

التمرين الأول

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_0 = 3 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$$

① احسب u_1 و u_2 .

② بين أن : $v_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n - 1}$ ثم استنتج أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 و يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

③ اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n (لاحظ أنه يمكن كتابة : $v_n = 1 + \frac{2}{u_n - 1}$).

④ احسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

التمرين الثاني

نأخذ مثلث ABC ، نقطة معرفة بالعلاقة : $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ و G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 2); (C, -1)\}$

① بين أن النقطة I مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 2)\}$.

② أنشئ النقطتين I و G .

③ عين ثم أنشئ (E_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 4$.

④ لتكن K مرجح الجملة $\{(B, 2); (C, -3)\}$ ، بين أن المستقيمين (CI) و (AK) متوازيين.

⑤ نعتبر المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، لتكن النقط $A(1, 2)$ ، $B(2, 1)$ ، $C(0, -3)$ ،

عين إحداثيي النقطة D مركز ثقل المثلث ABC .

◀ عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA}\|$

التمرين الثالث

نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

① عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{3\}$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$.

② احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

③ بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عمودي على محور الفواصل يطلب تعيين معادلة له.

④ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

⑤ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{3\}$: $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$

⑥ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

⑦ بين أن النقطة $\omega(3; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

⑧ ارسم (Δ) و (C_f) .

الإجابة النموذجية

حل التمرين الأول

$$u_2 = \frac{3u_1 - 1}{u_1 + 1} = \frac{3 \times 2 - 1}{2 + 1} = \frac{5}{3}$$

$$u_1 = \frac{3u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 \times 3 - 1}{3 + 1} = 2 : \text{ ① حساب}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{u_n + 1} + 1}{\frac{3u_n - 1}{u_n + 1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1 + u_n + 1}{u_n + 1}}{\frac{3u_n - 1 - u_n - 1}{u_n + 1}} = \frac{4u_n}{2u_n - 2} = \frac{2(2u_n)}{2(u_n - 1)} = \frac{2u_n}{u_n - 1} : \text{ ② تبيان أن } v_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n - 1}$$

◀ استنتاج أن (v_n) متتالية حسابية : لدينا $1 = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 1}{u_n - 1} - \frac{2u_n}{u_n - 1} = v_{n+1} - v_n$ ومنه (v_n) حسابية أساسها 1.

$$v_0 = \frac{u_0 + 1}{u_0 - 1} = \frac{3 + 1}{3 - 1} = 2 \text{ تعيين}$$

$$v_n = v_0 + rn = 2 + n : \text{ ③ كتابة } v_n \text{ بدلالة } n$$

◀ استنتاج u_n بدلالة n : لدينا $v_n = 1 + \frac{2}{u_n - 1}$ أي $u_n = 1 + \frac{2}{v_n - 1}$ إذن $u_n = 1 + \frac{2}{n+1}$.

$$S_n = \frac{(n+1)(2+2+n)}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2} : \text{ ④ حساب المجموع } S_n$$

حل التمرين الثاني

① تبيان أن النقطة I مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 2)\}$

لدينا : $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ أي $3 \times \vec{AI} = 3 \times \frac{2}{3}\vec{AB}$ أي $3\vec{AI} - 2\vec{AB} = \vec{0}$ أي $3\vec{AI} - 2(\vec{AI} + \vec{IB}) = \vec{0}$ أي $3\vec{AI} - 2\vec{AI} - 2\vec{IB} = \vec{0}$ أي $\vec{AI} - 2\vec{IB} = \vec{0}$ و منه $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$ إذن I مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 2)\}$.

$$MG = 2 \text{ أي } 2MG = 4 \text{ أي } \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 4 : \text{ ③ تعيين ثم انشاء } (E)$$

ومنه مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 2.

④ تبيان أن المستقيمين (CI) و (AK) متوازيين.

◀ لدينا : K مرجح الجملة $\{(B, 2); (C, -3)\}$ أي $2\vec{KB} - 3\vec{KC} = \vec{0}$ أي $2(\vec{KI} + \vec{IB}) - 3(\vec{KI} + \vec{IC}) = \vec{0}$ أي $2\vec{KI} + 2\vec{IB} - 3\vec{KI} - 3\vec{IC} = \vec{0}$ أي $-\vec{KI} + 2\vec{IB} - 3\vec{IC} = \vec{0} \dots (1)$ و لدينا أيضا : $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$ أي $(\vec{IK} + \vec{KA}) + 2\vec{IB} = \vec{0}$ أي $-\vec{KI} + 2\vec{IB} - \vec{AK} = \vec{0} \dots (2)$ ونطرح (2) من (1) نجد : $3\vec{CI} + \vec{AK} = \vec{0}$ ومنه $\vec{AK} = -3\vec{CI}$ إذن (CI) و (AK) متوازيين.

⑤ تعيين إحداثيي النقطة D

$$D(1; 0) \text{ إذن } \begin{cases} x_D = \frac{0+2+1}{3} \\ y_D = \frac{2+1-3}{3} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_D = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_D = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

$$MD = MA \text{ أي } 3MD = 3MA \text{ أي } \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{3MA}\| : \text{ ⑥ تعيين } (\Gamma)$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي المستقيم المحوري للقطعة $[AD]$.

حل التمرين الثالث

① تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c

$$f(x) = ax + b + \frac{ax^2 + (-3a + b)x + -3b + c}{x - 3} \text{ أي } f(x) = ax + b + \frac{(ax + b)(x - 3) + c}{x - 3} \text{ أي } f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

بالمطابقة نجد : $a = 1$ ، $-3a + b = -5$ ، $-3b + c = 7$ ، $c = 1$ ، $b = -2$ ، $a = 1$ ومنه

② حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\overbrace{x^2 - 5x + 7}^1}{\underbrace{x - 3}_{0+}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\overbrace{x^2 - 5x + 7}^1}{\underbrace{x - 3}_{0-}} = -\infty$$

③ معادلة المستقيم المقارب العمودي على محور الفواصل : $x = 3$.

④ تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + \frac{1}{x - 3} - (x - 2) \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 3} = 0$$

◀ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

ندرس اشارة الفرق $f(x) - y = \frac{1}{x - 3}$: (C_f) فوق (Δ) في المجال $]3; +\infty[$ ، (C_f) تحت (Δ) في المجال $] -\infty; 3[$

$$\text{⑤ تبين أن : } f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 5)(x - 3) - (1)(x^2 - 5x + 7)}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 5x + 15 - x^2 + 5x - 7}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 8}{(x - 3)^2}$$

⑥ تعيين اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

ندرس اشارة المشتقة : نحل المعادلة $x^2 - 6x - 8 = 0$ ، نحسب $\Delta = 4$ ومنه $x = 2$ أو $x = 4$ اذن :

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجالين : $]2; 3[$ و $]3; 4[$ و متزايدة تماما على المجالين : $] -\infty; 2[$ و $]4; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	-1		$+\infty$	$+\infty$

⑦ اثبات أن $\omega(3; 1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

$$\text{نبين أن : } f(6 - x) + f(x) = 2 \text{ لدينا : } f(6 - x) + f(x) = (6 - x) - 2 + \frac{1}{(6 - x) - 3} + x - 2 + \frac{1}{x - 3} = 2$$

ومنه ω مركز تناظر لـ (C_f) .

⑧ رسم (Δ) و (C_f) :

