



سنة الثالثة ثانوي

الشعب:

رياضيات | علوم تجريبية | تقني رياضي

مسألة 24 مسائل

في الدوال الأسية  
مرفقة بحلول مفصلة

+

ملخص بسيط حول الدوال الأسية

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[ 12 نوفمبر 2021 ]

[www.dzexams.com](http://www.dzexams.com)

# ملخص حول الدوال الأسية:

## 1 فرضية:

نقبل أنه توجد دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وتحقق الشرطين:

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

## 2 مبرهنة:

توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث:  $f' = f$  و  $f(0) = 1$ ، نرسم إلى هاته الدالة بالرمز " $exp$ " ونسميها الدالة الأسية.

## 3 العدد $e$ والترميز $e^x$ :

العدد  $e$  هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي  $e = \exp(1)$ ، و  $e \approx 2.718 \dots$

اصطلاحاً نرسم، من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $\exp x = e^x$

## 4 خواص جبرية:

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا:

$$e^{nx} = (e^x)^n$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^x > 0$$

## 5 اتجاه تغير الدالة الأسية:

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $e^x > 0$ .

الدالة الأسية متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$ .

## 6 النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x^n} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^n}{e^x} \right) = 0$$

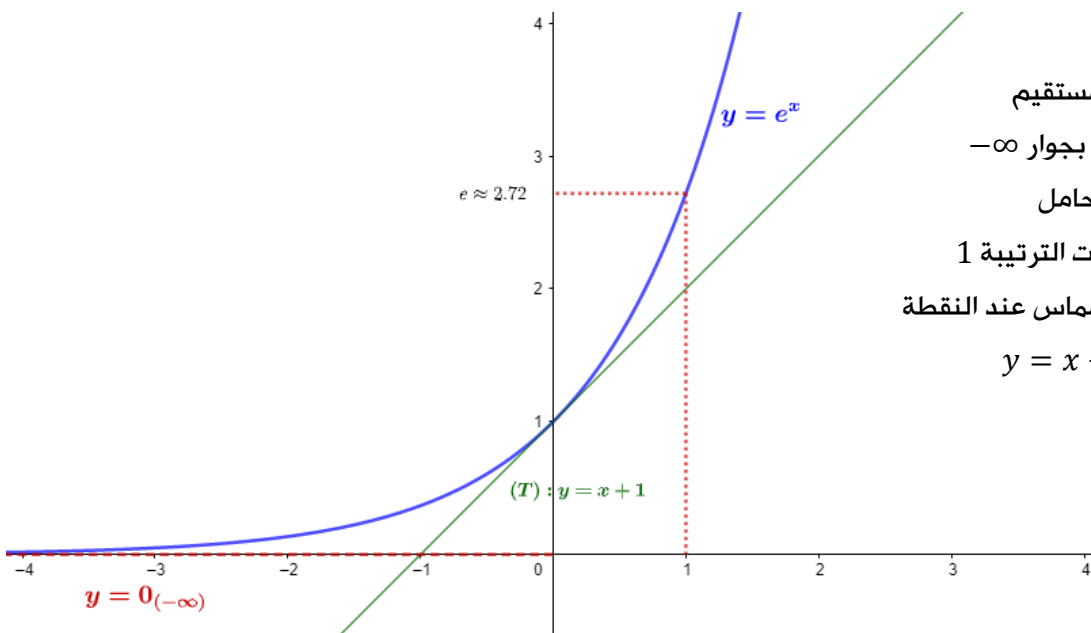
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$$

## 7 المشتقة:

إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن الدالة  $f \circ u$  (حيث:  $f(x) = e^x$ ) قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  ولدينا من أجل كل  $x$  من المجال  $I$ :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}$$

## 8 التمثيل البياني:



منحنى الدالة  $exp$  يقبل مستقيم

مقارب أفقي معادلته  $y = 0$  بجوار  $-\infty$

منحنى الدالة  $exp$  يقطع حامل

محور الترتيب في النقطة ذات الترتيب 1

منحنى الدالة  $exp$  يقبل مماس عند النقطة

ذات الفاصلة 0 معادلته:  $y = x + 1$

# المسائل:

## فهرس المحتويات:

|                  |              |
|------------------|--------------|
| المسألة رقم 01 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 03 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 05 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 07 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 09 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 11 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 13 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 15 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 17 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 19 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 21 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 23 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 02 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 04 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 06 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 08 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 10 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 12 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 14 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 16 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 18 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 20 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 22 : | المسألة الحل |
| المسألة رقم 24 : | المسألة الحل |

♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

**01****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = x - e^{-x}$$

1 ادرس تغيرات الدالة  $g$ 

2

أ/ بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $0.5 < \alpha < 0.6$ ب/ استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ (II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(0; \vec{i}; \vec{j})$ .1 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ 

2

أ/ بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب/ عيّن دون حساب:  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$  فسر النتيجة هندسيا3 شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ 4 بين أن  $f(x) = x$  إذا وفقط إذا كان  $g(x) = 0$  ، ثم استنتج قيمة  $f(\alpha)$ 5 مثل بيانيا  $(C_f)$  .(III) نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على المجال  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمي  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق1 اكتب  $h(x)$  دون رمز القيمة المطلقة2 انطلقا من  $(C_f)$  ، مثل بيانيا  $(C_h)$



02

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(0; \vec{i}; \vec{j})$ .1 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .2 بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن:

$$f'(x) = \left( \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$$

3

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.ب/ عيّن  $f''(\ln 3)$  دون حساب عبارة  $f''(x)$ ، مبرر إجابتك.

4

أ/ بيّن أن المستقيم  $(\Delta_1)$  ذو المعادلة  $y = x + 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  في جوار  $-\infty$ .ب/ بيّن أن المستقيم  $(\Delta_2)$  ذو المعادلة  $y = x - 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  في جوار  $+\infty$ .ج/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني  $(C_f)$  والمستقيمين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$ .5 اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحني  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0.6 بيّن أن النقطة  $A(\ln 3; \ln 3)$  مركز تناظر للمنحني  $(C_f)$ .7 بيّن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $]-2; -1[$ ، ثم عين حصاراً للعدد  $\alpha$  سعته  $10^{-2}$ .8 مثّل بيانياً كلا من:  $(\Delta_1)$ ،  $(\Delta_1)$ .9 ناقش بيانياً حسب القيم الوسيط الحقيقي غير المعلوم  $m$  المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $x$  التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

(II) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = f(3x - 2)$  (عبارة  $g(x)$  غير مطلوبة).1 ادرس تغيرات الدالة  $g$ .2 تحقق من أن:  $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$ ، ثم بيّن أن:  $3f'(\alpha) = g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)$ .3 استنتج معادلة المماس  $(d)$  لمنحني الدالة  $g$  عند النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha+2}{3}$ .4 تحقق من أن معادلة المستقيم  $(d)$  تعطى بـ:

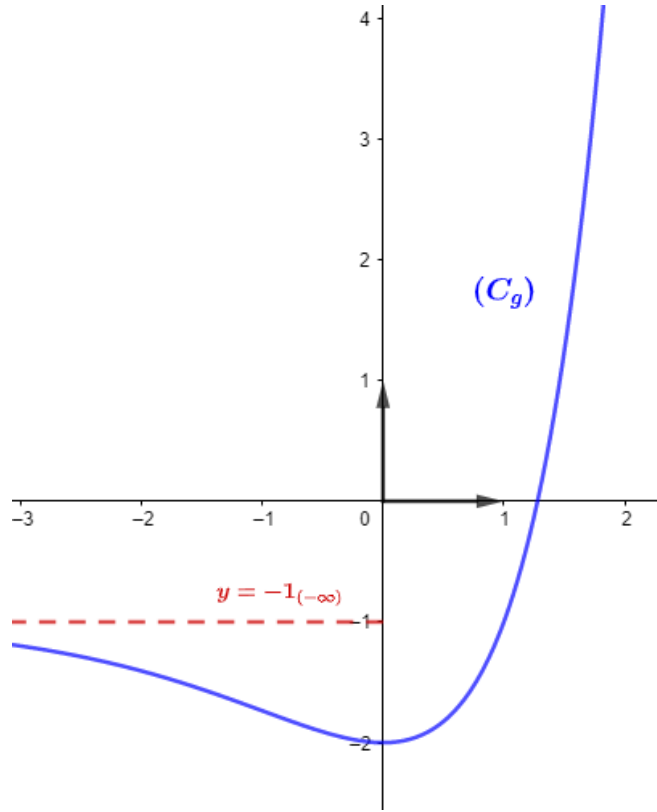
$$y = \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{4}$$



03

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل



(I)  $a, b, c$  أعداد حقيقية، نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

ونسمي  $(C_g)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ . كما في الشكل أدناه:

1 بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ/  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

ب/  $g(0)$  و  $g'(0)$ .

2 مما سبق أوجد الأعداد الحقيقية  $a, b, c$ .

3 نضع:  $g(x) = (x - 1)e^x - 1$

أ/ بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  على  $\mathbb{R}$ ، ثم

تحقق من أن:  $1.2 < \alpha < 1.3$ .

ب/ استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوٍ السابق.

1

أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2

أ/ بيّن أنه من أجل كل  $x$  حقيقي:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 عيّن دون حساب،  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

4 بيّن أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مماساً وحيداً  $(T)$  يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

5 بيّن أن  $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم اوجد حصاراً لـ  $f(\alpha)$  بتقريب  $10^{-2}$ .

6

أ/ بيّن أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ .

ب/ ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ .

7 مثّل بيانياً المماس  $(T)$  والمستقيم  $(\Delta)$  ثم المنحني  $(C_f)$ .

8  $m$  وسيط حقيقي. ناقش بيانياً حسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $f(x) = m$ .



04

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1

أ/ بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

ب/ ادرس إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني  $(C_f)$ ؟ج/ شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .2 برهن أن النقطة  $A(0; 1)$  مركز تناظر المنحني  $(C_f)$ .

3

أ/ بيّن أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$  ثم فسر النتيجة هندسياً.ب/ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$  ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني  $(C_f)$ ؟4 بيّن أن المنحني  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث:  $-2.77 < \alpha < -2.76$ .5 مثل بيانياً  $(C_f)$ .(II) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = f(4x + 1)$  (عبارة  $g$  غير مطلوبة).1 عيّن اتجاه تغير الدالة  $g$ .2 تحقق من أن:  $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$ ، ثم بيّن أن:  $4f'(\alpha) = g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)$ 3 استنتج معادلة المماس  $(T)$  لمنحني الدالة  $g$  في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha-1}{4}$ .4 تحقق من أن معادلة المماس  $(T)$  تعطى بـ:

$$y = (1 + \alpha)^2 x - \frac{(1 + \alpha)(\alpha^2 - 1)}{4}$$

(III) نعتبر الدالة  $k$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $k(x) = f(|x|)$ ، ونسمي  $(C_k)$  تمثيلها البياني في المستوي السابق1 بيّن أن الدالة  $k$  زوجية.2 بيّن كيف تمثيل  $(C_k)$  انطلاقاً من  $(C_f)$ ، ثم أنشئه في المعلم السابق(IV) نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المستوي السابق1 تحقق من أنه كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $h(x) = f(x) + 1$ .2 استنتج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه. ثم أنشئ  $(C_h)$



05

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I)  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 2 + (x - 1)e^{-x}$

1 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

2 ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $-0.38 < \alpha < -0.37$

4 استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II) لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1

أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

ب/ احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1))$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  حيث:  $y = 2x + 1$ .

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون  $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

3 اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4 ارسم  $(\Delta)$ ،  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$  (نأخذ  $f(\alpha) = 0.8$ ).

5 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $x = (1 - m)e^x$

$$x = (1 - m)e^x$$



06

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ 1 ادرس تغيرات الدالة  $f'$ .1 احسب  $f'(1)$  ثم استنتج إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$ .2 ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

3

أ/ بيّن أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ .ب/ ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ .

4

أ/ بيّن أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  يوازي المستقيم  $(\Delta)$  في نقطة يُطلب تعيين إحداثيها.ب/ بيّن أن المنحني  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:

$$-0.6 < \beta < -0.5 \text{ و } 1.9 < \alpha < 2$$

5 مثل بيانيا:  $(\Delta)$ ،  $(T)$  و المنحني  $(C_f)$ .6 نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $x$  والوسيط الحقيقي الموجب تماما  $m$  التالية:

$$f(x) = 2x + \ln m \dots (E)$$

• ناقش بيانيا حسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $(E)$ .



07

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = (2x + 1)e^x - 1$$

1 ادرس تغيرات الدالة  $g'$ 2 احسب  $g(0)$  ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .(II)  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .1 احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها.

2

أ/ بيّن أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

3

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:  $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$ ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.4 اكتب معادلة ديكارتية للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند المبدأ.5 مثّل بيانياً كلا من  $(T)$  ،  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .6 ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $(E)$  ذات المجهول الحقيقي  $x$ :

$$(E): f(x) = mx$$



08

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

نعرف الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

1

أ/ بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

ب/ استنتج أن الدالة  $f$  فردية.2 احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها.

3

أ/ بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

ثم ادرس إشارة  $f'(x)$ .ب/ ماذا تستنتج بالنسبة لـ  $(C_f)$  ؟ج/ شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

4

أ/ بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) + \frac{1}{2}x - 1 \right) = 0$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا.ب/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( f(x) + \frac{1}{2}x + 1 \right)$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا.ج/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني  $(C_f)$  والمستقيم  $(d)$  ذو المعادلة :  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ .5 مثل بيانيا  $(C_f)$ .



09

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

$$\textcircled{1} \text{ بيّن أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

②

أ/ بيّن أن المستقيم المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x + \frac{5}{2}$  مقارب مائل للمنحني  $(C_f)$ .ب/ حل المعادلة:  $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بيّن أن المنحني  $(C_f)$  يقع فوق المستقيم  $(\Delta)$  على المجال  $]-\infty; 2 + \ln 4]$  وتحتعلى المجال  $[2 + \ln 4; +\infty[$ 

③

أ/ بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .④ احسب  $f''(x)$ ، ثم بين أن  $A(2; 2)$  نقطة انعطاف للمنحني  $(C_f)$ .⑤ اثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$ .⑥ مثّل بيانيا  $(\Delta)$  والمنحني  $(C_f)$ .



10

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = e^x + x + 2$$

1 ادرس تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

2

أ/ بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$ . ثم تحقق أن  $-2.2 < \alpha < -2.1$ ب/ استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

1

أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$  ثم فسر النتيجة هندسيا.ب/ بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ .2 تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

3 ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

4

أ/ بيّن أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$ .ب/ ادرس الوضع النسبي بين  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

5

أ/ بيّن أن:  $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$ ، ثم استنتج حصرا لـ  $f(\alpha)$ .ب/ بيّن أن المنحني  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\beta$  حيث:  $0.5 < \beta < 0.6$ .6 مثّل بيانيا المستقيم  $(\Delta)$  والمنحني  $(C_f)$ .7 ليكن  $m$  عدد حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$1 - (x + \ln x)e^x - \ln m = 0$$

**11****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

**(I)** لتكن  $g$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

**1** أوجد عبارة  $g(x)$  بدلالة  $x$ .(ارشاد: ضع  $t = x$  تارة و  $t = 1 - x$  تارة أخرى)**2** نضع:  $g(x) = e^x - x - 1$ أ/ احسب نهايات الدالة  $g$  عند أطراف مجموعة تعريفها.ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها.**3** استنتج اتجاه تغير الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

**4** اثبت أن المعادلة  $h(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $-1.15 < \alpha < -1.14$ 

$$1.84 < \beta < 1.85$$

**5** استنتج إشارة كل من  $g(x)$  و  $h(x)$  تبعا لقيم العدد الحقيقي  $x$ .**(II)** لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(o; \vec{i}, \vec{j})$ .**1** احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها.**2**أ/ اثبت أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وأن:

$$f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1 + g(x))^2}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.**3** مثل بيانيا  $(C_f)$ .



# 12

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة  $f$  بـ:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

① عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

②

أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$$

ج/ احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . ثم فسر النتيجة هندسياً.

③ اثبت أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على مجال تعريفها.

④ بين أن النقطة  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  مركز تناظر المنحني  $(C_f)$ .

⑤ عين معادلة المماس  $(T)$  للمنحني  $(C_f)$  عند النقطة  $A$ .

⑥ نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $D_f$  كما يلي:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

أ/ حل العبارة:  $e^{2x} - 2e^x + 1$ .

ب/ احسب  $g'(x)$  و  $g(0)$  ثم ادرس تغيرات الدالة  $g$ .

ج/ استنتج الوضع النسبي للمنحني  $(C_f)$  والمماس  $(T)$ .

⑦ مثل بيانياً  $(T)$  و  $(C_f)$ .

**13****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = 2x + 1 + 2e^{2x}$$

1 ادرس تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ 2 بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $[-0.8; -0.7]$ 3 استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .(II)  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = 1 - x + (x + 1)e^{-2x}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(o; \vec{i}, \vec{j})$ .

1

أ/ احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها.ب/ استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  بجوار  $+\infty$  معادلته  $y = -x + 1$ ج/ ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

2

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$f'(x) = -g(x)e^{-2x}$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ ج/ بيّن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$  حيث:  $-1.2 < x_1 < -1.1$  و  $1.1 < x_2 < 1.2$ 3 بيّن أن  $f(\alpha) = -\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}$ 4 مثل بيانيا  $(C_f)$ ، نأخذ  $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$  و  $f(\alpha) \approx 2.9$ 5 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$(1 - m - x)e^{2x} + x + 1 = 0$$



14

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = (3 - 2x)e^x + 2$$

① علماً أنّ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$ ، احسب نهايات الدالة  $g$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ ② ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.③ بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $[1.6; 1.7]$ ④ استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ

$$f(x) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

①

أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ب/ علماً أنّ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) = 0$ ، بيّن أنّ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً② اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  أنّ

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

③ ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها

④

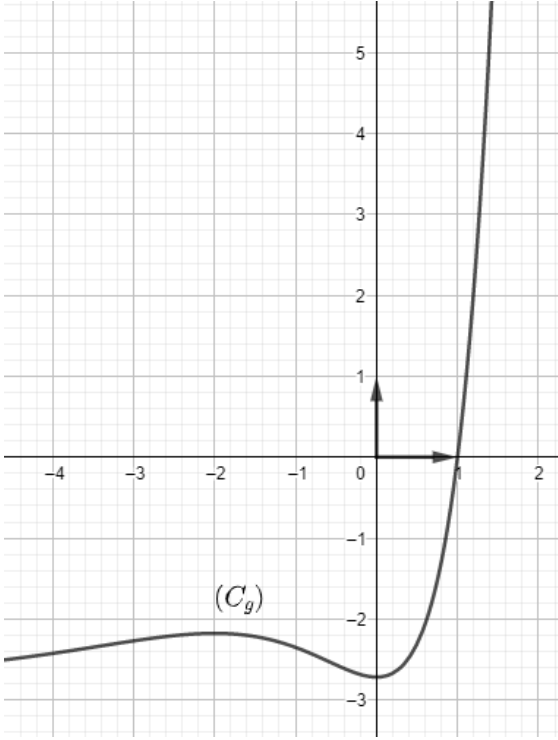
أ/ بيّن أنّ المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 4x - 1$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ ب/ ادرس الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ ⑤ اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0.⑥ بيّن أنّ  $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ، ثم أعط حصرًا للعدد  $f(\alpha)$ ⑦ أرسم كل من  $(T)$ ،  $(\Delta)$  و  $(C_f)$



15

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = x^2 e^x - e$$

و  $(C_g)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامدالمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (كما في الشكل المقابل)- احسب  $g(1)$ - بقراءة بيانية عين إشارة  $g(x)$  ثم استنتج إشارة  $g(-x)$  حسب قيمالعدد الحقيقي  $x$ .(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:

$$f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامدالمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .1 احسب النهايات الآتية:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .2 بين أن المنحنى  $(\gamma)$  الذي معادلته:  $y = e^{-x} - 2$  والمنحنى  $(C_f)$ متقاربان بجوار  $-\infty$ ، ثم ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى $(\gamma)$ .3 بين أن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم لدينا:

$$f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

4 استنتج أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين  $[-1; 0]$  و  $[0; +\infty[$  ومتناقصة تماما على المجال  $]-\infty; -1]$ ،ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .5 بين كيف يمكن إنشاء المنحنى  $(\gamma)$  انطلاقا من منحنى الدالة  $e^x$ ، ثم ارسم بعناية كلا من المنحنيين  $(\gamma)$  و  $(C_f)$ 

في نفس المعلم السابق.

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = e^x + x + 1$$

- 1 ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها
- 2 بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-1.28; -1.27[$
- 3 استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = (x + 2)(1 - e^{-x})$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1 احسب نهايات الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$

2

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$f'(x) = g(x)e^{-x}$$

ب/ استنتج اتجاه تغيرات الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

- 3 عيّن دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4

أ/ بيّن أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

ب/ ادرس الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ .

5

أ/ أثبت أنه يوجد مماس  $(T)$  وحيد لـ  $(C_f)$  يوازي  $(\Delta)$

ب/ تحقق أن معادلة المماس  $(T)$  هي:

$$y_{(T)} = x + 2 - e$$

6

أ/ بيّن أن  $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$ ، ثم جد حصرا للعدد  $f(\alpha)$ .

ب/ جد نقط تقاطع  $(C_f)$  مع محوري الاحداثيات.

ج/ مثل بيانيا كل من  $(\Delta)$ ،  $(T)$  و  $(C_f)$

- 7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة:

$$\frac{m-2}{x+2} = -e^{-x}$$

(III) نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

- 1 بيّن أن الدالة  $h$  زوجية

2 اشرح كيف يمكن إنشاء  $(C_h)$  منحنى الدالة  $h$  انطلاقا من  $(C_f)$ . (لا يطلب إنشاء  $((C_h))$ )

**17****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

**(I)** لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = 2e^x - x^2 - x$$

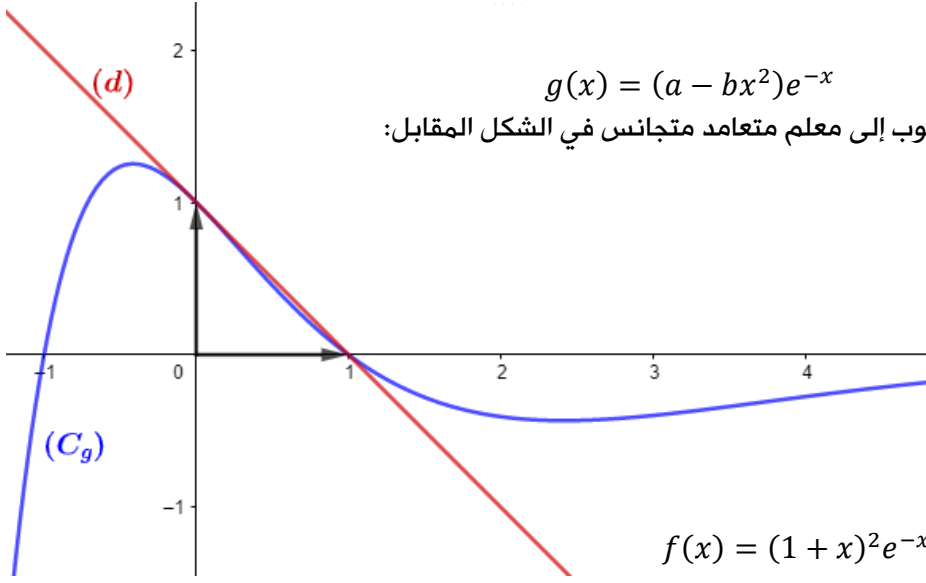
**1**أ/ احسب  $g'(x)$  من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة  $g'$  (حيث  $g'$  مشتقة الدالة  $g$ )ب/ بين أنه، من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ ،  $g'(x) > 0$ .ج/ احسب نهايتي الدالة  $g$  عند كل من  $-\infty$  و  $+\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.**2** بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $-1.38 < \alpha < -1.37$ .**3** استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .**(II)** لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ **1**أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .ب/ بين أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{x^2 e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.**2**أ/ بين أن  $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ .ب/ احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.ج/ أنشئ المنحنى  $(C_f)$  (ثعطى  $f(\alpha) \approx 0.29$ ).



(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = (a - bx^2)e^{-x}$$

و  $(C_g)$  تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس في الشكل المقابل:

• بقراءة بيانية

1

أ/ اكتب معادلة للمستقيم  $(d)$

ب/ عيّن  $g(-1)$ ،  $g(0)$  و  $g'(0)$

ج/ باستعمال ما سبق، بيّن أن

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

2 عيّن إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = (1 + x)^2 e^{-x}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى السابق.

1

أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب/ علما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ ، بيّن أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

2

أ/ بيّن أنه من أجل كل  $x$  حقيقي:  $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج تغيرات الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ استنتج أن الدالة  $f$  موجبة على  $\mathbb{R}$

3

أ/ عيّن دون حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)-1}{x} \right)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ اكتب معادلة المماس  $(T)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0

4 مثل بيانيا كل من  $(T)$  و  $(C_f)$

5 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:  $(1 + x)^2 = m e^x$

(III) نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

1 بيّن أن الدالة  $h$  زوجية

2 اشرح كيف يمكن إنشاء  $(C_h)$  منحنى الدالة  $h$  انطلاقا من  $(C_f)$ ، ثم أنشئه



19

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I)  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$$

1

أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2

أ/ بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين في  $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث:  $-1.52 < \alpha < -1.51$ .ب/ استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .(II)  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1

أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .ب/ بين أنه من أجل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = -g(x)$ .ج/ شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ ، (نأخذ  $f(\alpha) \approx 0.38$ ).

د/ عين دون حساب

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

ثم فسر النتيجة هندسيا.

2

أ/ بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .ب/ ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ .ج/ بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثيهما.د/ ارسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  على المجال  $[-2; +\infty[$ .هـ/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عد وإشارة حلول المعادلة:

$$(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$$



20

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ

$$f(x) = x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

1

أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  وفسر النتائج هندسياب/ بيّن أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ج/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم استنتج أن المستقيم  $(\Delta_1)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ 

2

أ/ بيّن أنه من أجل كل  $x \neq 0$  لدينا:

$$f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$$

ب/ استنتج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta_2)$  بجوار  $+\infty$ ، محددا معادلته.ج/ ادرس الوضع النسبي بين  $(C_f)$  وكل من المستقيمين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$ 

3

أ/ ادرس تغيرات الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتهاب/ بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $0.8 < \alpha < 0.9$  و  $-1.3 < \beta < -1.4$ 4/ من أجل كل  $(-x) \in D_f$ ، بيّن أن  $f(-x) = 1 - f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.5/ مثل بيانيا كل من  $(\Delta_1)$ ،  $(\Delta_2)$  و  $(C_f)$ 6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد وإشارة حلول المعادلة

$$(m - 1)(e^x - 1)e^{-x} + 1 = 0$$

(II) نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

1/ بيّن أن الدالة  $h$  زوجية2/ اشرح كيف يمكن إنشاء  $(C_h)$  منحنى الدالة  $h$  إنطلاقا من  $(C_f)$ . (لا يطلب إنشاء  $(C_h)$ )



21

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = 1 - xe^x$$

1 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .2 ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3

أ/ بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $[-1; +\infty[$ .ب/ تحقق أن  $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-\infty; 2]$  كما يلي:

$$f(x) = (x - 1)e^x - x - 1$$

 $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .1 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .2 لتكن  $f'$  مشتقة الدالة  $f$ :أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 2]$  فإن:  $f'(x) = -g(x)$ ب/ استنتج إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .3 بين أن:  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ ، (تدور النتائج إلى  $10^{-2}$ ).

4

أ/ بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x - 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ .ب/ ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

5

أ/ بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$  حيث:  $-1.6 < x_1 < -1.5$  و  $1.5 < x_2 < 1.6$ .ب/ أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .



22

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = x + 2 - e^x$ 1 ادرس تغيرات الدالة  $g$ .2 بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلان  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $1.14 < \alpha < 1.15$  و  $-1.9 < \beta < -1.8$ 3 استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .1 احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . ثم فسر ذلك هندسياً.2 بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

3 ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.4 عيّن دون حساب كل من:  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$  و  $\lim_{x \rightarrow \beta} \left( \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.5 بيّن أن:  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم أوجد حصرًا لـ  $f(\alpha)$  سعته  $10^{-1}$ .6 نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $h(x) = e^x - xe^x - 1$ • بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $h(x) \leq 0$ .7 نضع من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$ • تحقق من أن:  $p(0) = 0$ .

8

أ/ بيّن أن  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  عمودي على المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 5$ .ب/ اكتب معادلة للمماس  $(T)$ .ج/ ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(T)$ .9 نأخذ:  $f(\beta) \approx -1.195$ ، مثّل بيانياً  $(T)$  و  $(C_f)$ .10  $m$  وسيط حقيقي، ناقش بيانياً حسب قيم  $m$  عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $x$  التالية:

$$e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$$



23

## المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = e^{-x} + x - 1$ 1 علما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$ عين نهايات الدالة  $g$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ 2 ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.3 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $g(x) \geq 0$ ثم استنتج أن  $e^{-x} + x \geq 1$ (II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ 1 بيّن أن مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $\mathbb{R}$ 

2

أ/ تحقق أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$$

ب/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسيا.

3

أ/ بيّن أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{(e^{-x} + x)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4

أ/ اكتب معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0ب/ تحقق أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ :

$$x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$$

ثم استنتج إشارة  $x - f(x)$ ج/ استنتج الوضع النسبي بين  $(C_f)$  والمستقيم  $(T)$  ذو المعادلة  $y = x$ 5 أنشئ  $(T)$  و  $(C_f)$ 

6 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$\frac{xe^x}{xe^x + 1} - 1 = m$$



24

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

# الحلول (مقترحة) :

## فهرس المحتويات:

|                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| المسألة رقم 01 : المسألة الحل | المسألة رقم 02 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 03 : المسألة الحل | المسألة رقم 04 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 05 : المسألة الحل | المسألة رقم 06 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 07 : المسألة الحل | المسألة رقم 08 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 09 : المسألة الحل | المسألة رقم 10 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 11 : المسألة الحل | المسألة رقم 12 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 13 : المسألة الحل | المسألة رقم 14 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 15 : المسألة الحل | المسألة رقم 16 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 17 : المسألة الحل | المسألة رقم 18 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 19 : المسألة الحل | المسألة رقم 20 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 21 : المسألة الحل | المسألة رقم 22 : المسألة الحل |
| المسألة رقم 23 : المسألة الحل | المسألة رقم 24 : المسألة الحل |

♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥



01

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{e^x} \right] = 0 \text{ لأن:}$$

- التفسير الهندسي:

•  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته  $y = 0$ 

2

/ أ حساب  $f'(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x + 1 - e^x(x+1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x(-e^{-x} + x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

ب/ تعيين دون حساب قيمة  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ :لدينا مما سبق  $g(\alpha) = 0$  ومنه:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] &= f'(\alpha) \\ &= \frac{-e^\alpha g(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- تفسير الهندسي:

منحني الدالة  $f$  يقبل مماس في النقطة ذات الفاصلة $\alpha$  مواز لحامل محور الفواصل معادلته هي:

$$y = f(\alpha)$$

3 جدول تغيرات الدالة  $f$ :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

لدينا المقام موجب تماما ومنه الإشارة من إشارة البسط

- جدول التغيرات:

لدينا  $f(-1) = 0$  ومنه:

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة  $g$ :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - e^{-x}] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ e^{-x} \left( \frac{x}{e^{-x}} - 1 \right) \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - e^{-x}] = +\infty$$

- حساب  $g'(x)$ :

$$g'(x) = 1 + e^{-x}$$

لدينا  $g'(x) > 0$  ومنه:

- جدول التغيرات:

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         |           |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

2

أ/ تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:

$$0.5 < \alpha < 0.6$$

لدينا الدالة  $g$  مستمرة ومنتزعة على  $\mathbb{R}$ 

$$g(0.5) = -0.1 \quad \text{و} \quad g(0.6) = 0.05$$

$$g(0.6) \times g(0.5) < 0 \quad \text{لدينا}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا  $\alpha$ ب/ استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

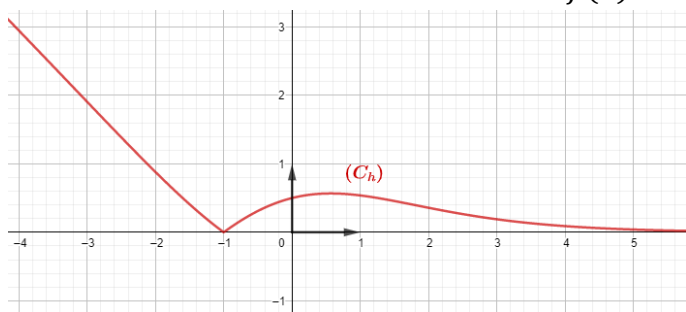
(II)

1 حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x+1}{e^x + 1} \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x+1}{e^x + 1} \right]$$

$(C_h)$  ينطبق على  $f(x) \geq 0$  لما  $(C_f)$  وينظر  $(C_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل  $(xx')$  إذا كان  $f(x) \leq 0$



| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-------------|-----------|
| $-e^x$  | -         | -    | -           | -         |
| $g(x)$  | -         | -    | 0           | +         |
| $f'(x)$ | +         | +    | 0           | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $0$  | $f(\alpha)$ | $0$       |

4 تبين أن المعادلة  $f(x) = x$

لتبين أن:  $f(x) = x$

يكفي أن نثبت أن:  $f(x) - x = 0$

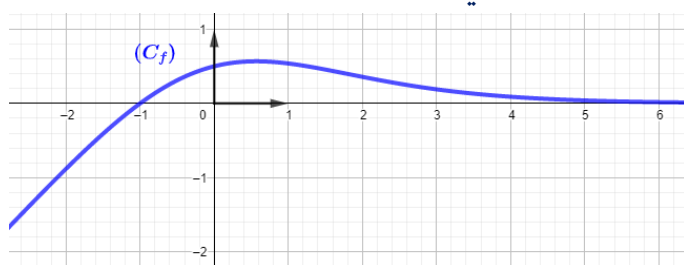
$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \frac{x+1}{e^x+1} - x \\
 &= \frac{x+1 - x(e^x+1)}{e^x+1} \\
 &= \frac{1 - xe^x}{e^x+1} \\
 &= \frac{-e^x(x - e^{-x})}{e^x+1} \\
 &= \frac{-e^x g(x)}{e^x+1} \\
 &= \frac{-e^x(0)}{e^x+1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- استنتاج قيمة  $f(\alpha)$ :

لدينا:  $f(x) = x$

ومنه  $f(\alpha) = \alpha$

5 التمثيل البياني:



(III)

1 كتابة  $h(x)$  دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= |f(x)| \\
 &= \begin{cases} f(x) & ; y \geq -1 \\ -f(x) & ; y \leq -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

2 تمثيل  $(C_h)$ :



02

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية

$$f''(\ln 3) = 0 \text{ ومنه}$$

4

أ/ تبين أن المستقيم  $(\Delta_1)$  ذو المعادلة  $y_1 = x + 2$

مقارب مائل لـ  $(C_f)$  في جوار  $-\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_1] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x - 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{4e^x}{e^x + 3} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم  $(\Delta_1)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  في جوار  $-\infty$

ب/ تبين أن المستقيم  $(\Delta_2)$  ذو المعادلة  $y_2 = x - 2$

مقارب مائل لـ  $(C_f)$  في جوار  $+\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_2] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{12}{e^x + 3} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم  $(\Delta_2)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  في جوار  $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$ :

- الوضع النسبي بين المنحني  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta_1)$ :

ندرس إشارة الفرق  $[f(x) - y_1]$  لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x + 3}$$

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة  $(-4e^x)$

| $x$          | $-\infty$ | $+\infty$              |
|--------------|-----------|------------------------|
| $f(x) - y_1$ |           | -                      |
| الوضعية      |           | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

- الوضع النسبي بين المنحني  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta_2)$ :

ندرس إشارة الفرق  $[f(x) - y_2]$  لدينا:

(I)

1 حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] = -\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x + 2 - \frac{4}{1 + 3e^{-x}} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

2 تبين أنه:  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4e^x(e^x + 3) - e^x(4e^x)}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x + 3)^2 + 12e^x}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} \\ &= \left( \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2 \end{aligned}$$

3

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا  $f'(x) \geq 0$  ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما

ولدينا

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3$$

$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ومنه  $f'(x)$  تنعدم عند  $\ln 3$  ولا تغير اشارتها

ومنه

| $x$     | $-\infty$ | $\ln 3$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0       | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 0       | $+\infty$ |

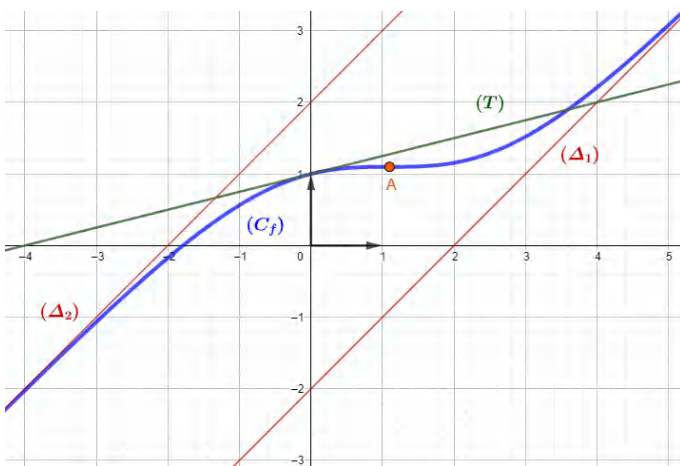
ب/ تعيين  $f''(\ln 3)$  دون حساب عبارة  $f''(x)$ :

|             |       |       |       |      |     |      |
|-------------|-------|-------|-------|------|-----|------|
| $\alpha$    | -2    | -1.9  | -1.8  | -1.7 | ... | -1   |
| $f(\alpha)$ | -0.17 | -0.09 | -0.09 | 0.07 | ... | 0.56 |

### 8 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- **نرسم المستقيمات المقاربة المائلة**
- **نعين نقطة مركز تناظر المنحني  $(C_f)$**
- **نرسم المماس  $(T)$**
- **ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم  $(C_f)$**



### 9 المناقشة البيانية:

$$h(x) = f(-|x|)$$

ومنه:

$$h(x) = \begin{cases} f(-x); & x \geq 0 \\ f(-(-x)); & x \leq 0 \end{cases}$$

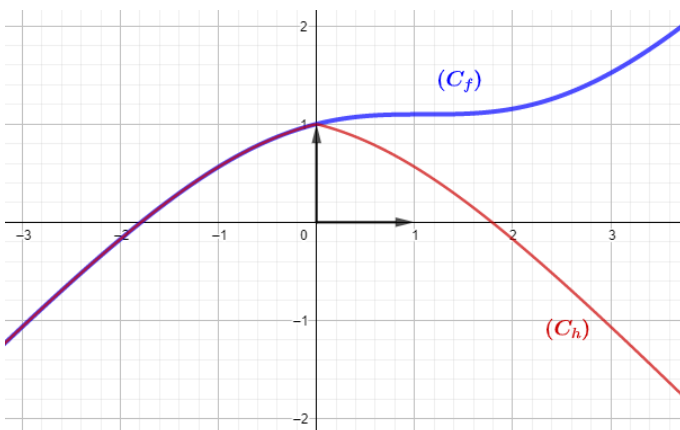
$$= \begin{cases} f(-x); & x \geq 0 \\ f(x); & x \leq 0 \end{cases}$$

لما  $x \leq 0$  المنحني  $(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$ .

لما  $x \geq 0$  المنحني  $(C_h)$  يناظر المنحني العكسي لـ  $(C_f)$

بالنسبة لمحور الترتيب.

ومنه تمثيل  $(C_h)$  كالآتي:



$$f(x) - y_2 = 4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} = \frac{12}{e^x + 3} > 0$$

ومنه

|            |                        |           |
|------------|------------------------|-----------|
| $x$        | $-\infty$              | $+\infty$ |
| $f(x) - y$ |                        | +         |
| الوضعية    | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |           |

### 5 كتابة معادلة $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$= \left( \frac{e^0 - 3}{e^0 + 3} \right)^2 (x) + 0 + 2 - \frac{4e^0}{e^0 + 3}$$

$$= \frac{1}{4}x + 1$$

### 6 تبين أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$ :

- نبين أن  $(\ln 3 + x) \in D_f$  و  $(\ln 3 - x) \in D_f$  :

لدينا:  $x \in ]-\infty; +\infty[$  معناه  $x \in D_f$

ومنه  $(\ln 3 + x) \in ]-\infty; +\infty[$

و  $(\ln 3 - x) \in ]-\infty; +\infty[$

- نبين أن  $f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) = 2 \ln 3$

$$f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x)$$

$$= \left( \ln 3 + x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3} \right)$$

$$+ \left( \ln 3 - x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left( \frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3} + \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left( \frac{12e^x}{3e^x + 3} + \frac{12e^{-x}}{3e^{-x} + 3} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left( \frac{4e^x}{e^x + 1} + \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left( \frac{4 + 4e^x + 4 + 4e^{-x}}{1 + e^x + e^{-x} + 1} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left( \frac{8}{2} \right)$$

$$= 2 \ln 3$$

### 7 تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ :

لدينا الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة على  $\mathbb{R}$

ولدينا  $f(-2) = -0.17$  و  $f(-1) = 0.56$

ولدينا  $f(-1) \times f(-2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$

تقبلا حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $] -2; -1[$

- حصر  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\alpha + 2)(e^\alpha + 3) - 4e^\alpha &= 0 \\ \Rightarrow ae^\alpha + 3a + 2e^\alpha + 6 - 4e^\alpha &= 0 \\ \Rightarrow e^\alpha(a - 2) &= -(3a + 6) \\ \Rightarrow e^\alpha &= \frac{3a + 6}{2 - \alpha} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} (d): y &= 3f'(\alpha) \left( x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\ &= 3 \left( \frac{e^\alpha - 3}{e^\alpha + 3} \right)^2 \left( x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\ &= 3 \left( \frac{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} - 3}{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} + 3} \right)^2 \left( x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\ &= 3 \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 \left( x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\ &= \frac{3\alpha^2}{4} x - \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{4} \end{aligned}$$

ومنه المناقشة كالآتي:

لما:  $\ln|m| \leq 1$

أي:  $|m| \leq e$

أي:  $-e \leq m \leq e$

أي لما:  $m \in [-e; e]$

المعادلة لا تقبل حلول

لما:  $\ln|m| > 1$

أي:  $|m| > e$

أي:  $m \in ]-\infty; e[ \cup ]e; +\infty[$

المعادلة تقبل حل وحيدا

(II)

1 دراسة تغيرات الدالة  $g$ .

نلاحظ أن

$$g(x) = (f \circ k)(x)$$

حيث:  $k(x) = 3x - 2$

2 التحقق من أن  $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$ :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) &= f\left[3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right] \\ &= f(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- تبين أن  $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$ :

لدينا:  $g'(x) = 3f'(3x - 2)$  ومنه:

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) &= 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) \\ &= 3f'(\alpha) \end{aligned}$$

3 استنتاج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة  $g$  عند

النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha+2}{3}$ :

$$\begin{aligned} (d): y &= g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) \left( x - \frac{\alpha+2}{3} \right) + g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3f'(\alpha) \left( x - \frac{\alpha+2}{3} \right) + 0 \\ &= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha + 2) \end{aligned}$$

4 التحقق من معادلة المماس (d):

لدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} \end{aligned}$$



03

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{x}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] = 0$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{e^x} \right] = 0$  (نهاية شهيرة)

التفسير الهندسي: المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي

بجوار  $+\infty$  معادلته  $y = 0$

ب/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x}{e^x + 1} \right]$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x}{e^x + 1} \right] = -\infty$$

②

ب/ تبين أنه:  $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(1 - x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-((x - 1)e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ :

لدينا  $f(0) = 0$  ، ولدينا:  $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2} < 0$  ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة  $g(x)$ .

| $x$     | $-\infty$ | 0        | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | +        | 0           | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\theta$ | $f(\alpha)$ | 0         |

③ تعيين  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$  دون حساب:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] &= f'(\alpha) \\ &= \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

تفسير الهندسي: المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$  مواز لحامل محور الفواصل.

(I)

① من البيان نجد

ب/

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1 \quad | \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$$

ب/

$$g'(0) = 0 \quad | \quad g(0) = -2$$

② إيجاد  $a$  ،  $b$  و  $c$ :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a(0) + b)e^0 + c = -2 \\ (a(0) + a + b)e^0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax + b)e^x + c] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

③

ب/ تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ :

لدينا الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] < 0 \quad \text{لدينا}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ .

- التحقق من أن  $1.2 < \alpha < 1.3$ :

$$\text{لدينا: } g(1.2) = -0.3 \quad \text{و} \quad g(1.3) = 0.1$$

$$\text{لدينا: } g(1.3) \times g(1.2) < 0$$

ومنه:  $1.2 < \alpha < 1.3$ .

ب/ استنتاج إشارة  $g(x)$ :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

(II)

①

ب/ حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ :

4 تبين أن  $(C_f)$  يقبل مماسا وحيدا  $(T)$  يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من  $O(0; 0)$  معناه:

$$f'(a)(0 - a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow a \frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a + 1)^2} + \frac{a}{e^a + 1} = 0$$

$$\Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 e^a = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{-g(0)}{(e^0 + 1)^2}x + \frac{0}{e^0 + 1}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

5 تبين أن  $f(\alpha) = \alpha - 1$ :

مما سبق لدينا

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha = 1$$

$$\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\alpha} \\ &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

- حصر  $f(\alpha)$ :

لدينا:

$$1.2 < \alpha < 1.3$$

$$0.2 < \alpha - 1 < 0.3$$

$$0.2 < f(\alpha) < 0.3$$

6

أ/ تبين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب

مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-xe^x}{e^x + 1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$  (نهاية شهيرة)

ب/ دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ :

دراسة إشارة الفرق:  $[f(x) - y]$ :

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{x}{e^x + 1} - x \\ &= \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \\ &= \frac{-xe^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

لدينا  $e^x > 0$  و  $(e^x + 1) > 0$

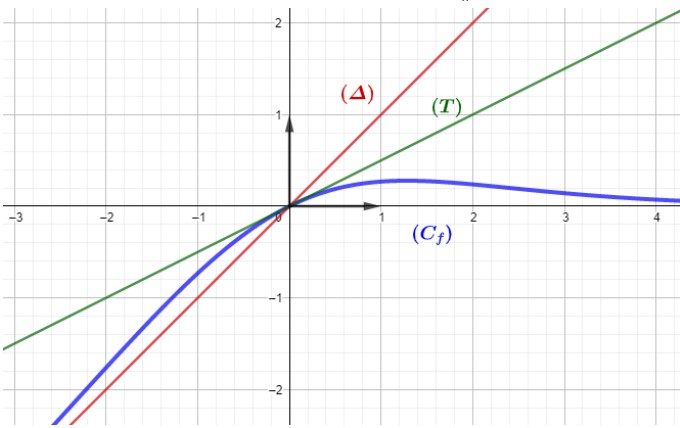
ومنه الإشارة من إشارة  $(-x)$

|            |           |   |           |
|------------|-----------|---|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x) - y$ | +         | 0 | -         |

الوضعية:

- $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  في المجال:  $] - \infty; 0[$
- $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  في النقطة ذات الفاصلة 0
- $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  في المجال:  $]0; +\infty[$

7 التمثيل البياني:



8 المناقشة البيانية:

|                      |                             |
|----------------------|-----------------------------|
| لما $m < 0$          | المعادلة تقبل حل وحيد سالب  |
| لما $m = 0$          | المعادلة تقبل حل وحيد معدوم |
| لما $0 < m < \alpha$ | المعادلة تقبل حلين موجبين   |
| لما $m = \alpha$     | المعادلة تقبل حل مضاعف موجب |
| لما $m > \alpha$     | المعادلة لا تقبل حلولاً     |



04

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

$$\begin{aligned}
&= -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} + x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \\
&= -2 + \frac{4}{e^{-x} + 1} + \frac{4}{e^x + 1} \\
&= \frac{-2(e^{-x} + 1)(e^x + 1) + 4(e^x + 1) + 4(e^{-x} + 1)}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
&= \frac{2[2(e^x + 1) + 2(e^{-x} + 1) - (e^{-x} + 1)(e^x + 1)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
&= \frac{2[2(e^x + e^{-x} + 2) - (e^x + e^{-x} + 2)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
&= \frac{2[2(e^x + e^{-x} + 2) - (e^x + e^{-x} + 2)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
&= \frac{2[e^x + e^{-x} + 2]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
&= \frac{2[e^x + e^{-x} + 2]}{e^x + e^{-x} + 2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

ومنه النقطة  $A(0; 1)$  مركز تناظر المنحني  $(C_f)$ .

3

/ تبين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ 

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x + 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{4}{e^x + 1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} \right] = 0
\end{aligned}$$

التفسير الهندسي:  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$  معادلته:  $y = x - 1$ ./ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ 

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] \\
&= 3
\end{aligned}$$

الاستنتاج:

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] - 3 = 0$$

$$f(2(0) - x) + f(x)$$

(I)

1

/ تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ 

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 4e^x}{(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \\
&= \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2
\end{aligned}$$

/ دراسة إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}$ :لدينا  $f'(x) > 0$  ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما.لدينا  $f'(0) = 0$  أي المشتقة تنعدم ولا تغير اشارتهاومنه نستنتج أن المنحني  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف./ جدول تغيرات الدالة  $f$ :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
&\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty \\
&\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 1 + \frac{4e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right] = +\infty
\end{aligned}$$

- جدول التغيرات:

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0   | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 1   | $+\infty$ |

2 برهان أن النقطة  $A(0; 1)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$ :- نثبت أن:  $(2(0) - x) \in D_f$ لدينا  $x \in \mathbb{R}$  ومنه  $(-x) \in \mathbb{R}$ - نثبت أن:  $f(2(0) - x) + f(x) = 2(1)$ 

لدينا:

$$= f(\alpha)$$

$$= 0$$

$$- \text{تبين أن: } g' \left( \frac{\alpha-1}{4} \right) = 4f'(\alpha)$$

$$\text{لدينا: } g'(x) = 4f'(4x+1) \text{ ومنه:}$$

$$g' \left( \frac{\alpha-1}{4} \right) = 4f' \left( 4 \frac{\alpha-1}{4} + 1 \right) \\ = 4f'(\alpha)$$

③ استنتاج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في

$$\text{النقطة ذات الفاصلة } \frac{\alpha-1}{4} :$$

$$(T): y = g' \left( \frac{\alpha-1}{4} \right) \left( x - \frac{\alpha-1}{4} \right) + g \left( \frac{\alpha-1}{4} \right) \\ = 4f'(\alpha) \left( x - \frac{\alpha-1}{4} \right) + 0 \\ = 4f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha-1)$$

④ التحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ: y =

$$: (\alpha+1)^2 x - \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$$

لدينا:

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - 1 + \frac{4}{e^\alpha + 1} = 0 \\ \Rightarrow \frac{4}{e^\alpha + 1} = 1 - \alpha \\ \Rightarrow e^\alpha = \frac{3 + \alpha}{1 - \alpha}$$

ومنه:

$$(T): y = 4 \left( \frac{\frac{3+\alpha}{1-\alpha} - 1}{\frac{3+\alpha}{1-\alpha} + 1} \right)^2 \left( x - \frac{\alpha-1}{4} \right) \\ = 4 \left( \frac{\alpha+1}{2} \right)^2 \left( x - \frac{\alpha-1}{4} \right) \\ = (\alpha+1)^2 x - \frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{4} \\ = (\alpha+1)^2 x - \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{4} \\ = (\alpha+1)^2 x - \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$$

(III)

① تبين أن الدالة k زوجية :

$$\text{لدينا } \mathbb{R} \in (-x)$$

ولدينا:

$$k(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه الدالة k زوجية.

②

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 3] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 3$  مقارب مائل بجوار  $-\infty$

④ تبين أن المنحني  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في

نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  :

لدينا الدالة f مستمرة ورتبية على  $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا: } f(-2.76) = 0.001$$

$$\text{و } f(-2.77) = -0.3$$

$$\text{ولدينا: } f(-2.77) \times f(-2.76) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  .

⑤ التمثيل البياني:

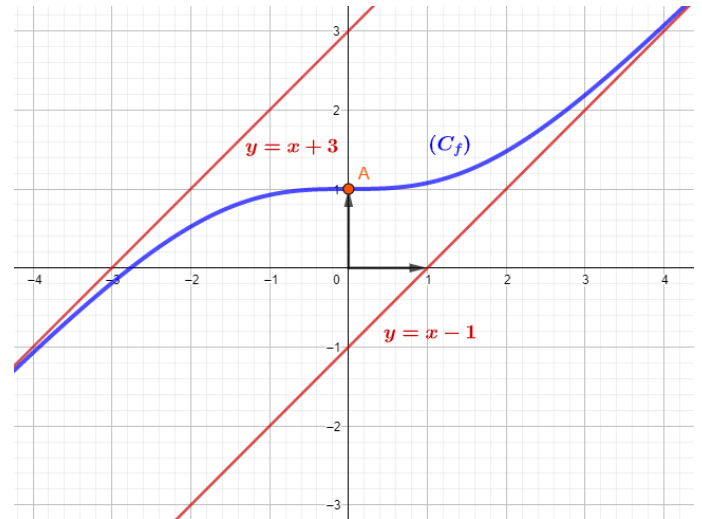
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمات المقاربة المائلة :  $(y = x - 1)$  و

$$(y = x + 3).$$

• نعين نقطة مركز تناظر المنحني  $(C_f)$

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم  $(C_f)$



(II)

① اتجاه تغير الدالة g :

نلاحظ أن  $g(x) = (f \circ \varphi)(x)$  حيث:  $\varphi(x) = 4x + 1$

لدينا الدالة  $\varphi$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

والدالة f متزايدة تماما أيضا على  $\mathbb{R}$  (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

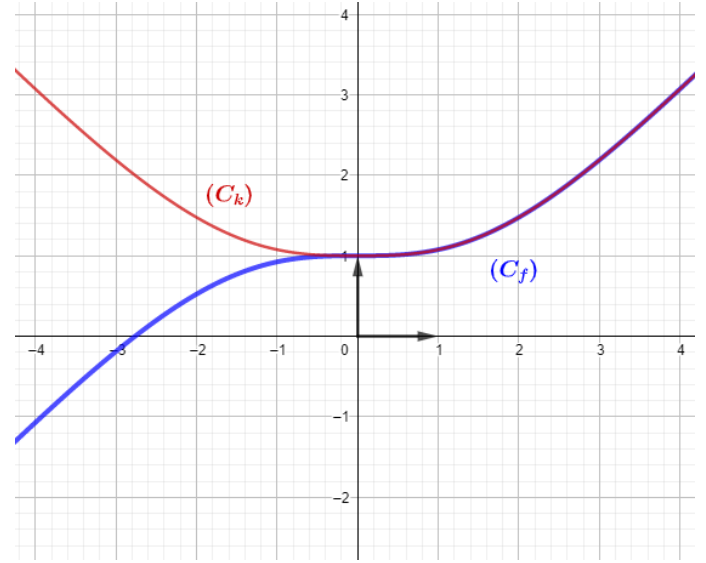
$$\text{② التحقق من أن: } g \left( \frac{\alpha-1}{4} \right) = 0$$

أ / تبين كيفية تمثيل  $(C_k)$  انطلاقاً من  $(C_f)$  :

لما  $x \geq 0$  :  $(C_k)$  ينطبق على  $(C_f)$

ولما  $x \leq 0$  :  $(C_k)$  يناظر  $(C_f)$  بالنسبة لحامل محور الترتيب

③ التمثيل البياني لـ  $(C_k)$  :



(IV)

① التحقق من أنه كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $h(x) = f(x) + 1$

$$\begin{aligned} f(x) + 1 &= x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} + 1 \\ &= x + \frac{4}{e^x + 1} = h(x) \end{aligned}$$

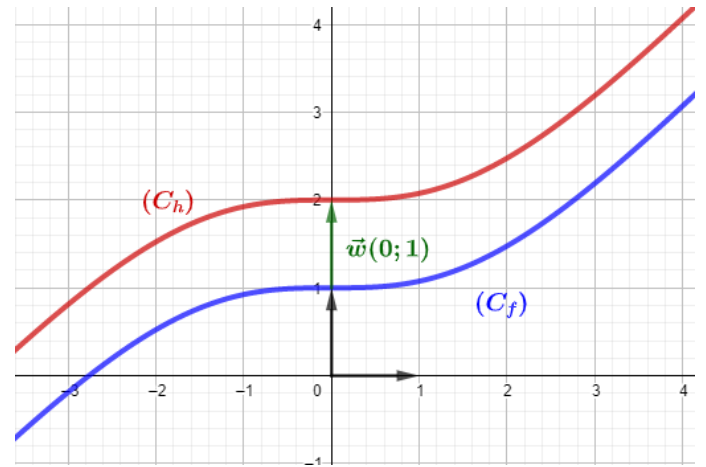
②

أ / استنتاج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  :

لدينا:  $h(x) = f(x) + 1$

ومنه  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بواسطة انسحاب  $\vec{w}(0; 1)$

ب / التمثيل البياني لـ  $(C_h)$  :





05

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - xe^{-x} - 2x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0 \end{aligned}$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

( $C_f$ ) يقبل المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مقارب مائل له بجوار  $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحنى ( $C_f$ ) والمستقيم ( $\Delta$ ):

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Rightarrow -xe^{-x} = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

لأن:  $e^{-x} > 0$ 

ومنه:

|                       |           |   |           |
|-----------------------|-----------|---|-----------|
| $x$                   | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x) - y_{(\Delta)}$ | +         | 0 | -         |

- الوضعية:

- ( $C_f$ ) فوق ( $\Delta$ ) لما  $x \in ]-\infty; 0[$
- ( $C_f$ ) فوق ( $\Delta$ ) لما  $x = 0$  أي في النقطة ذات الاحداثيات  $(0; 1)$ .
- ( $C_f$ ) تحت ( $\Delta$ ) لما  $x \in ]0; +\infty[$

② تبين أنه  $f'(x) = g(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - e^{-x} + xe^{-x} \\ &= 2 + (x - 1)e^{-x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$  وتشكيل جدول تغيراتها:لدينا:  $f'(x) = g(x)$ ومنه إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ 

وعليه:

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0           | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

③ كتابة معادلة المماس ( $T$ ) لـ ( $C_f$ ) عند النقطة ذات

الفاصلة 1:

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= 2(x - 1) + 3 - e^{-1} \\ &= 2x + 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

(I)

① حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x - 1)e^{-x}) = 0$$

② دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-x} - e^{-x}(x - 1) \\ &= e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x} \\ &= (2 - x)e^{-x} \end{aligned}$$

لدينا:  $e^{-x} > 0$  ومنه الإشارة من  $(2 - x)$ 

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة  $g$ :

|         |           |              |           |
|---------|-----------|--------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 2            | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         | 0            | -         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $2 + e^{-2}$ | 2         |

③ تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ :لدينا الدالة  $g$  مستمرة ومنتزعة على المجال

$$]-0.38; -0.37[$$

ولدينا:  $g(-0.37) \times g(-0.38) < 0$ 

$$\text{لأن } g(-0.37) = 0.02 \text{ و } g(-0.38) = -0.02$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $-0.38 < \alpha < -0.37$ ④ استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

(II)

①

أ/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-2t + 1 + te^t) = +\infty$$

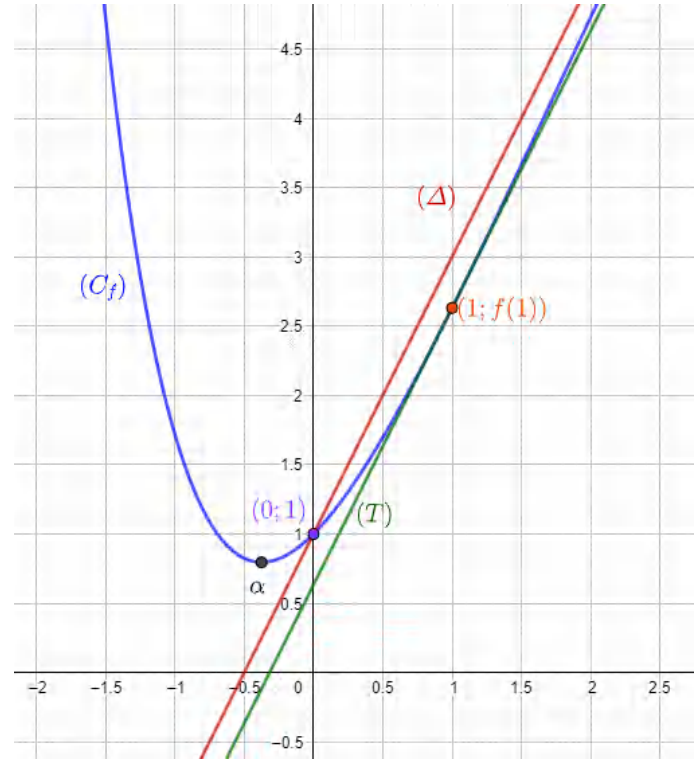
$$\text{لأن: } \lim_{t \rightarrow -\infty} (te^t) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x \left( 2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) \right) = +\infty$$

ب/ حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1))$ :

#### 4 التمثيل البياني:

- نعين النقطة  $(0; 1)$  نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع  $(\Delta)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  باستعمال جدول القيم المساعدة.
- نعين النقطة  $(1; f(1))$  نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع المماس  $(T)$
- نرسم المماس  $(T)$  ذو المعادلة  $2x + 1 - e^{-1}$  باستعمال جدول القيم المساعدة.
- باستعمال جدول التغيرات نكمل رسم  $(C_f)$ .



#### 5 المناقشة البيانية:

- $$x = (1 - m)e^x \Rightarrow xe^{-x} = 1 - m$$
- $$\Rightarrow -xe^{-x} = m - 1$$
- $$\Rightarrow -xe^{-x} + 2x + 1 = m - 1 + 2x + 1$$
- $$\Rightarrow -xe^{-x} + 2x + 1 = m + 2x$$
- $$\Rightarrow f(x) = 2x - m$$
- ومنه المناقشة وسيطية مائلة موازية لـ  $(T)$  و  $(\Delta)$ .
- ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع حامل محور الفواصل مع المستقيمت ذات المعادلة  $y_m = 2x - m$  وهي:
- لما  $-m < 1 - e^{-1}$  أي لما  $m > e^{-1} - 1$  المعادلة لا تقبل حلول
  - لما  $-m = 1 - e^{-1}$  أي لما  $m = e^{-1} - 1$  المعادلة تقبل جذر مضاعف

- لما  $-1 < m < e^{-1} - 1$  أي لما  $1 - e^{-1} < -m < 1$  المعادلة تقبل حلين موجبين تماما
- لما  $-m = 1$  أي لما  $m = -1$  المعادلة تقبل حل مضاعف
- لما  $-m > 1$  أي لما  $m < -1$  المعادلة تقبل حل وحيد سالب تماما



06

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x}{e^{x-1}} \right] = 0 \text{ لأن:}$$

- جدول تغيرات  $f(x)$ :

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 2 | $-\infty$ |

4

أ/ تبين أن  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x + 1 - xe^{x-1} - 2x - 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-xe^{x-1}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه  $(\Delta)$  مستقيم مقارب مائل بجوار  $-\infty$ ب/ دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ :ندرس إشارة الفرق:  $f(x) - y$ :

$$f(x) - y = -xe^{x-1}$$

لدينا  $e^{x-1} > 0$  ومنه الإشارة من  $(-x)$ :

|            |           |   |           |
|------------|-----------|---|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x) - y$ | +         | 0 | -         |

- الوضعية:

- $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما:  $x < 0$ .
- $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  في النقطة ذات الإحداثيات:  $(0; 1)$ .
- $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما:  $x > 0$ .

5

أ/ تبين أن  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  يوازي  $(\Delta)$ :المستقيم  $(T)$  يوازي المستقيم  $(\Delta)$  معناه:

$$\begin{aligned} f'(a) = 2 &\Rightarrow 2 - (1 + a)e^{a-1} = 2 \\ &\Rightarrow -(1 + a)e^{a-1} = 0 \\ &\Rightarrow -(1 + a) = 0 \\ &\Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

1 دراسة تغيرات الدالة  $f'$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - e^{x-1} - xe^{x-1} \\ &= 2 - (1 + x)e^{x-1} \end{aligned}$$

ومنه ندرس تغيرات الدالة  $f'$ :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(x)] \\ &= 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x)] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

- حساب  $f''(x)$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{x-1} - (1 + x)e^{x-1} \\ &= -(2 + x)e^{x-1} \end{aligned}$$

لدينا  $e^{x-1} > 0$  ومنه الإشارة من  $-(2 + x)$ :

$$-(2 + x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

ومنه:

- جدول تغيرات  $f'(x)$ :

|          |           |          |           |
|----------|-----------|----------|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | -2       | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | +         | 0        | -         |
| $f'(x)$  | 2         | $f'(-2)$ | $-\infty$ |

2 حساب  $f'(1)$ :

$$f'(1) = 2 - (1 + 1) = 0$$

- إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | -         |

3 دراسة تغيرات الدالة  $f$ :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{x-1}] &= 0 \text{ لأن:} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ e^{x-1} \left( \frac{2x}{e^{x-1}} + \frac{1}{e^{x-1}} - x \right) \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

## 7 المناقشة البيانية:

لدينا: من المعادلة  $(E): m \in \mathbb{R}_+^*$   
 حلول المعادلة  $(E)$  هي فواصل نقاط تقاطع  $(C_f)$  مع  
 المستقيمات ذات المعادلة:

$$y = 2x + \ln m$$

ومنه:

لما  $\ln m < 1$  أي  $m < e$  أي لما  $m \in ]0; e[$

المعادلة تقبل حل وحيد موجب تماما

• لما  $\ln m = 1$  أي  $m = e$

المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

• لما  $1 < \ln m < 1 + e^{-2}$  أي  $e < m < e^{1+e^{-2}}$

أي لما  $m \in ]e; e^{1+e^{-2}}[$

المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

• لما  $\ln m = 1 + e^{-2}$  أي لما  $m = e^{1+e^{-2}}$

المعادلة تقبل حل مضاعف

• لما  $\ln m > 1 + e^{-2}$  أي  $m > e^{1+e^{-2}}$

أي لما  $m \in ]e^{1+e^{-2}}; +\infty[$

المعادلة لا تقبل حلول

ومنه:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ &= 2x + 2 + 2(-1) + 1 - (-1)e^{-1-1} \\ &= 2x + 1 + e^{-2} \end{aligned}$$

إذن معادلة المماس  $(T)$  هي :

$$y = 2x + 1 + e^{-2}$$

ب/ تبين أن  $(C_f)$  يقطع حامل محاور الفواصل في نقطتين  
 فاصلتيهما  $\alpha$  و  $\beta$  :

لدينا الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

$$\text{ولدينا: } f(1.9) \times f(2) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]1.9; 2[$

$$\text{ولدينا: } f(-0.6) \times f(-0.5) < 0$$

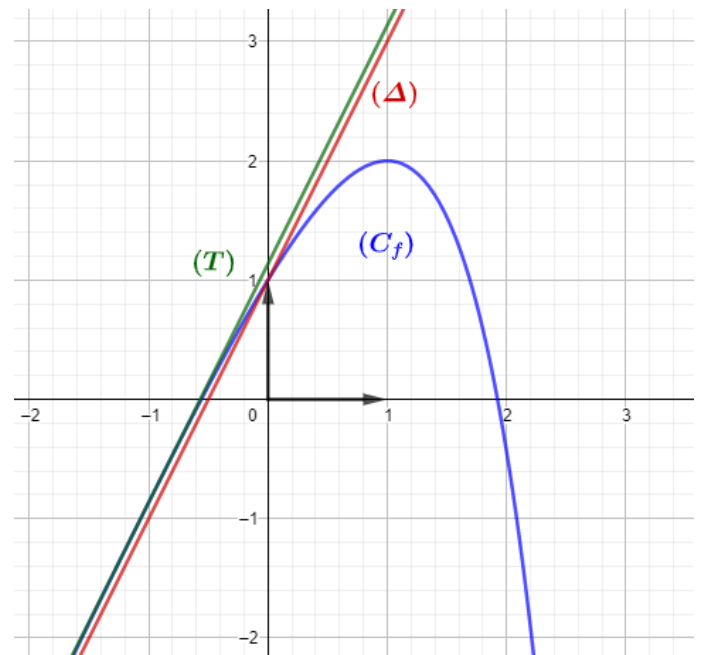
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\beta$  في المجال  $] - 0.6; -0.5[$

## 6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعين  $\alpha$  و  $\beta$  نقط تقاطع المنحني  $(C_f)$  مع حامل محاور الفواصل.
- نرسم المستقيم المقارب المائل :  $(y = 2x + 1)$ .
- نرسم المماس  $(T)$ .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم  $(C_f)$





07

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0 \text{ لأن}$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  :دراسة إشارة الفرق  $(f(x) - y)$  :

$$\begin{aligned} f(x) - y &= xe^x(e^x - 2) \\ &\Rightarrow \begin{cases} xe^x = 0 \\ e^x - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 2 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه:

|            |           |   |         |           |
|------------|-----------|---|---------|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | 0 | $\ln 2$ | $+\infty$ |
| $xe^x$     | -         | 0 | +       | +         |
| $e^x - 2$  | -         | - | 0       | +         |
| $f(x) - y$ | +         | 0 | -       | +         |

الوضعية:

- $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما:  $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\ln 2; +\infty[$
- $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  في النقطتين  $A(0; 0)$  و  $B(\ln 2; \ln 2)$
- $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما:  $x \in ]0; \ln 2[$

3

أ/ تبين أنه:  $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x - 1)^2 + 2xe^x(e^x - 1) \\ &= (e^x - 1)(e^x - 1 + 2xe^x) \\ &= (e^x - 1)(e^x(2x + 1) - 1) \\ &= (e^x - 1)g(x) \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$  :إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  في إشارة  $(e^x - 1)$ 

$$\begin{aligned} e^x - 1 = 0 &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = \ln 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

جدول التغيرات:

|           |           |            |           |
|-----------|-----------|------------|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | 0          | $+\infty$ |
| $g(x)$    | -         | 0          | +         |
| $e^x - 1$ | -         | 0          | +         |
| $f'(x)$   | +         | 0          | +         |
| $f(x)$    | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة  $g'$  :

النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= +\infty \end{aligned}$$

التفسير الهندسي للنهايات:

منحنى الدالة  $g$  يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار  $-\infty$ حساب  $g'(x)$  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^x + (2x + 1)e^x \\ &= (2x + 3)e^x \end{aligned}$$

لدينا  $e^x > 0$  ومنه إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $(2x + 3)$  :

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

جدول تغيرات  $g(x)$  :

|         |           |                |            |
|---------|-----------|----------------|------------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $+\infty$  |
| $g'(x)$ | -         | 0              | +          |
| $g(x)$  | $-1$      | $\searrow$     | $\nearrow$ |

2 حساب  $g(0)$  :

$$g(0) = (2(0) + 1)e^0 - 1 = 0$$

استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0 | +         |

(II)

1 حساب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= +\infty \end{aligned}$$

2

أ/ تبين أن  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$ عند  $-\infty$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^x - 1)^2 - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{2x} + x - 2xe^x - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x(e^x - 2)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

#### 4 كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

المماس يمر من المبدأ معناه:

$$\begin{aligned} f'(a)(0 - a) + f(a) &= 0 \\ \Rightarrow -a(e^a - 1)g(a) + a(e^a - 1) &= 0 \\ \Rightarrow a(e^a - 1)[-g(a) + (e^a - 1)] &= 0 \\ \Rightarrow a(e^a - 1)[-(2a + 1)e^a + 1 + e^a - 1] &= 0 \\ \Rightarrow a(e^a - 1)[-2ae^a - e^a + 1 + e^a - 1] &= 0 \\ \Rightarrow -2a^2(e^a - 1)e^a &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} -2a^2 = 0 \\ e^a - 1 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e^a = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \ln 1 \end{cases} \\ \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

ومنه:

$$(T): y = f'(0)x + f(0)$$

$$y = 0x + 0$$

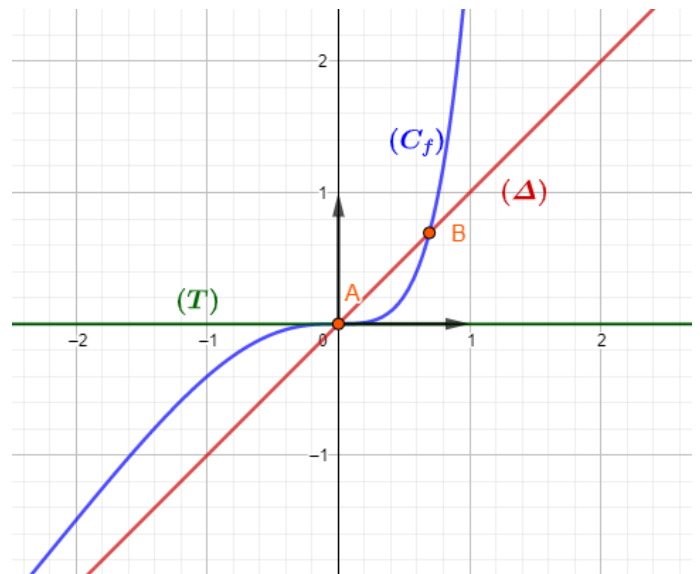
$$y = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مماس للمنحني  $(C_f)$ .

#### 5 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$  :  $(y = x)$ .
- نعين  $A$  و  $B$  نقط تقاطع المنحني  $(C_f)$  مع  $(\Delta)$ .
- نرسم المماس  $(T)$ .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم  $(C_f)$ .



#### 6 المناقشة البيانية:

حلل المعادلة  $f(x) = mx$  هل فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$

مع المستقيمات ذات المعادلة:  $y_m = mx$

لما  $m = 0$  المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو  $x = 0$

لما  $0 < m < 1$  المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما  $m \geq 0$  المعادلة تقبل حلان: حل موجب تماما

وحل معدوم

لما  $m < 0$  المعادلة تقبل حلا معدوما



08

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

دراسة إشارة  $f'(x)$ :لدينا  $0 \leq -\frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$  ولدينا:  $f'(0) = 0$  ومنه:

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0 | -         |

ب/ الاستنتاج:

المشتقة الأولى انعدمت ولم تغير اشارتها إذن المنحني  $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف احداثياتها  $O(0; 0)$ ج/ جدول تغيرات الدالة  $f$ :لدينا:  $f(0) = 0$  ومنه:

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0 | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ |

4

أ/ تبين أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1)] = 0$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{2}{e^x + 1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

 $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار  $+\infty$  معادلته:

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

ب/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + \frac{1}{2}x + 1]$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x) + \frac{1}{2}x + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 2 - \frac{2}{e^x + 1} \right] \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

1

أ/ تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$ :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{e^x + 1} &= \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x}{e^x + 1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن الدالة  $f$  فردية:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x} + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{e^{-x} + 1} - \frac{1}{e^{-x} + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{e^x + 1} - 1 \\ &\quad + \frac{1}{e^x + 1} \\ &= -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x + 1} \\ &= -\left( 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} \right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة  $f$  فردية2 حساب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= -\infty \end{aligned}$$

3

أ/ تبين أنه:  $f'(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-(e^x + 1)^2 + 4e^x}{2(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^{2x} - 1 - 2e^x + 4e^x}{2(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^{2x} - 1 + 2e^x}{2(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-(e^{2x} + 1 - 2e^x)}{2(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-(e^x - 1)^2}{2(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

$(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار  $-\infty$  معادلته:

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(d)$ :

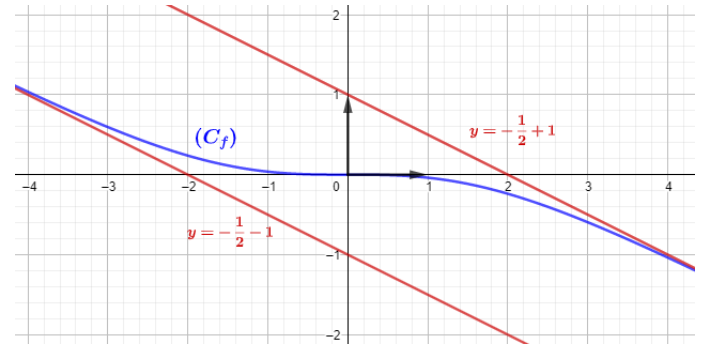
ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1 \\ &= \frac{-2}{e^x + 1} \end{aligned}$$

لدينا:  $(e^x + 1) > 0$  ومنه :

|            |                   |           |
|------------|-------------------|-----------|
| $x$        | $-\infty$         | $+\infty$ |
| $f(x) - y$ |                   | -         |
| الوضعية    | $(C_f)$ تحت $(d)$ |           |

⑤ التمثيل البياني:





09

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

ومنه:

| $x$                   | $-\infty$ | $\ln 4 + 2$ | $+\infty$ |
|-----------------------|-----------|-------------|-----------|
| $-\frac{1}{2}e^{x-2}$ | -         |             | -         |
| $e^{x-2} - 4$         | -         | 0           | +         |
| $f(x) - y$            | +         | 0           | -         |

- الوضعية:

- $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما:  $x \in ]-\infty; 2 + \ln 4[$
- $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  في النقطة ذات الفاصلة  $2 + \ln 4$
- $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما:  $x \in ]2 + \ln 4; +\infty[$

3

/ أ تبين أنه:  $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$ 

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - \frac{1}{2}e^{2(x-2)} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2}e^{2(x-2)} - 2e^{x-2} + \frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right) \\ &= -(1 + e^{2(x-2)} - 2e^{x-2}) \\ &= -(e^{x-2} - 1)^2 \end{aligned}$$

ب/ جدول تغيرات الدالة  $f$ :لدينا  $f'(x) \leq 0$ 

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow -(e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} = 1 \\ &\Rightarrow x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

| $x$     | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0 | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   | $-\infty$ |

4 حساب  $f''(x)$ :

$$f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$$

دراسة  $f''(x)$ :

$$-2e^{x-2} < 0 \text{ لدينا}$$

ولدينا:

$$e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

1 تبين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$ و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$ 

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - 2] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2}\right] = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{5}{2}\right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 2] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{x-2}\right] = -\infty \end{cases}$$

2

/ أ تبين أن  $(\Delta)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2}\right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)\right] = 0$$

ومنه المستقيم  $(\Delta)$  مقارب مائل بجوار  $-\infty$ .ب/ حل المعادلة:  $e^{x-2} - 4 = 0$ 

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow e^{x-2} = 4$$

$$\Rightarrow x - 2 = \ln 4$$

$$\Rightarrow x = \ln 4 + 2$$

- تبين أن  $(C_f)$  يقع فوق  $(\Delta)$  على المجال

$$]-\infty; 2 + \ln 4[ \text{ وتحت على المجال } ]2 + \ln 4;$$

$$+\infty[$$

دراسة إشارة الفرق  $(f(x) - y)$ :

$$f(x) - y = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

$$\text{لدينا } -\frac{1}{2}e^{x-2} < 0 \text{ ولدينا:}$$

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 4 + 2$$

| $x$           | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---------------|-----------|---|-----------|
| $-2e^{x-2}$   | -         | 0 | -         |
| $e^{x-2} - 1$ | -         | 0 | +         |
| $f''(x)$      | +         | 0 | -         |

المشتقة الثانية انعدمت وغيّرت إشارتها معناه أن المنحنى

$(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 2

⑤ اثبات أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:

$$2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$$

لدينا الدالة  $f$  رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

$$\text{ولدينا: } f(2 + \ln 4) = -0.83$$

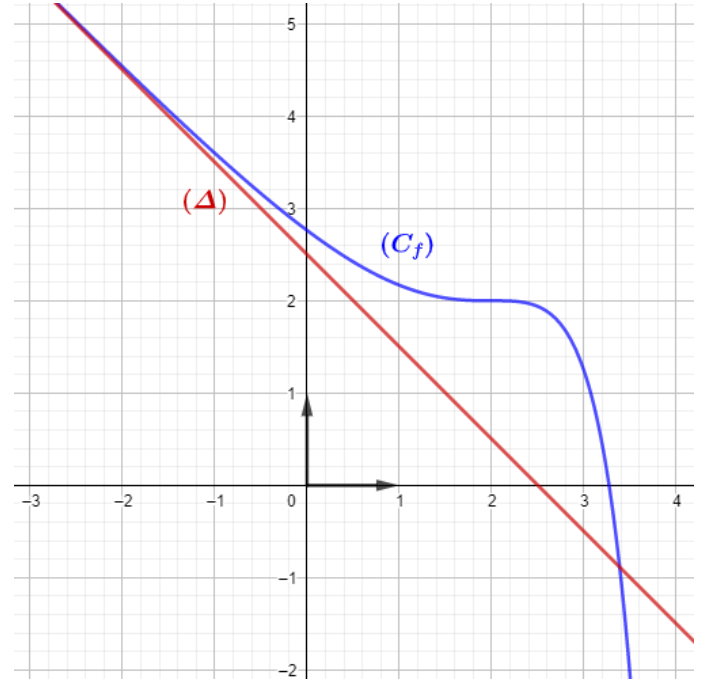
$$\text{و } f(2 + \ln 3) = 0.93$$

$$\text{ولدينا: } f(2 + \ln 4) \times f(2 + \ln 3) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]2 + \ln 3 ; 2 + \ln 4[$

⑥ التمثيل البياني:



ب/ تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - xe^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x \left( \frac{1}{e^x} - x \right)}{e^x \left( 1 + \frac{1}{e^x} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{e^x} - x}{\frac{1}{e^x} + 1} \\ &= \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1} \end{aligned}$$

- حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1} \right] = -\infty$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{e^x} \right] = 0$

② التحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-e^x - xe^x)(e^x + 1) - e^x(1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x(1+x)(e^x + 1) - e^x(1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x[-(1+x)(e^x + 1) - (1 - xe^x)]}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x[-e^x - 1 - xe^x - x - 1 + xe^x]}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x[e^x + x + 2]}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

③ دراسة تغيرات الدالة  $f$ :

لدينا  $e^x > 0$  و  $(e^x + 1)^2 > 0$  ومنه إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-g(x)$

- جدول تغيرات  $f(x)$ :

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0           | -         |
| $f(x)$  | 1         | $f(\alpha)$ | $-\infty$ |

④

(I)

① دراسة تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ :

- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ e^x \left( 1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) \right] = +\infty$$

- حساب  $g'(x)$ :

$$g'(x) = e^x + 1$$

لدينا:  $g'(x) > 0$

ومنه:

- جدول تغيرات  $g'(x)$ :

| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $g'(x)$ | +         | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

②

أ/ تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ :

لدينا الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة على  $\mathbb{R}$

ولدينا  $g(-2.2) = -0.08$

و  $g(-2.1) = 0.02$

ومنه:  $g(-2.2) \times g(-2.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

(II)

①

أ/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0 \text{ لأن:}$$

- التفسير الهندسي:

$(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته  $y = 1$  بجوار  $-\infty$ .

$$-1.2 < \alpha + 1 < -1.1$$

$$1.1 < -(\alpha + 1) < 1.2$$

اذن:

$$1.1 < f(\alpha) < 1.2$$

ب/ تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في

نقطة وحيدة فاصلتها  $\beta$  حيث:  $0.5 < \beta < 0.6$

لدينا الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة على  $\mathbb{R}$

$$f(0.6) = -0.03 \quad \text{ولدينا}$$

$$f(0.5) = 0.06 \quad \text{و}$$

$$f(0.4) \times f(0.6) < 0 \quad \text{ومنه:}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$

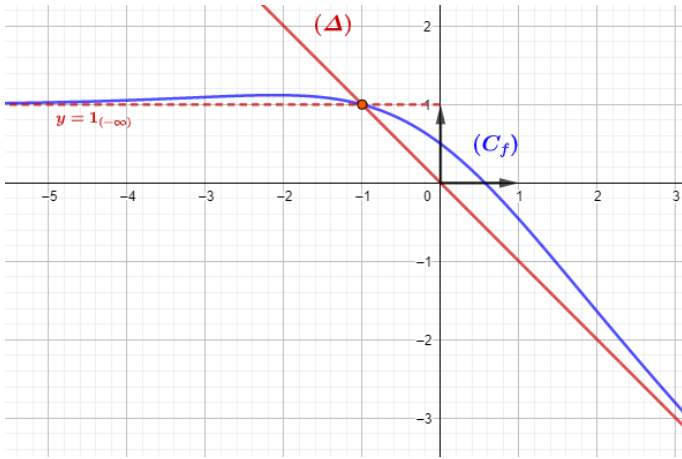
تقبلا حلا وحيدا  $\beta$  في المجال  $]0.5; 0.6[$

ومنه  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة  $\beta$ .

### 7 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و  $(C_f)$  متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب:  $(y = -1)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل  $(\Delta): (y = -x)$
- نعين نقطة تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المقارب  $(\Delta)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم  $(C_f)$



### 8 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\ln m + (x + \ln x)e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ln m + xe^x + e^x \ln m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ln m (1 + e^x) = 1 - xe^x$$

$$\Rightarrow \ln m = \frac{1 - xe^x}{1 + e^x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln m$$

ومنه مجموعة الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$

مع المستقيمات ذات المعادلة  $y_m = \ln m$

5

أ/ تبين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x$  مقارب

مائل لـ  $(C_f)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1 - xe^x}{e^x + 1} - x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1 - xe^x + xe^x + x}{e^x + 1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1 + x}{e^x + 1} \right]$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{e^x} \right] = 0 \quad \text{لأن:}$$

ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل لـ

$(C_f)$

ب/ ادرس الوضع النسبي بين  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ :

- دراسة إشارة الفرق  $(f(x) - y)$

$$f(x) - y = \frac{1 + x}{e^x + 1}$$

لدينا:  $(e^x + 1) > 0$  ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

| $x$        | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|------|-----------|
| $f(x) - y$ | $-$       | $0$  | $+$       |

- الوضعية:

- $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-\infty; -1[$
- $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  في النقطة  $A(-1; -1)$
- $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-1; +\infty[$

6

أ/ تبين أن:  $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^\alpha + \alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^\alpha = -(\alpha + 2)$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \frac{1 - \alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1}$$

$$= \frac{1 - \alpha(\alpha + 2)}{- (\alpha + 2) + 1}$$

$$= \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{-(\alpha + 1)}$$

$$= \frac{(\alpha + 1)^2}{-(\alpha + 1)}$$

$$= -(\alpha + 1)$$

- حصر  $f(\alpha)$ :

لدينا:

$$-2.2 < \alpha < -2.1$$

لما  $\ln m < \frac{1}{2}$  أي  $m < \sqrt{e}$

المعادلة تقبل حل وحيد موجب تماما

لما  $\ln m = \frac{1}{2}$  أي  $m = \sqrt{e}$  المعادلة

تقبل حل وحيد معدوم

لما  $\frac{1}{2} < \ln m < 1$  أي  $\sqrt{e} < m < e$  المعادلة

تقبل حل وحيد سالب تماما

لما  $1 < \ln m < f(\alpha)$  أي  $e < m < e^{f(\alpha)}$

المعادلة تقبل حلان سالبان تماما

لما  $\ln m = f(\alpha)$  أي  $m = e^{f(\alpha)}$  المعادلة

تقبل حل مضاعف سالب

لما  $\ln m > f(\alpha)$  أي  $m > e^{f(\alpha)}$  المعادلة

لا تقبل حلول

(I)

1 إيجاد عبارة  $g(x)$  بدلالة  $x$ :نضع:  $x = t$  نجد:

$$\begin{aligned} g(t) - 2g(1-t) &= e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \\ \Rightarrow -2g(1-t) &= -g(t) + e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \\ \Rightarrow 2g(1-t) &= g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

نضع:  $x = 1 - t$  معناه:  $t = 1 - x$ ، نجد:

$$\begin{aligned} g(1-t) - 2g(1-(1-t)) &= e^{1-t} - 2e^{1-(1+t)} - 3(1-t) + 3 \\ \Rightarrow g(1-t) - 2g(t) &= e^{1-t} - 2e^t + 3t \\ \Rightarrow 2g(1-t) - 4g(t) &= 2e^{1-t} - 4e^t + 6t \quad \dots (2) \end{aligned}$$

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$\begin{aligned} g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 - 4g(t) &= 2e^{1-t} - 4e^t + 6t \\ \Rightarrow -3g(t) &= -3e^t + 3t + 3 \\ \Rightarrow g(t) &= e^t - t - 1 \end{aligned}$$

إذن:  $g(x) = e^x - x - 1$ 

2

أ/ حساب نهايات الدالة  $g$  عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - x - 1] = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ e^x \left( 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty \end{aligned}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ :لدينا:  $g'(x) = e^x - 1$ 

ولدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

ومنه جدول التغيرات:

| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $g'(x)$ | -         | 0 | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ |

3 استنتج اتجاه تغير الدالة  $h$ :من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :نضع:  $u(x) = -x$ 

$$v(x) = g(u(x)) = g(-x) \quad \text{و}$$

$$v(x) = (g \circ u)(x) \quad \text{أي}$$

لدينا الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 0]$  والدالة  $u$  المجال  $I$ متناقصة على المجال  $[0; +\infty[$  المجال  $g(I)$ كيف وجدنا المجال  $g(I)$ :لدينا:  $I = ]-\infty; 0]$  و  $u(x) \in I$ معناه  $u(x) \leq 0$  أي  $-x \leq 0$ ومنه  $x \geq 0$  أي  $x \in [0; +\infty[$ ومنه:  $g(I) = [0; +\infty[$ وبما أن الدالة  $g$  متناقصة على  $]-\infty; 0]$ والدالة  $u$  متناقصة على  $[0; +\infty[$ إذن الدالة  $k$  متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$ بنفس الفكرة نجد: الدالة  $k$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 0]$ واضح أن:  $g(-x) = k(x)$ أي:  $-g(-x) = -k(x)$ وعليه:  $-k(x)$  متزايدة على المجال  $]-\infty; 0]$ ومتناقصة على المجال  $[0; +\infty[$ ولدينا:  $h(x)$  و  $-k(x)$  لهما نفس اتجاه التغيرلأن:  $h(x) = 1 - k(x)$ 

اذن:

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$   | 0 | $\beta$    | $+\infty$ |
|--------|-----------|------------|---|------------|-----------|
| $h(x)$ | 0         | $\vdots$   | 1 | $\vdots$   | $-\infty$ |
|        | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | $-\infty$ |

4 اثبات أن المعادلة  $h(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$ :لدينا الدالة  $h$  مستمرة ورتيبة على مجال تعريفهاولدينا:  $h(-1.14) \times h(-1.15) < 0$ لأن:  $h(-1.14) = 0.01$ و  $h(-1.15) = -0.08$

لدينا البسط عبارة عن مجموعة دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  والمقام كذلك.

ومنه البسط على المقام قابل للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

اذن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

- اثبات أن:  $f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}$

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 - g(-x) \\ &= 1 - e^{-x} - x + 1 \\ &= 2 - x - e^{-x} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{e^x[e^x - x - (1 - e^{-x})(e^x - 1)]}{(e^x - x + 1 - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x - x - e^x + 1 + 1 - e^{-x})}{(1 + g(x))^2} \\ &= \frac{e^x(2 - x - e^{-x})}{(1 + g(x))^2} \\ &= \frac{e^x h(x)}{(1 + g(x))^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$ :

لدينا:  $e^x > 0$  و  $(1 + g(x))^2 > 0$

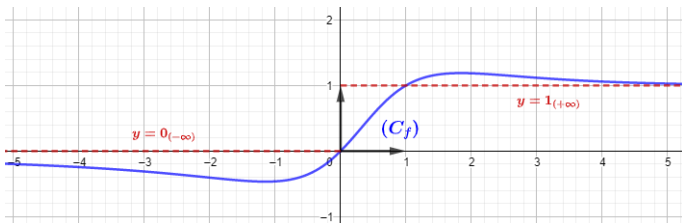
ومنه إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $h(x)$ .

ولدينا  $f(0) = 0$

- جدول التغيرات:

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | 0 | $\beta$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|---|------------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0           | + | 0          | -         |
| $f(x)$  | 0         | $f(\alpha)$ | 0 | $f(\beta)$ | 1         |

3 التمثيل البياني:



ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $h(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-1.15; -1.14[$

ولدينا:  $h(1.84) \times h(1.85) < 0$

لأن:  $h(1.85) = -0.007$

و  $h(1.84) = 0.001$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $h(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\beta$  في المجال  $]1.84; 1.85[$

اذن المعادلة  $h(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$

5 استنتاج إشارة كل من  $g(x)$  و  $h(x)$  تبعا لقيم العدد

الحقيقي  $x$ :

إشارة  $g(x)$ :

من جدول تغيرات  $g(x)$  لدينا:

| $x$    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|-----------|
| $g(x)$ | +         | 0 | +         |

إشارة  $h(x)$ :

من جدول تغيرات  $h(x)$  لدينا:

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $\beta$ | $+\infty$ |     |
|--------|-----------|----------|---------|-----------|-----|
| $h(x)$ | $-$       | $0$      | $+$     | $0$       | $-$ |

(II)

1 حساب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x + e^x - x - 1}{1 + e^x - x - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{e^x - 1}{e^x - x} \right] \\ &= \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^x - 1}{e^x - x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{e^x} \right] = 0 \text{ لأن:}$$

- التفسير الهندسي:

$(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار  $-\infty$  معادلته  $y = 0$ .

$(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار  $+\infty$  معادلته  $y = 1$ .

2

أ/ اثبات أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$



12

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

③ تبين أن النقطة  $A(0; \frac{1}{2})$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$ :- نبين أن  $(2(0) - x) \in D_f$ :واضح أن  $(-x) \in \mathbb{R}$ - نبين أن  $f(2(0) - x) + f(x) = 2(\frac{1}{2})$ :

$$\begin{aligned}
 f(2(0) - x) + f(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \\
 &= \frac{e^x(e^{-x} + 1) + e^{-x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} \\
 &= \frac{1 + e^x + 1 + e^{-x}}{1 + e^x + e^{-x} + 1} \\
 &= \frac{2}{2} \\
 &= 2\left(\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

④ تعيين معادلة  $(T)$  عند النقطة  $A$ :

$$\begin{aligned}
 (T): y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\
 &= \frac{e^0}{(e^0 + 1)^2}x + \frac{e^0}{e^0 + 1} \\
 &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

⑤

أ/ تحليل العبارة:  $e^{2x} - 2e^x + 1$ :

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$$

ب/ حساب  $g'(x)$  و  $g(0)$ :

$$\begin{aligned}
 \bullet g'(x) &= \frac{1}{4} - f'(x) \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{4(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 4e^x}{4(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{4(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\bullet g(0) = 0$$

- دراسة تغيرات الدالة  $g$ :حساب نهايات الدالة  $g$  عند أطراف مجموعة تعريفها:① تعيين مجموعة تعريف الدالة  $f$ :الدالة  $f$  معرفة لما:  $e^x + 1 \neq 0$ ولدينا  $e^x + 1 > 0$ ومنه الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ 

②

أ/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = 0$$

التفسير الهندسي:

 $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار  $-\infty$  معادلته  $y = 0$ ب/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$   $f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$ 

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} \\
 &= \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} \\
 &= \frac{1}{1 + e^{-x}}
 \end{aligned}$$

ج/ حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1 + e^{-x}} \right] = 1$$

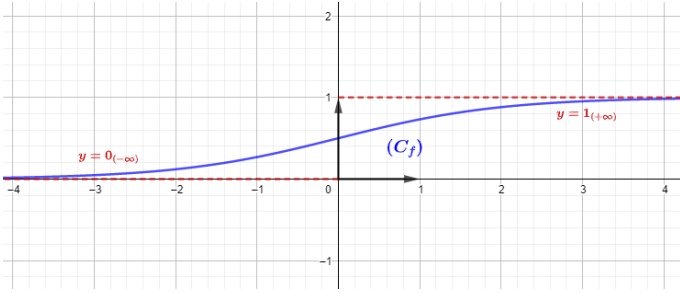
- التفسير الهندسي:  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقيبجوار  $+\infty$  معادلته  $y = 1$ .① اثبات أن الدالة  $f$  متزايدة تماما:- حساب  $f'(x)$ :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

لدينا  $g'(x) > 0$  ومنه:- جدول تغيرات الدالة  $f$ :

| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | 0         | 1         |

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم  $(C_f)$



$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لدينا:  $g'(x) \geq 0$

ولدينا:

$$\begin{aligned} (e^x - 1)^2 = 0 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة  $g$ :

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $g'(x)$ | +         | 0   | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

ج/ استنتاج الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  والمماس  $(T)$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) \\ \Rightarrow f(x) - \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right) &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الوضعية من إشارة  $-g(x)$ :

لدينا من جدول تغيرات الدالة  $g$ :

| $x$    | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $g(x)$ | -         | 0   | +         |

- الوضعية:

- $(C_f)$  تحت  $(T)$  لما  $x \in ]-\infty; 0[$ .
- $(C_f)$  يقطع  $(T)$  في النقطة  $A$ .
- $(C_f)$  فوق  $(T)$  لما  $x \in ]0; +\infty[$ .

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة  $y = 0$  و  $y = 1$ .
- نعين  $A$  نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع  $(T)$ .
- نرسم المماس  $(T)$ .

إذن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  بجوار  $+\infty$  معادلته  $y = -x + 1$

ج/ دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ :

ندرس إشارة الفرق:

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Rightarrow (x+1)e^{-2x} = 0 \\ &\Rightarrow x+1 = 0 \\ &\Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

ومنه:

| $x$                   | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|-----------------------|-----------|------|-----------|
| $f(x) - y_{(\Delta)}$ | $-$       | $0$  | $+$       |

- $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-\infty; -1[$
- $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  لما  $x = -1$
- $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-1; +\infty[$

2

أ/ تبين أنه:  $f'(x) = -g(x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}(x+1) \\ &= -1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x} \\ &= -(1 + e^{-2x} + 2xe^{-2x}) \\ &= -(e^{2x} + 1 + 2x)e^{-2x} \\ &= -g(x)e^{-2x} \end{aligned}$$

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$ :

لدينا  $e^{-2x} > 0$ ، إذن إشارة  $f'(x)$  عكس إشارة  $g(x)$

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ | $+$       | $0$         | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f(\alpha)$ | $-\infty$ |

ج/ تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$ :

• لدينا: الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما على المجال  $[-1.2; -1.1]$

ولدينا:  $f(-1.1) \times f(-1.2) < 0$

لأن:  $f(-1.2) \approx -0.8$  و  $f(-1.1) \approx 0.05$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $x_1$  في المجال  $]-1.2; -1.1[$

• لدينا: الدالة  $f$  مستمرة متناقصة تماما على المجال  $[1.1; 1.2]$

ولدينا:  $f(1.1) \times f(1.2) < 0$

لأن:  $f(1.2) \approx -0.023$  و  $f(1.1) \approx 0.13$

(I)

1 دراسة تغيرات تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= +\infty \end{aligned}$$

- دراسة  $g'(x)$ :

$$g'(x) = 2 + 2e^x = 2(1 + e^x)$$

لدينا:  $g'(x) > 0$  ومنه الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

2 تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ :

لدينا: الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة على المجال  $[-0.8; -0.7]$

ولدينا:  $g(-0.7) \times g(-0.8) < 0$

لأن  $g(-0.8) \approx -0.2$  و  $g(-0.7) \approx 0.09$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا في المجال  $]-0.8; -0.7[$

3 استنتاج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | $-$       | $0$      | $+$       |

(II)

1

أ/ حساب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \underbrace{e^{-2x}}_{+\infty} \left( \underbrace{e^{2x}}_0 - \frac{2x}{2} \underbrace{e^{2x}}_0 + \underbrace{x+1}_{-\infty} \right) \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \underbrace{x}_{+\infty} - \frac{1}{2} \underbrace{(-2x)e^{-2x}}_0 + \underbrace{e^{-2x}}_0 \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)e^{-2x}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2} \underbrace{(-2x)e^{-2x}}_0 + \underbrace{e^{-2x}}_0 \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيمات

$$y_m = m \text{ ذات المعادلة}$$

وهي:

لما  $m < 2$  المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

لما  $m = 2$  المعادلة تقبل حل معدوم وحل سالب

لما  $2 < m < f(\alpha)$  المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

لما  $m = f(\alpha)$  المعادلة تقبل حل مضاعف سالب تماما

لما  $m > f(\alpha)$  المعادلة لا تقبل حلول

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $x_2$  في المجال  $[1.1; 1.2]$

$$\textcircled{3} \text{ تبين أن } f(\alpha) = -\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}$$

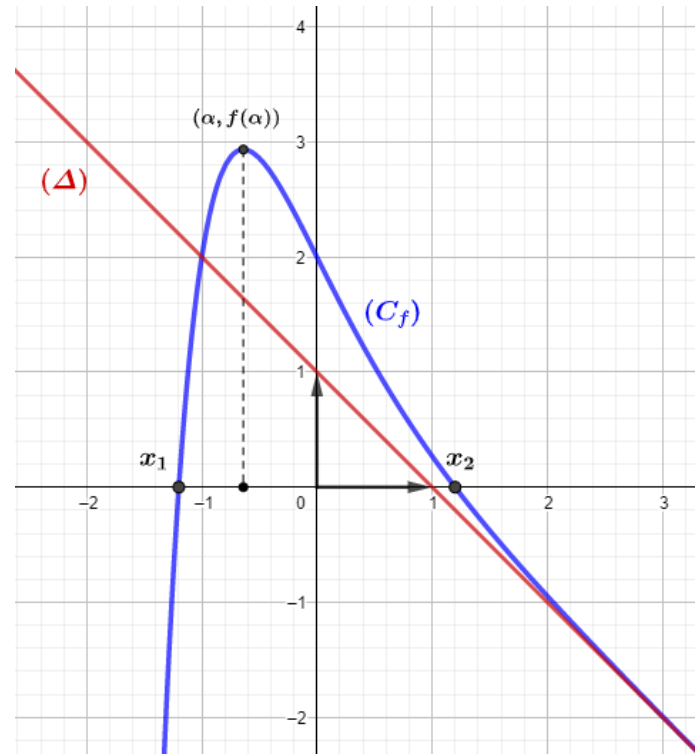
لدينا:  $g(\alpha) = 0$  أي:  $e^{2\alpha} + 1 + 2\alpha = 0$

ومنه:  $e^{2\alpha} = -1 - 2\alpha$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 1 - \alpha + (\alpha + 1)e^{-2\alpha} \\ &= 1 - \alpha + \frac{\alpha + 1}{e^{2\alpha}} \\ &= 1 - \alpha + \frac{\alpha + 1}{-1 - 2\alpha} \\ &= \frac{-1 - 2\alpha + \alpha + 2\alpha^2 + \alpha + 1}{-(1 + 2\alpha)} \\ &= -\frac{2\alpha^2}{1 + 2\alpha} \end{aligned}$$

$\textcircled{4}$  التمثيل البياني:



$\textcircled{5}$  المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned} (1 - m - x)e^{2x} + x + 1 &= 0 \\ \Rightarrow (1 - m - x)e^{2x} &= -(x + 1) \\ &= 1 - m - x = -(x + 1)e^{-2x} \\ \Rightarrow -m &\Rightarrow -1 + x - (x + 1)e^{-2x} \\ \Rightarrow m &= 1 - x + (x + 1)e^{-2x} \\ \Rightarrow m &= f(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

ب/ تبين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + 4e^{-x} - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) = \frac{1}{1} = 1$$

التفسير الهندسي:

( $C_f$ ) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار  $+\infty$  معادلته  $y = 1$

② اثبات أنه:  $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 4)(e^x + 1) - e^x(e^x + 4x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 5e^x + 4 - e^{2x} - 4xe^x + e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{6e^x + 4 - 4xe^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{2((3 - 2x)e^x + 2)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

③ دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم تشيكل جدول تغيراتها:

لدينا  $(e^x + 1)^2 > 0$

ومنه إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0           | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f(\alpha)$ | 1         |

④

أ/ تبين أن  $(\Delta)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (4x - 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{e^x + 4x - 1 - (4x - 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{e^x + 4x - 1 - 4xe^x - 4x + e^x + 1}{e^x + 1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2e^x - 4xe^x}{e^x + 1} \right]$$

$$= 0$$

(I)

① حساب نهايات الدالة  $g$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \underbrace{3e^x}_0 - \underbrace{2xe^x}_0 + 2 \right) = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

② دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ :

$$g'(x) = -2e^x + (3 - 2x)e^x$$

$$= (1 - 2x)e^x$$

لدينا:  $e^x > 0$

ومنه إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $(1 - 2x)$ :

$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ومنه:

| $x$     | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$               | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------------------------|-----------|
| $g'(x)$ | +         | 0                           | -         |
| $g(x)$  | 2         | $g\left(\frac{1}{2}\right)$ | $-\infty$ |

③ تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في

المجال  $[1.6; 1.7]$ :

لدينا: الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة على المجال  $[1.6; 1.7]$

ولدينا:  $g(1.6) \times g(1.7) < 0$

لأن  $g(1.6) \approx 1.01$  و  $g(1.7) \approx -0.19$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا في المجال  $[1.6; 1.7]$

④ استنتاج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | +         | 0        | -         |

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ

$$f(x) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$$

و ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم

المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

①

أ/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ :

- حصر العدد  $f(\alpha)$ :

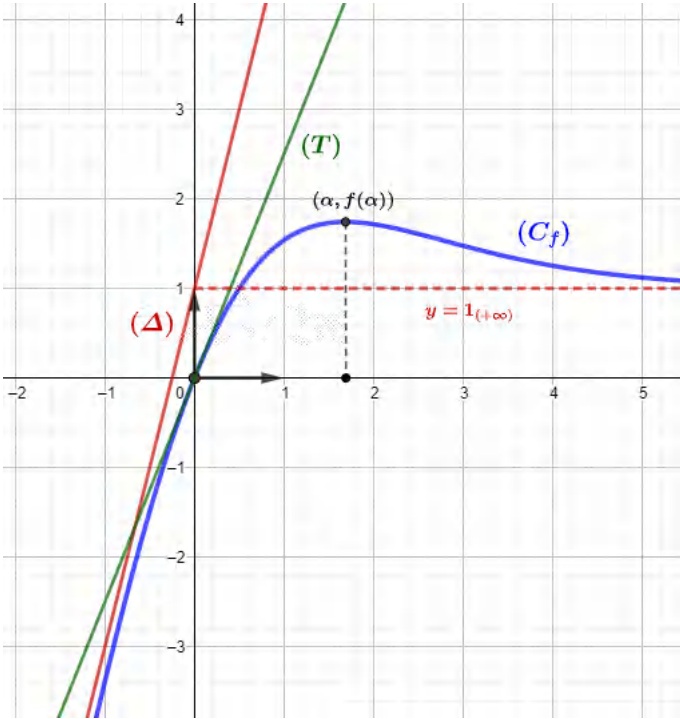
لدينا:  $1.6 < \alpha < 1.7$

ومنه:  $6.4 < 4\alpha < 6.8$

ومنه:  $1.4 < 4\alpha - 5 < 1.8$

إذن:  $1.4 < f(\alpha) < 1.8$

7 رسم كل من  $(\Delta)$ ،  $(T)$  و  $(C_f)$ :



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [-4xe^x] = 0 \text{ لأن}$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ :

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Rightarrow \frac{2e^x - 4xe^x}{e^x + 1} = 0 \\ &\Rightarrow 2e^x(1 - 2x) = 0 \\ &\Rightarrow 1 - 2x = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

| $x$                   | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|-----------------------|-----------|---------------|-----------|
| $f(x) - y_{(\Delta)}$ | $+$       | $0$           | $-$       |

•  $x \in ]-\infty; \frac{1}{2}[$  لما  $(\Delta)$  فوق  $(C_f)$

•  $x = \frac{1}{2}$  لما  $(\Delta)$  يقطع  $(C_f)$

•  $x \in ]\frac{1}{2}; +\infty[$  لما  $(\Delta)$  تحت  $(C_f)$

5 كتابة معادلة  $(T)$  لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(0)x + f(0) \\ &= \frac{5}{2}x \end{aligned}$$

6 تبين أن  $f(\alpha) = 4\alpha - 5$

لدينا:  $g(\alpha) = 0$

ومنه:  $(3 - 2\alpha)e^\alpha + 2 = 0$

إذن:  $e^\alpha = \frac{2}{2\alpha - 3}$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{e^\alpha + 4\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \\ &= \frac{\frac{2}{2\alpha - 3} + 4\alpha - 1}{\frac{2}{2\alpha - 3} + 1} \\ &= \frac{2 + 8\alpha^2 - 12\alpha - 2\alpha + 3}{2\alpha - 3} \\ &= \frac{8\alpha^2 - 14\alpha + 5}{2\alpha - 3} \\ &= \frac{8\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{5}{4}\right)}{2\alpha - 3} \\ &= \frac{(2\alpha - 1)(4\alpha - 5)}{2\alpha - 1} \\ &= 4\alpha - 5 \end{aligned}$$



15

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-x^2 e^{-x} + e}{x^2} \\
 &= -\frac{(x^2 e^{-x} - e)}{x^2} \\
 &= -\frac{g(-x)}{x^2}
 \end{aligned}$$

4 استنتاج تغيرات الدالة  $f$ 

لدينا إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-g(-x)$  لأن  $x^2 > 0$  ولدينا إشارة  $(g(-x))$  كالآتي:

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $g(-x)$ | $+$       | $0$  | $-$       |

ومنه إشارة  $(-g(-x))$  كالآتي:

|          |           |      |           |
|----------|-----------|------|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $-g(-x)$ | $-$       | $0$  | $+$       |

إذن

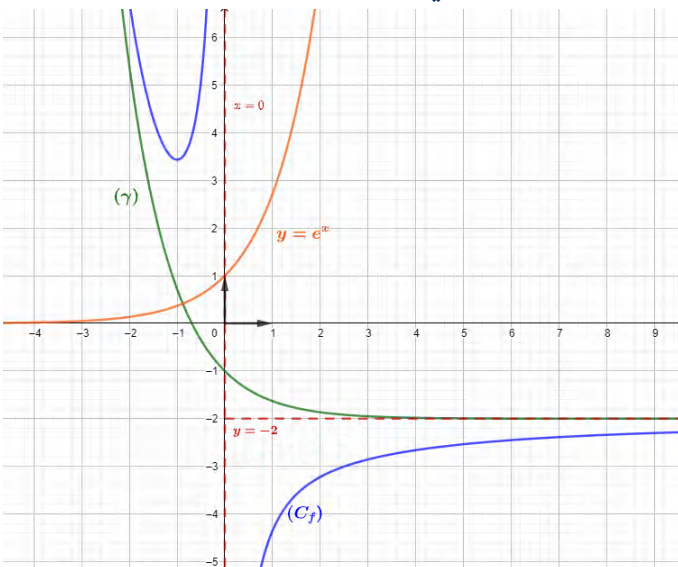
- جدول تغيرات الدالة  $f$ :

|         |           |         |           |           |
|---------|-----------|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$    | $0$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$     | $+$       | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(-1)$ | $+\infty$ | $-2$      |

5 تبين كيف يمكن إنشاء  $(\gamma)$ :

نرسم منحنى الدالة  $e^x \mapsto x$  ثم نناظره بالنسبة لمحور الترتيب، ثم نسحبه بالانسحاب الذي شعاعه  $(0; -2)$

- التمثيل البياني:

I - حساب  $g(1)$ :

$$g(1) = 1^2 e^1 - e = 0$$

- تعيين إشارة  $g(x)$ :

من البيان نجد:

|        |           |     |           |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |

- استنتاج إشارة  $g(-x)$ :

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $g(-x)$ | $+$       | $0$  | $-$       |

## II

## 1 حساب النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

بعد حساب النهايات نجد أن المنحني  $(C_f)$  يقبل:

- مستقيم مقارب عمودي بجوار  $\pm\infty$  معادلته  $x = 0$
- مستقيم مقارب أفقي بجوار  $+\infty$  معادلته  $y = -2$

2 تبين أن  $(\gamma)$  و  $(C_f)$  متقاربان بجوار  $-\infty$ :

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_{(\gamma)}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} - e^{-x} + 2 \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{e}{x} \right) = 0
 \end{aligned}$$

- دراسة وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\gamma)$ :

$$f(x) - y_{(\gamma)} = -\frac{e}{x}$$

إشارة الفرق عكس إشارة  $(-x)$  ومنه:

|                       |           |     |           |
|-----------------------|-----------|-----|-----------|
| $x$                   | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f(x) - y_{(\gamma)}$ | $+$       | $0$ | $-$       |

الوضعية:

- $(C_f)$  فوق  $(\gamma)$  لما  $x \in ]-\infty; 0[$
- $(C_f)$  تحت  $(\gamma)$  لما  $x \in ]0; +\infty[$

3 تبين أن:  $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$ :

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2}$$

لدينا:  $e^{-x} > 0$  ومنه إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة  $f$ :

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0           | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

③ تعيين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) = f'(\alpha) = g(\alpha)e^{-\alpha} = 0$$

التفسير الهندسي:  $(C_f)$  يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$  معادلته  $y = f(\alpha)$

④

أ/ تبين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 2$

مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + 2)(1 - e^{-x}) - (x + 2)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + 2)(1 - e^{-x} - 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-x}(x + 2)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-xe^{-x}}{0} - 2e^{-x} \right] \end{aligned}$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ :

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Rightarrow -e^{-x}(x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow -(x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

| $x$                   | $-\infty$ | -2 | $+\infty$ |
|-----------------------|-----------|----|-----------|
| $f(x) - y_{(\Delta)}$ | +         | 0  | -         |

•  $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-\infty; -2[$

•  $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  لما  $x = -2$

•  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-2; +\infty[$

⑤

أ/ اثبات أنه يوجد مماس  $(T)$  وحيد لـ  $(C_f)$  يوازي  $(\Delta)$ :

يوجد مماس وحيد يوازي  $(\Delta)$  معناه يوجد عدد حقيقي وحيد  $a$

يحقق:  $f'(a) = 1$

$$\begin{aligned} f'(a) = 1 &\Rightarrow e^{-a}(e^a + a + 1) = 1 \\ &\Rightarrow e^a + a + 1 = e^a \\ &\Rightarrow a + 1 = 0 \end{aligned}$$

(I)

① دراسة تغيرات الدالة  $g$ ، وتشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

- دراسة  $g'(x)$ :

$$f'(x) = e^x + 1 > 0$$

لدينا:  $f'(x) > 0$  إذن الدالة  $g$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$

- جدول التغيرات:

| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $g'(x)$ |           | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

② تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$

• لدينا الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة على المجال  $]-1.28; -1.27[$

• ولدينا:  $g(-1.28) \times g(-1.27) < 0$  لأن

$$g(-1.27) = 0.01 \text{ و } g(-1.28) \approx -0.001$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$

تقبل حل وحيداً  $\alpha$  في المجال  $]-1.28; -1.27[$

③ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

(II)

① حساب نهايات الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \underbrace{(x + 2)}_{-\infty} \underbrace{(1 - e^{-x})}_{-\infty} \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \underbrace{(x + 2)}_{+\infty} \underbrace{(1 - e^{-x})}_1 \right] = +\infty$$

②

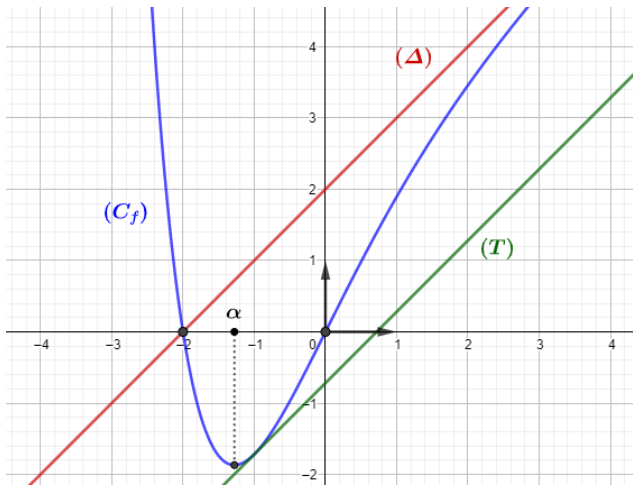
أ/ تبين أنه:  $f'(x) = g(x)e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - e^{-x} - (-e^{-x})(x + 2) \\ &= 1 - e^{-x} + xe^{-x} + 2e^{-x} \\ &= 1 + e^{-x} + xe^{-x} \\ &= \left( \frac{1}{e^{-x}} + 1 + x \right) e^{-x} \\ &= (e^x + 1 + x)e^{-x} \\ &= g(x)e^{-x} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغيرات الدالة  $f$ :

$$(C_f) \cap (yy') = \{0\} \quad \text{إذن:}$$

ب/ التمثيل البياني:



7 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{m-2}{x+2} &= -e^{-x} \Rightarrow m-2 = -e^{-x}(x+2) \\ &\Rightarrow m = -e^{-x}(x+2) + 2 \\ &\Rightarrow m+x = -e^{-x}(x+2) + 2 + x \\ &\Rightarrow m+x = (x+2)(1-e^{-x}) \\ &\Rightarrow m+x = f(x) \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيمات

$$y_m = x + m \text{ ذات المعادلة}$$

وهي:

|     |                 |                            |
|-----|-----------------|----------------------------|
| لما | $m < 2 - e$     | المعادلة لا تقبل حلول      |
| لما | $m = 2 - e$     | المعادلة تقبل حل وحيد      |
| لما | $2 - e < m < 2$ | المعادلة تقبل حلين متميزين |
| لما | $m \geq 2$      | المعادلة تقبل حل وحيد      |

(III)

1 تبين أن الدالة  $h$  زوجية:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة  $h$  زوجية

1 شرح كيف يمكن إنشاء  $(C_h)$ :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x > 0 \\ f(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

لما  $x > 0$   $(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$ ، وبما أن الدالة  $h$  زوجية،

فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.

$$\Rightarrow a = -1$$

ب/ التحقق أن معادلة  $(T)$  هي:  $y_{(T)} = x + 2 - e$

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ &= 1(x + 1) + (1)(1 - e) \\ &= x + 1 + 1 - e \\ &= x + 2 - e \end{aligned}$$

6

أ/ تبين أن  $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$

لدينا:  $g(\alpha) = 0$

ومنه:  $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$

إذن:  $e^\alpha = -(\alpha + 1)$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (\alpha + 2)(1 - e^{-\alpha}) \\ &= \frac{(\alpha + 2)(1 - e^{-\alpha})e^\alpha}{e^\alpha} \\ &= \frac{(\alpha + 2)(e^\alpha - 1)}{e^\alpha} \\ &= \frac{(\alpha + 2)(-\alpha - 1 - 1)}{-\alpha - 1} \\ &= \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 2)}{\alpha + 1} \\ &= \boxed{\frac{(\alpha + 2)^2}{\alpha + 1}} \end{aligned}$$

- حصر  $f(\alpha)$ :

لدينا:  $-1.28 < \alpha < -1.27$

إذن:  $-1.97 < f(\alpha) < -1.85$

أ/ إيجاد نقط تقاطع  $(C_f)$  مع محوري الاحداثيات:

- مع حامل محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x + 2)(1 - e^{-x}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ 1 - e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ e^{-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ x = 0 \end{cases}$$

إذن:  $(C_f) \cap (xx') = \{-2; 0\}$

- مع حامل محور الترتيب:

$$f(0) = 0$$

- جدول تغيرات الدالة  $g$ :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

② تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ :لدينا الدالة  $g$  مستمرة ومنتزعة تماما على  $\mathbb{R}$ 

$$g(-1.38) \times g(-1.37) < 0 \text{ لدينا}$$

$$\text{لأن: } g(-1.38) \approx -0.02$$

$$\text{و } g(-1.37) \approx 0.01$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x)$  تقبل حلاوحيدا  $\alpha$  حيث  $-1.38 < \alpha < -1.37$ ③ استنتاج إشارة  $g(x)$ :

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

(II)

①

/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = 0$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{1 - x e^{-x}} \right) = +\infty$$

ب/ تبين أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ 

$$f'(x) = \frac{(2x e^x + x^2 e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)x^2 e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{2x e^{2x} - 2x^2 e^x + x^2 e^{2x} - x^3 e^x - x^2 e^{2x} + x^2 e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{x e^x (2e^x - x^2 - x)}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

(I)

①

/ حساب  $g'(x)$ :

$$g'(x) = 2e^x - 2x - 1$$

- دراسة اتجاه تغير الدالة  $g'$ :

• النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - 2x - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2e^x \left( 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{2e^x} \right) \right)$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - 2x - 1)$$

$$= +\infty$$

• دراسة  $g''(x)$ :

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 2e^x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = 1$$

$$\Rightarrow x = 0$$

ومنه:

• جدول تغيرات الدالة  $g'$ :

|          |           |   |           |
|----------|-----------|---|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $g''(x)$ | -         | 0 | +         |
| $g'(x)$  | $+\infty$ | 1 | $+\infty$ |

ب/ تبين أنه، من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) > 0$ :من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة  $g'$  تبلغ قمة حدية صغرىعند 0 و  $g'(0) = 1$ ومنه فهي موجبة تماما أي  $g'(x) > 0$ ج/ حساب نهايتي الدالة  $g$  عند كل من  $-\infty$  و  $+\infty$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - x^2 - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^x \left( 2 - \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} \right) \right)$$

$$= +\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^n}{e^x} \right) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - x)$$

$$= -\infty$$



$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2(1+x)e^{-x} - (1+x)^2 e^{-x} \\
 &= e^{-x}(1+x)(2-1-x) \\
 &= e^{-x}(1+x)(1-x) \\
 &= e^{-x}(1-x^2) \\
 &= g(x)
 \end{aligned}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة  $f$ :

لدينا:  $f'(x) = g(x)$  ومنه إشارة المشتقة من إشارة  $g(x)$

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$       | $+\infty$ |     |
|---------|-----------|------|-----------|-----------|-----|
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$       | $0$       | $-$ |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $0$  | $4e^{-1}$ | $0$       | $0$ |

ج/ استنتاج أن الدالة  $f$  موجبة على  $\mathbb{R}$ :

من جدول التغيرات: أقصى قيمة حدية صغرى تبلغها الدالة  $f$  هي  $0$ ، ومنه فالدالة  $f$  موجبة على  $\mathbb{R}$

5

أ/ تعيين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)-1}{x} \right)$ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)-1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right) = f'(0) \\
 &= g(0) = 1
 \end{aligned}$$

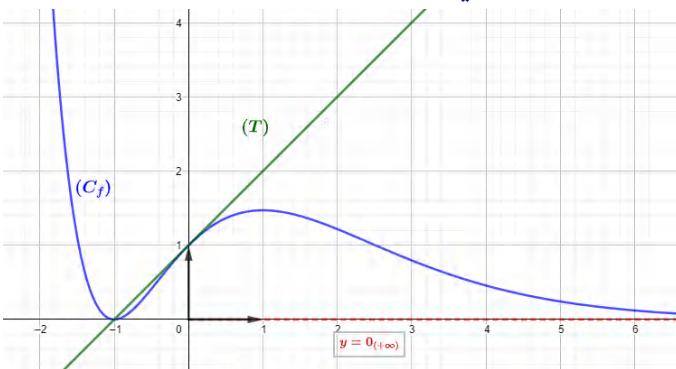
• التفسير الهندسي: ( $C_f$ ) يقبل مماس عند النقطة ذات

الفصلة  $0$  معامل توجيهه  $1$

ب/ كتابة معادلة المماس ( $T$ ) عند النقطة ذات الفصلة  $0$ :

$$\begin{aligned}
 y_{(T)} &= f'(0)(x-0) + f(0) \\
 &= x + 1
 \end{aligned}$$

6 التمثيل البياني:



7 المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned}
 (1+x)^2 &= me^x \Rightarrow (1+x)^2 e^{-x} = m \\
 &\Rightarrow f(x) = m
 \end{aligned}$$

I

1

أ/ كتابة معادلة للمستقيم ( $d$ ):

المستقيم ( $d$ ) مستقيم تآلفي ميله  $(-1)$  لأنه موازي للمنصف

الثاني، ويمر من الترتيبة  $1$

إذن:  $y_{(d)} = -x + 1$

ب/ تعيين  $g(0)$ ،  $g(-1)$  و  $g'(0)$

$$g(-1) = 0$$

$$g(0) = 1$$

$$g'(0) = -1$$

ج/ تبين أن  $g(x) = (1-x^2)e^{-x}$ :

لدينا:  $g(0) = 1$

$$(a + b(0)^2)e^{-0} = 1 \quad \text{ومنه:}$$

إذن:  $a = 1$

ولدينا:  $g(-1) = 0$

$$(1 + b(-1)^2)e^{-(-1)} = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$1 + b = 0 \quad \text{ومنه:}$$

إذن:  $b = -1$

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-x} \quad \text{وعليه:}$$

2 تعيين إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$ :

|        |           |      |     |           |     |
|--------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $g(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |

3

أ/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \underbrace{(1+x)^2}_{+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{+\infty} \right] = +\infty$$

ب/ علما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ ، تبين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(1+x+x^2)e^{-x}] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \underbrace{e^{-x}}_0 + \underbrace{x e^{-x}}_0 + \underbrace{x^2 e^{-x}}_0 \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

• التفسير الهندسي: ( $C_f$ ) يقبل مستقيم حامل محور الفواصل

كمقارب أفقي بجوار  $+\infty$

4

أ/ تبين أنه من أجل كل  $x$  حقيقي:  $f'(x) = g(x)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع  $(C_f)$  مع

المستقيمات ذات المعادلة  $y_m = m$ ، وهي:

|     |                   |                                              |
|-----|-------------------|----------------------------------------------|
| لما | $m < 0$           | المعادلة لا تقبل حلول                        |
| لما | $m = 0$           | المعادلة تقبل حل مضاعف سالب قيمته -1         |
| لما | $0 < m < 1$       | المعادلة تقبل حل موجب وحلين سالبين           |
| لما | $m = 1$           | المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب     |
| لما | $1 < m < 4e^{-1}$ | المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب           |
| لما | $m = 4e^{-1}$     | المعادلة تقبل حل سالب وحل مضاعف موجب قيمته 1 |
| لما | $m > 4e^{-1}$     | المعادلة تقبل حل وحيد سالب                   |

(II)

1 تبين أن الدالة  $h$  زوجية

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة  $h$  زوجية

2 شرح كيف يمكن إنشاء  $(C_h)$  :

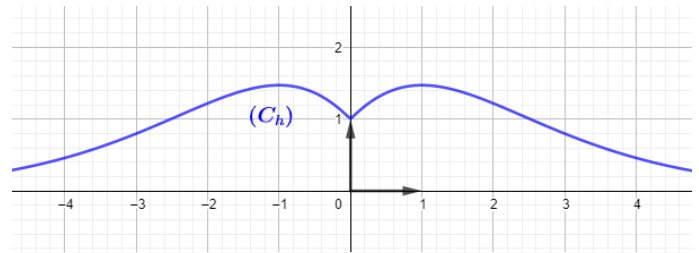
لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x > 0 \\ f(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

لما  $x > 0$   $(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$ ، وبما أن الدالة  $h$  زوجية،

فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.

- إنشاء  $(C_h)$ :



$$g(-1.51) \approx -0.04 \quad \text{و}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$

تقبل حل وحيد في المجال  $[-1.52; -1.52]$ .

إذن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبلين حلين أحدهما معدوم والآخر

$\alpha$  حيث:  $-1.52 < \alpha < -1.51$

ب/ استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | 0 | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|---|-----------|
| $g(x)$ | +         | 0        | - | +         |

(II)

1

أ/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + (x^2)e^{-x}] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + (x^2)e^{-x}] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ب/ تبين أنه من أجل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = -g(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + (2x + 3)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 3x + 2) \\ &= -1 + e^{-x}(-x^2 - x + 1) \\ &= -[1 + e^{-x}(x^2 + x - 1)] \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ :

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-g(x)$

وعليه:

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$   | 0      | $+\infty$          |
|---------|-----------|------------|--------|--------------------|
| $f'(x)$ | -         | 0          | +      | -                  |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\nearrow$ | $f(0)$ | $\searrow -\infty$ |
|         |           | 0.38       |        |                    |

د/ تعيين دون حساب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(0) = -g(0) = 0$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

$(C_f)$  يقبل مماس مواز لمحور الفواصل معادلته  $y = f(\alpha)$ .

2

(I)

1

أ/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2 e^{-x}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x^2 e^{-x}) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ ، وتشكيل جدول تغيراتها:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x + 1)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + x - 1) \\ &= 2xe^{-x} + e^{-x} - x^2 e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x} \\ &= e^{-x}(-x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow e^{-x}(-x^2 + x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \end{aligned}$$

لدينا  $\Delta = 1 - 4(-1)(2) = 9$  ومنه:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+3}{-2} = -1 \\ \text{أو} \\ x = \frac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$$

ومنه:

| $x$     | $-\infty$ | $-1$    | $2$    | $+\infty$ |     |
|---------|-----------|---------|--------|-----------|-----|
| $g'(x)$ | $-$       | $0$     | $+$    | $0$       | $-$ |
| $g(x)$  | $+\infty$ |         | $g(1)$ |           | $1$ |
|         |           | $g(-1)$ |        |           |     |

2

أ/ تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين في  $\mathbb{R}$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 + (0^2 + 0 - 1)e^{-0} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حل معدوم لأن  $g(0) = 0$

ولدينا  $0 < g(-1.51) \times g(-1.52)$

لأن:  $g(-1.52) \approx 0.04$

• نرسم المستقيم  $(\Delta)$  المقارب المائل ذو المعادلة

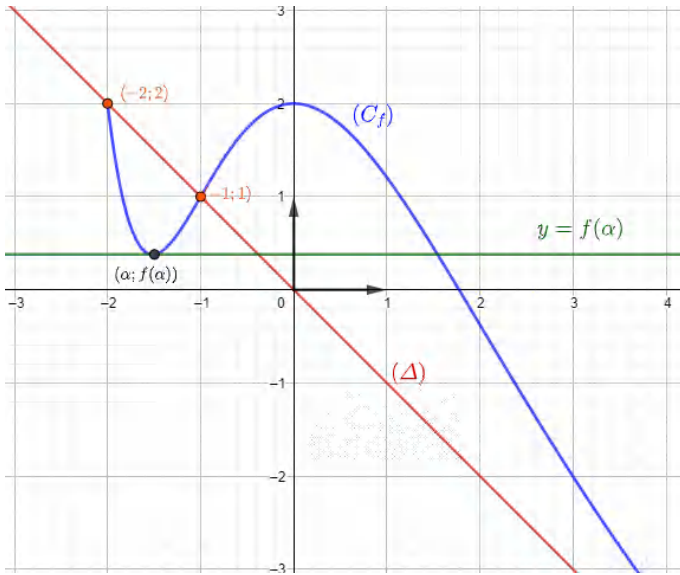
$$y_{(\Delta)} = -x$$

• نعين النقطة  $(\alpha; f(\alpha))$  نقطة تماس المماس مع  $(C_f)$

• نرسم المماس ذو المعادلة  $y = f(\alpha)$

• باستعمال جدول تغيرات الدالة  $f$  نرسم المنحنى

$(C_f)$  مع الاستعانة بجدول الوضعية



• المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned} (m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) &= 0 \\ \Rightarrow me^x - xe^x + (x^2 + 3x + 2) &= 0 \\ \Rightarrow m - x + e^{-x}(x^2 + 3x + 2) &= 0 \\ \Rightarrow -x + e^{-x}(x^2 + 3x + 2) &= -m \\ \Rightarrow f(x) &= -m \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع

المستقيمات ذات المعادلة  $y_m = -m$  وهي:

$$\text{لما } -m < f(\alpha) \text{ أي لما } m > -f(\alpha)$$

المعادلة تقبل حل وحيد موجب

$$\text{لما } -m = f(\alpha) \text{ أي لما } m = -f(\alpha)$$

المعادلة تقبل حلين: حل مضاعف وحل موجب

$$\text{لما } f(\alpha) < -m < 2 \text{ أي لما } -2 < m < -f(\alpha)$$

المعادلة تقبل حلين سالبين وحل موجب

$$\text{لما } -m = 2 \text{ أي لما } m = -2$$

المعادلة تقبل حل مضاعف والآخر سالب

$$\text{لما } -m > 2 \text{ أي لما } m < -2$$

المعادلة لا تقبل حلول

أ/ تبين أن  $(\Delta)$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_{(\Delta)}] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x} - (-x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 3x + 2)e^{-x}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه قيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x$  مستقيم مقارب مائل

للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

ب/ دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ :

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} &= 0 \Rightarrow e^{-x}(x^2 + 3x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 3^2 - 4(2)(1) = 1 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+1}{2} = -1 \\ \text{أو} \\ x = \frac{-3-1}{2} = -2 \end{cases}$$

وعليه:

| $x$                   | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $+\infty$ |     |
|-----------------------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $f(x) - y_{(\Delta)}$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |

- الوضعية:

•  $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]-1; +\infty[$

•  $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  لما  $x \in \{-2; -1\}$  أي في

النقطتين ذات الاحداثيات:  $(-1; 1)$  و  $(-2; 2)$ .

•  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-2; -1[$

ج/ تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف:

لدينا:

$$f''(x) = -g'(x)$$

ومنه جدول إشارة  $f''(x)$ :

| $x$      | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
|----------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $f''(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |

المشتقة الثانية انعدمت مرتين لما  $x = \{-1; 2\}$  و غيرت

اشارتها

ومنه الدالة  $f$  تقبل نقطتي انعطاف هما:  $(-1; 1)$  و

$$(2; f(2)) \quad \text{حيث: } f(2) \approx -0.38$$

د/ رسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  على المجال  $[-2; +\infty[$ :

• نعين النقطة  $(-1; 1)$  و النقطة  $(-2; 2)$  نقطتي

تقاطع  $(C_f)$  مع  $(\Delta)$



20

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1

أ/ حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  وتفسير النتائج

هندسيا :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 - \frac{1}{0^+} = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

إذن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار  $\pm\infty$  معادلته:  $x = 0$ أ/ تبين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 - \frac{e^x}{e^x(1 - e^{-x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 - \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ب/ حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ - استنتاج أن المستقيم  $(\Delta_1)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  :

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} - x - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{e^x}{e^x - 1} \right] = 0 \end{aligned}$$

إذن: المستقيم  $(\Delta_1)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ 

2

أ/ تبين أنه:  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} \\ &= x + \frac{e^x - 1 - e^x}{e^x - 1} \end{aligned}$$

$$= x - \frac{1}{e^x - 1}$$

ب/ استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta_2)$  بجوار  $+\infty$  :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{e^x - 1} \right) = 0$$

إذن: المستقيم  $(\Delta_2)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  :- الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta_1)$  :

$$f(x) - y_{(\Delta_1)} = \frac{-e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x}{1 - e^x}$$

لدينا:  $e^x > 0$

إذن إشارة الفرق من إشارة المقام

لدينا  $1 - e^x \neq 0$ معناه:  $e^x \neq 1$ ومنه:  $x \neq 0$ 

إذن

| $x$       | $-\infty$                | 0                        | $+\infty$                |
|-----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $1 - e^x$ | +                        | -                        | -                        |
| الوضعية   | $(C_f)$ تحت $(\Delta_1)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta_1)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta_1)$ |

- الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta_2)$  :

$$f(x) - y_{(\Delta_2)} = -\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^x}$$

لدينا  $1 - e^x \neq 0$

معناه:  $e^x \neq 1$

ومنه  $x \neq 0$

إذن:

| $x$       | $-\infty$                | 0                        | $+\infty$                |
|-----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $1 - e^x$ | +                        | -                        | -                        |
| الوضعية   | $(C_f)$ تحت $(\Delta_2)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta_2)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta_2)$ |

3

أ/ دراسة تغيرات الدالة  $f$  ، وجدول تغيراتها:

لدينا:

$$f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$$

ومنه:

$$f'(x) = 1 - \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

لدينا:  $f'(x) > 0$

ومنه:

|         |                            |     |                            |
|---------|----------------------------|-----|----------------------------|
| $x$     | $-\infty$                  | $0$ | $+\infty$                  |
| $f'(x)$ | $+$                        |     | $+$                        |
| $f(x)$  | $-\infty \nearrow +\infty$ |     | $-\infty \nearrow +\infty$ |

ب/ تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:

$$-1.4 < \beta < -1.3 \text{ و } 0.8 < \alpha < 0.9$$

• لدينا الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة على المجال  $]0.8; 0.9[$

ولدينا  $f(0.8) \approx -0.01$  و  $f(0.9) \approx 0.21$  لأن:  $f(0.8) \times f(0.9) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]0.8; 0.9[$

• لدينا الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة على المجال  $]-1.4; -1.3[$

ولدينا  $f(-1.4) \approx -0.07$  و  $f(-1.3) \approx 0.07$  لأن:  $f(-1.4) \times f(-1.3) < 0$

$$f(-1.4) \approx -0.07 \text{ و } f(-1.3) \approx 0.07$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\beta$  في المجال  $]-1.4; -1.3[$

4 تبين أن  $f(-x) = 1 - f(x)$ :

$$\begin{aligned} 1 - f(x) &= 1 - x + \frac{1}{e^x - 1} \\ &= -x + \frac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1} \\ &= -x + \frac{e^x}{e^x - 1} \\ &= -x + \frac{e^{-x}(e^x - 1)}{e^x - 1} \\ &= -x + \frac{1}{1 - e^{-x}} \\ &= -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} \\ &= f(-x) \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

لدينا:  $f(-x) = 1 - f(x)$

ومنه:  $f(x) + f(x) = 1$

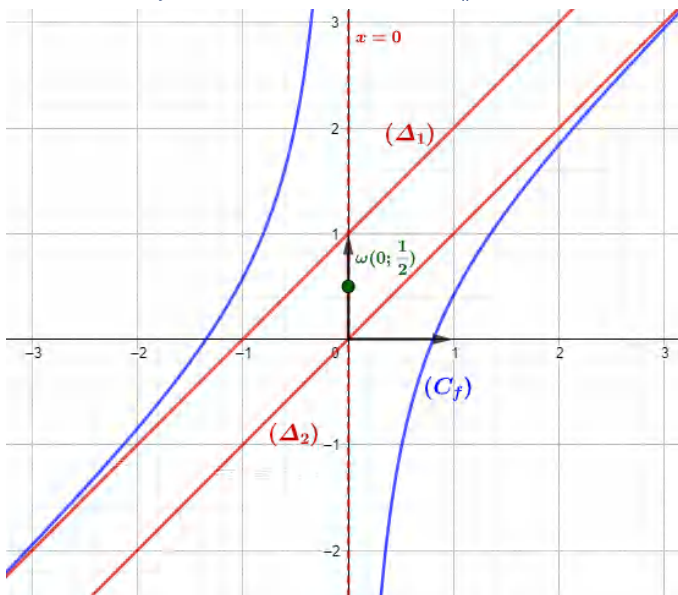
$$f(2(0) - x) + f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

ولدينا:  $(-x) \in D_f$

ومنه  $(C_f)$  يقبل النقطة ذات الاحداثيات  $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$  كمركز

تناظر له.

5 التمثيل البياني لكل من  $(\Delta_1)$ ،  $(\Delta_2)$  و  $(C_f)$



6 المناقشة البيانية:

$$(m - 1)(e^x - 1)e^{-x} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 1)(e^x - 1)e^{-x} = -1$$

$$\Rightarrow (m - 1)(e^x - 1) = -e^x$$

$$\Rightarrow m - 1 = -\frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{e^x}{e^x - 1} + 1$$

$$\Rightarrow m + x = -\frac{e^x}{e^x - 1} + 1 + x$$

$$\Rightarrow f(x) = x + m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل

المستقيمات ذات المعادلة  $y_m = x + m$ ، وهي:

لما  $m < 0$  المعادلة تقبل حل موجب

لما  $0 < m < 1$  المعادلة لا تقبل حلول

لما  $m > 1$  المعادلة تقبل حل سالب

(II)

1 تبين أن الدالة  $h$  زوجية:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة  $h$  زوجية

2 شرح كيف يمكن إنشاء  $(C_h)$  :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x > 0 \\ f(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

لما  $x > 0$   $(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$ ، وبما أن الدالة  $h$  زوجية،

فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.



21

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(II)

① حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x-1)e^x - x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x - x - 1) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$ 

②

أ/ تبين أنه  $f'(x) = -g(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + e^x(x-1) - 1 \\ &= -1 + xe^x \\ &= -(1 - xe^x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ب/ استنتاج إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]-\infty; 2]$ :

|         |           |          |   |
|---------|-----------|----------|---|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | 2 |
| $f'(x)$ | -         | 0        | + |

- جدول تغيرات الدالة  $f$ :

|         |           |             |        |
|---------|-----------|-------------|--------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | 2      |
| $f'(x)$ | -         | 0           | +      |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $f(2)$ |

③ تبين أن  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow 1 - \alpha e^\alpha = 0 \\ &\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1 \\ &= \frac{\alpha-1}{\alpha} - \alpha - 1 \\ &= \frac{\alpha-1-\alpha^2-\alpha}{\alpha} \\ &= -\frac{\alpha^2+1}{\alpha} \end{aligned}$$

- استنتاج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} 0.5 < \alpha < 0.6 \\ \Rightarrow (0.5)^2 < \alpha^2 < (0.6)^2 \end{aligned}$$

(I)

① حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^x) \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$ ② دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^x - xe^x \\ &= -(1+x)e^x \end{aligned}$$

لدينا:  $e^x > 0$  ومنه إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $-(1+x)$ :

$$\begin{aligned} -(1+x) = 0 &\Rightarrow 1+x = 0 \\ &\Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

- جدول تغيرات الدالة  $g$ :

|         |           |              |           |
|---------|-----------|--------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | -1           | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         | 0            | -         |
| $g(x)$  | 1         | $1 + e^{-1}$ | $-\infty$ |

③

أ/ تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  فيالمجال  $[-1; +\infty[$ :لدينا: الدالة  $g$  مستمرة ومتناقصة تماما على  $[-1; +\infty[$ 

$$\text{ولدينا: } g(-1) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 0$$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبلحلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $[-1; +\infty[$ ب/ التحقق أن  $0.5 < \alpha < 0.6$ :

$$\text{لدينا: } g(0.5) \times g(0.6) < 0$$

$$\text{لأن } g(0.5) \approx 0.18$$

$$\text{و } g(0.6) \approx -0.09$$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبلحلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0.5 < \alpha < 0.6$ - استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | +         | 0        | -         |

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_1$  في المجال  $[-1.6; -1.5]$  حيث  $-1.6 < x_1 < -1.5$

• لدينا الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة على المجال  $[1.5; 1.6]$

ولدينا:  $f(1.6) \times f(1.5) < 0$

لأن  $f(1.5) \approx -0.26$

و  $f(1.6) \approx 0.37$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_2$  في المجال  $[1.5; 1.6]$  حيث  $1.5 < x_2 < 1.6$

• إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلان  $x_1$  و  $x_2$

حيث:  $-1.6 < x_1 < -1.5$

و  $1.5 < x_2 < 1.6$

ب/ إنشاء  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  :

• نعين النقطة  $(1; -2)$  نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع  $(\Delta)$ .

• نرسم المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$  ذو المعادلة

$y_{(\Delta)} = -x - 1$  باستعمال جدول القيم المساعدة.

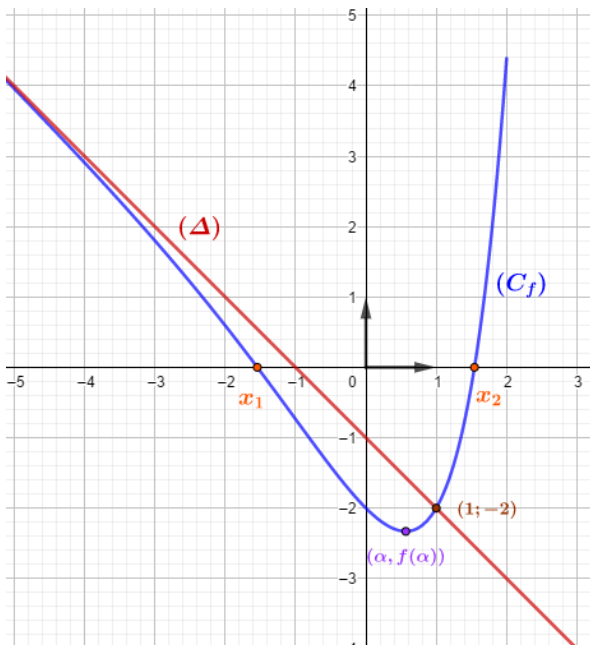
• نعين النقطتين  $x_1$  و  $x_2$  نقطتي تقاطع  $(C_f)$  مع

حامل محور الفواصل.

• نعين النقطة ذات الاحداثيات  $(\alpha; f(\alpha))$ .

• باستعمال جدول تغيرات الدالة  $f$  نرسم  $(C_f)$  مع

الاستعانة بجدول الوضعية



$$\Rightarrow (0.5)^2 + 1 < \alpha^2 + 1 < (0.6)^2 + 1$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} 0.5 < \alpha < 0.6 \\ \Rightarrow \frac{1}{0.6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0.5} \\ \Rightarrow -\frac{1}{0.5} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{0.6} \end{aligned}$$

ومنه:

$$-\frac{(0.5)^2 + 1}{0.5} < -\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < -\frac{(0.6)^2 + 1}{0.6}$$

أي:

$$-2.5 < f(\alpha) < -2.26$$

4

أ/ تبين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x - 1$

مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_{(\Delta)}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x-1)e^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x - 1$  مستقيم مقارب

مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ :

ب/ دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = (x-1)e^x$$

لدينا  $e^x > 0$

إذن إشارة الفرق من إشارة  $(x-1)$ :

$$x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

|         |           |   |   |
|---------|-----------|---|---|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 2 |
| $f'(x)$ | -         | 0 | + |

- الوضعية:

•  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-\infty; 1[$

•  $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  لما  $x = 1$  أي في النقطة ذات

الاحداثيات  $(1; -2)$

•  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما  $x \in ]1; 2]$

5

أ/ تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$  :

• لدينا الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة على المجال

$[-1.6; -1.5]$

ولدينا:  $f(-1.6) \times f(-1.5) < 0$

لأن  $f(-1.6) \approx 0.08$  و  $f(-1.5) \approx -0.06$



22

## حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

| $x$    | $-\infty$ | $\beta$ | $\alpha$ | $+\infty$ |     |
|--------|-----------|---------|----------|-----------|-----|
| $g(x)$ | $-$       | $0$     | $+$      | $0$       | $-$ |

(II)

① حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -1$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$  (نهاية شهيرة)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \right] = 0$$

- التفسير الهندسي:

•  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار  $-\infty$  معادلته:

$$y = -1$$

•  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار  $+\infty$  معادلته:

$$y = 0$$

② تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ 

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^{2x} + 2e^x + xe^x}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2} \end{aligned}$$

③ دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ :لدينا  $e^x > 0$  و  $(xe^x + 1)^2 > 0$  ومنه إشارة  $f'(x)$  منإشارة  $g(x)$ ولدينا:  $f(0) = 0$  ومنه جدول التغيرات كالتالي:

| $x$     | $-\infty$ | $\beta$    | 0 | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|------------|---|-------------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0          | + | 0           | +         |
| $f(x)$  | -1        | $f(\beta)$ | 0 | $f(\alpha)$ | 0         |

(I)

① دراسة تغيرات الدالة  $g$ :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ e^x \left( \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1 \right) \right] = -\infty$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{e^x} \right] = 0$  (نهاية شهيرة)- حساب  $g'(x)$ :

$$g'(x) = 1 - e^x$$

لدينا:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0$$

$$\Rightarrow e^x = 1$$

$$\Rightarrow x = \ln 1$$

$$\Rightarrow x = 0$$

- جدول التغيرات:

| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $g'(x)$ | +         | 0 | -         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | 1 | $-\infty$ |

② تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلان  $\alpha$  و  $\beta$ :لدينا الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة على  $\mathbb{R}$ ولدينا:  $g(1.15) = -0.008$ و  $g(1.14) = 0.01$ ولدينا:  $g(1.14) \times g(1.15) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد  $\alpha$  في المجال  $]1.14; 1.15[$ :ولدينا:  $g(-1.8) = 0.03$ و  $g(-1.9) = -0.04$ ولدينا:  $g(-1.9) \times g(-1.8) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد  $\beta$  في المجال  $]-1.9; -1.8[$ :③ استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

جدول تغيرات الدالة  $h$  :

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | $+$       | $0$ | $-$       |
| $h(x)$  | $-\infty$ | $0$ | $-\infty$ |

من جدول التغيرات نجد أعلى قيمة تأخذها الدالة  $h$  هي  $0$  ومنه  $h(x) \leq 0$ .

7 / التحقق من أن:  $p(0) = 0$

$$p(0) = 1 - 2 + 1 = 0$$

8

أ / تبين أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  عمودي على المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 5$  :

◀ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي  $-1$  ▶

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(a) \times -1 &= -1 \\ \Rightarrow f'(a) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{e^a(a+2-e^a)}{(ae^a+1)^2} &= 1 \\ \Rightarrow e^a(a+2-e^a) &= (ae^a+1)^2 \\ \Rightarrow (ae^a+1)^2 - e^a(a+2-e^a) &= 0 \\ \Rightarrow a^2e^{2a} + 1 + 2ae^a + e^{2a} - 2e^a - ae^a &= 0 \\ \Rightarrow (a^2+1)e^{2a} + (a-2)e^a + 1 &= 0 \\ \Rightarrow p(a) &= 0 \\ \Rightarrow a &= 0 \end{aligned}$$

المعادلة تقبل حل، ومنه  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  عمودي على المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 5$

ب / كتابة معادلة للمماس  $(T)$  :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= x + f(0) \\ &= x \end{aligned}$$

ج / دراسة وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة للمماس  $(T)$  :

ندرس إشارة الفرق:  $f(x) - y$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{e^x(1 - x)(1 + x) - (1 + x)}{xe^x + 1} \end{aligned}$$

4 / تعيين دون حساب كل من:  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$

و:  $\lim_{x \rightarrow \beta} \left[ \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right]$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] &= f'(\alpha) = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \beta} \left[ \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right] &= f'(\beta) = 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

$(C_f)$  يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في

النقطتين ذات الفاصلتين  $\alpha$  و  $\beta$ . معادلة كل منها

$y = f(\alpha)$  و  $y = f(\beta)$  على الترتيب

5 / تبين أن:  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + 2 - e^\alpha \\ &\Rightarrow e^\alpha = \alpha + 2 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} \\ &= \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

- حصر  $f(\alpha)$  :

لدينا:

$$\begin{aligned} 1.14 &< \alpha < 1.15 \\ 1.14 + 1 &< \alpha + 1 < 1.15 + 1 \\ \frac{1}{2.15} &< \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2.14} \end{aligned}$$

ومنه:

$$0.46 < f(\alpha) < 0.46$$

6 / تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $h(x) \leq 0$

لدينا  $h(0) = 0$

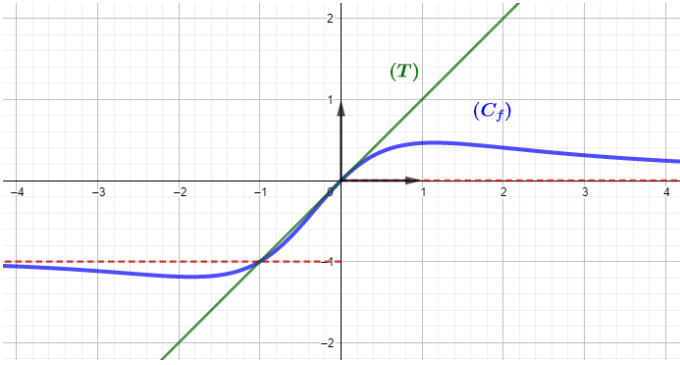
ولدينا:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ e^x \left( 1 - x - \frac{1}{e^x} \right) \right] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x)] &= -\infty \end{aligned}$$

ولدينا:

$$h'(x) = -xe^x$$

- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم  $(C_f)$



#### 10 المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned} e^x(1 - mx^2) + mx - 1 &= 0 \\ \Rightarrow e^x - mx^2e^x + mx - 1 &= 0 \\ \Rightarrow mx(1 - xe^x) &= 1 - e^x \\ \Rightarrow mx &= \frac{1 - e^x}{1 - xe^x} \\ \Rightarrow \frac{e^x - 1}{xe^x - 1} &= mx \\ \Rightarrow f(x) &= mx \end{aligned}$$

حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني  $(C_f)$  مع المستقيمات ذات المعادلة:  $f(x) = mx$ ، ومنه:

- لما  $m \leq 0$  المعادلة تقبل حل وحيدا معدوم
- لما  $0 < m < 1$  المعادلة تقبل حل موجب تماما وحل معدوم وحل سالب
- لما  $m = 1$  المعادلة تقبل حلا معدوما وحلا سالب تماما
- لما  $m > 1$  المعادلة تقبل حلا معدوما

$$\begin{aligned} &= \frac{(1+x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1+x)h(x)}{xe^x + 1} \end{aligned}$$

لدينا:  $h(x) \leq 0$   
ولدينا:

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

|       |           |      |           |
|-------|-----------|------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $1+x$ | $-$       | $0$  | $+$       |

- ندرس إشارة  $(xe^x + 1)$ :

نضع  $\varphi(x) = xe^x + 1$

$$\varphi'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$e^x > 0$  ومنه إشارة  $\varphi'(x)$  من إشارة  $(1+x)$

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

- جدول تغيرات  $\varphi(x)$ :

|               |           |       |           |
|---------------|-----------|-------|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $-1$  | $+\infty$ |
| $\varphi'(x)$ | $-$       | $0$   | $+$       |
| $\varphi(x)$  | $1$       | $0.6$ | $+\infty$ |

من جدول تغيرات  $\varphi(x)$  نلاحظ أن  $\varphi(x) > 0$  ومنه:

اذن إشارة الفرق  $f(x) - y$  كالآتي

|            |           |      |           |
|------------|-----------|------|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $h(x)$     | $-$       | $-$  | $-$       |
| $1+x$      | $-$       | $0$  | $+$       |
| $f(x) - y$ | $+$       | $0$  | $-$       |

- الوضعية:

- $(C_f)$  فوق  $(T)$  لما  $x \in ]-\infty; -1[$
- $(C_f)$  يقطع  $(T)$  في النقطة  $A(-1; -1)$
- $(C_f)$  تحت  $(T)$  لما  $x \in ]-1; +\infty[$

#### 9 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة:  $(y = 0)$  و  $(y = -1)$
- نرسم المماس  $(T)$ .

ب/ حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$
- التفسير الهندسي:

- $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار  $-\infty$  معادلته  $y = 0$
- $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار  $+\infty$  معادلته  $y = 1$

3

أ/ تبين أنه من أجل  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{-x} + x - x(-e^{-x} + 1)}{(e^{-x} + x)^2} \\ &= \frac{e^{-x} + x + xe^{-x} - x}{(e^{-x} + x)^2} \\ &= \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x} + x)^2} \end{aligned}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة  $f$ :

- لدينا:  $e^{-x} > 0$  و  $(e^{-x} + x)^2 > 0$
- إذن: إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x + 1$
- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$            | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$             | $+$       |
| $f(x)$  | $0$       | $\frac{1}{1-e}$ | $1$       |

4

أ/ كتابة معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات

الفصلة 0

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$$

ب/ التحقق أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :  $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$

$$\begin{aligned} x - f(x) &= x - \frac{x}{e^{-x} + x} \\ &= \frac{x(e^{-x} + x) - x}{e^{-x} + x} \\ &= \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x - 1 + 1} \\ &= \frac{xg(x)}{g(x) + 1} \end{aligned}$$

- استنتاج إشارة  $x - f(x)$

I

1 تعيين نهايات الدالة  $g$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}(1 + xe^x - e^{-x})) = +\infty$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ :

$$g'(x) = -e^{-x} + 1$$

لدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow -e^{-x} + 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} = 1 \\ &\Rightarrow -x = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

3 تبين أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :  $g(x) \geq 0$

من جدول التغيرات الدالة تبلغ قيمة حدية دنيا عند  $(0; 0)$

إذن  $g(x) \geq 0$

- استنتاج أن  $e^{-x} + x \geq 1$

لدينا:  $g(x) \geq 0$  أي:  $e^{-x} + x - 1 \geq 0$

إذن:  $e^{-x} + x \geq 1$

II

1 تبين أن مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $\mathbb{R}$ :

لدينا:  $e^{-x} + x \geq 1$  إذن:  $e^{-x} + x > 0$

وعليه:  $D_f = \mathbb{R}$

2

أ/ التحقق أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :  $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^{-x} + x} \\ &= \frac{x}{x\left(\frac{e^{-x}}{x} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{e^{-x}}{x} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{xe^x} + 1} \end{aligned}$$

إشارة  $f(x) - x$  من إشارة  $x$

لأن:  $g(x) > 0$

و:  $g(x) + 1 > 0$

|            |           |     |           |
|------------|-----------|-----|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $x - f(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |

ج/ استنتاج الوضع النسبي بين  $(C_f)$  والمستقيم  $(T)$  :

لدينا:

$$f(x) - y_{(T)} = -\frac{xg(x)}{g(x) + 1}$$

وعليه:

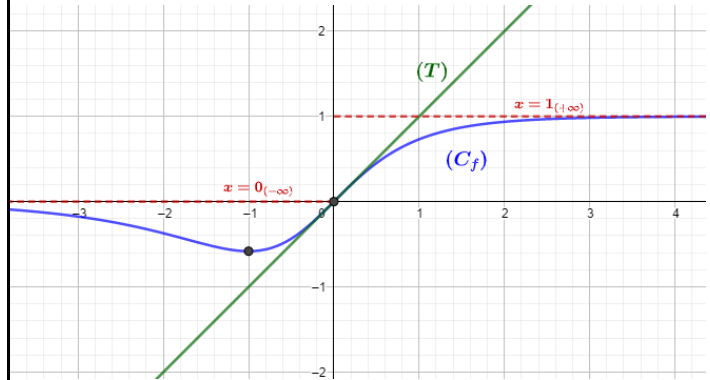
|                  |           |     |           |
|------------------|-----------|-----|-----------|
| $x$              | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f(x) - y_{(T)}$ | $+$       | $0$ | $-$       |

•  $(C_f)$  فوق  $(T)$  لما  $x \in ]-\infty; 0[$

•  $(C_f)$  يقطع  $(T)$  لما  $x = 0$

•  $(C_f)$  تحت  $(T)$  لما  $x \in ]0; +\infty[$

5 إنشاء  $(T)$  و  $(C_f)$ :



6 المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned} \frac{xe^x}{xe^x + 1} - 1 = m &\Rightarrow \frac{xe^x e^{-x}}{(xe^x + 1)e^{-x}} = m + 1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{x + e^{-x}} = m + 1 \\ &\Rightarrow f(x) = m + 1 \end{aligned}$$

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيمات

ذات المعادلة  $y_m = m + 1$

• لما  $y_m < \frac{1}{1-e}$  أي لما  $m < \frac{1}{1-e} - 1$

أي لما  $m < \frac{e}{1-e}$  المعادلة لا تقبل حلول

• لما  $y_m = \frac{1}{1-e}$  أي لما  $m = \frac{e}{1-e}$

المعادلة تقبل حل مضاعف سالب

• لما  $\frac{1}{1-e} < y_m < 0$  أي لما  $\frac{e}{1-e} < m < -1$

المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

• لما  $y_m = 0$  أي لما  $m = -1$

المعادلة تقبل حل معدوم

• لما  $0 < y_m < 1$  أي لما  $-1 < m < 0$

المعادلة تقبل حل موجب تماما

• لما  $y_m \geq 1$  أي لما  $m \geq 0$

المعادلة لا تقبل حلول

## لا تنسونا من صالح دعائكم



## #الخليل\_للرياضيات