^2}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) مثل بيانيا (C_f) .

(I)

(1) إيجاد عبارة $g(x)$ بدلالة x :

نضع: $x = t$ نجد:

$$\begin{aligned} g(t) - 2g(1-t) &= e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \\ \Rightarrow -2g(1-t) &= -g(t) + e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \\ \Rightarrow \boxed{2g(1-t) = g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3} \dots (1) \end{aligned}$$

نضع: $x = 1 - t$ معناه: $t = 1 - x$ ، نجد:

$$\begin{aligned} g(1-t) - 2g(1-1+t) &= e^{1-t} - 2e^{1-1+t} - 3(1-t) + 3 \\ \Rightarrow g(1-t) - 2g(t) &= e^{1-t} - 2e^t + 3t \\ \Rightarrow \boxed{2g(1-t) - 4g(t) = 2e^{1-t} - 4e^t + 6t} \dots (2) \end{aligned}$$

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$\begin{aligned} g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 - 4g(t) &= 2e^{1-t} - 4e^t + 6t \\ -e^t - 3 &= -4e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -3g(t) &= -3e^t + 3t + 3 \\ \Rightarrow g(t) &= e^t - t - 1 \end{aligned}$$

إذن :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

(2)

أ/ حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - x - 1] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا:

$$g'(x) = e^x - 1$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 1 - g(-x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: نضع:

$$v(x) = (g \circ u)(x) \quad \text{أي} \quad v(x) = g(u(x)) = g(-x) \quad \text{و} \quad u(x) = -x$$

لدينا الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ والدالة u متناقصة على المجال $[0; +\infty[$
المجال I المجال $g(I)$

كيف وجدنا المجال $g(I)$:

لدينا: $I =]-\infty; 0]$ و $u(x) \in I$ معناه $u(x) \leq 0$ أي $-x \leq 0$ ومنه $x \geq 0$ أي $x \in [0; +\infty[$
ومنه: $g(I) = [0; +\infty[$.

وبما أن الدالة g متناقصة على $]-\infty; 0]$ و الدالة u متناقصة على $[0; +\infty[$

إذن الدالة k متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

بنفس الفكرة نجد: الدالة k متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$

- واضح أن $g(-x) = k(x)$ أي: $-g(-x) = -k(x)$

وعليه:

$-k(x)$ متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و متناقصة على المجال $[0; +\infty[$

ولدينا $h(x)$ و $-k(x)$ لهما نفس اتجاه التغير لأن: $h(x) = 1 - k(x)$

اذن:

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f(x)$	0	0	$h(0) = 1$	0	$-\infty$

(4) اثبات أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β :

لدينا الدالة h مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $h(-1.15) = -0.08$ و $h(-1.14) = 0.01$

ولدينا: $h(-1.14) \times h(-1.15) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.15; -1.14[$

ولدينا: $h(1.85) = -0.007$ و $h(1.84) = 0.001$

ولدينا: $h(1.84) \times h(1.85) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1.84; 1.85[$

اذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β

(5) استنتاج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x :

إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات $g(x)$ لدينا:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

إشارة $h(x)$:

من جدول تغيرات $h(x)$ لدينا:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(II)

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x + g(x)}{1 + g(x)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x + e^x - x - 1}{1 + e^x - x - 1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right] \\
 &= \frac{-1}{+\infty} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x + g(x)}{1 + g(x)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} \right] \\
 &= 1 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] &= 0 \text{ لأن: }
 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

(2) / أثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

لدينا البسط عبارة عن مجموعة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام كذلك ومنه البسط على المقام قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- اثبات أن: $f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 - g(-x) \\ &= 1 - e^{-x} - x + 1 \\ &= 2 - x - e^{-x} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{e^x[e^x - x - (1 - e^{-x})(e^x - 1)]}{(e^x - x + 1 - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x - x - e^x + 1 + 1 - e^{-x})}{(1 + g(x))^2} \\ &= \frac{e^x(2 - x - e^{-x})}{(1 + g(x))^2} \\ &= \frac{e^x h(x)}{(1 + g(x))^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $(1 + g(x))^2 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

ولدينا $f(0) = 0$

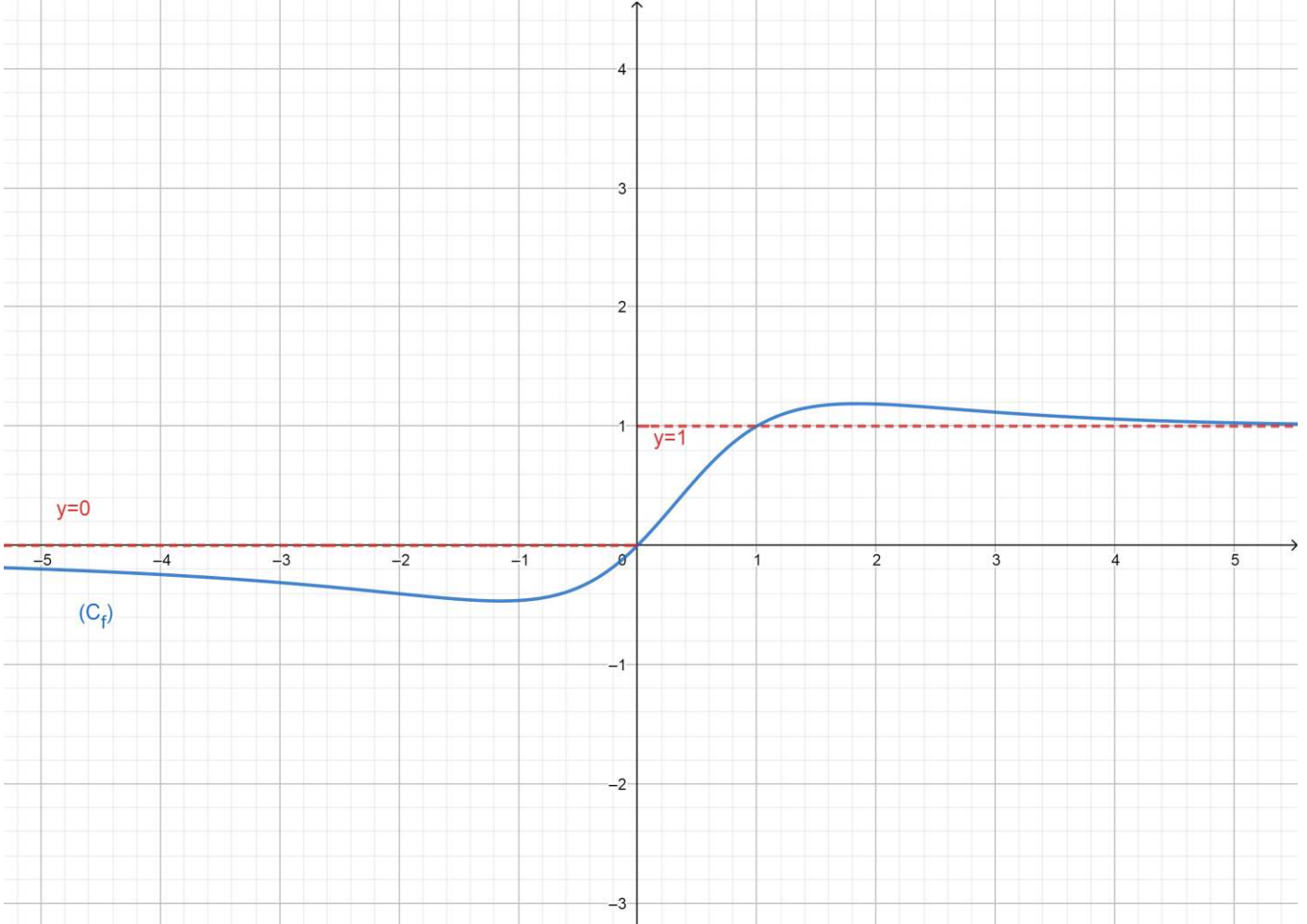
- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0	$f(\beta)$	1

(3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶